

0 Le paradoxe de Saint-Petersbourg

histoires de statistique

Le paradoxe de Saint-Petersbourg

jouer en Martingale



hist-math.fr

Bernard YCART

Pour un problème qui devait n'être qu'un petit exemple sans conséquence, le paradoxe de Saint-Petersbourg a accompagné l'histoire des probabilités pendant trois siècles.

1 Lettre à M. de Montmort, 9 septembre 1713

Il a démarré de façon tout à fait anodine par cette lettre du 9 septembre 1713. Il s'agit d'un jeu de pile ou face entre deux joueurs A et B, qui s'arrête la première fois où Face apparaît. « A promet à B de lui donner des écus en cette progression 1, 2, 4, 8, 16, etc. »

C'est-à-dire que si le tirage est Face au premier jet, B gagne 1, et le jeu s'arrête. Si le tirage est Pile Face, B gagne 2, si c'est Pile Pile Face, B gagne 4, etc.

« Quoique ces problèmes pour la plupart ne soient pas difficiles, dit l'auteur, vous y trouverez pourtant quelque chose de fort curieux. »

Ah bon ?

2 vous y trouverez quelque chose de fort curieux

Eh oui ! En termes modernes, le gain de B est une variable aléatoire, qui vaut 2 puissance n moins un si le jeu s'arrête au n -ième coup, donc avec probabilité un sur 2 puissance n . Le produit de la probabilité un sur 2 puissance n par le gain 2 puissance n moins un, vaut toujours un demi. Donc l'espérance que l'on demande de calculer vaut un demi, plus un demi, plus un demi, etc. Elle est infinie.

Si l'espérance de gain a un sens, c'est la somme qu'on accepterait de payer pour jouer. Un jeu où l'espérance de gain est infinie, tout le monde devrait se précipiter pour y jouer, et accepter de payer une fortune pour le privilège d'une seule partie. Pourtant personne de sensé n'accepterait de payer très cher pour jouer à ce jeu-là. C'est ça le paradoxe.

Il va alimenter un important échange de lettres pendant la première moitié du dix-huitième siècle. Comme c'est un peu compliqué, je vais commencer par vous présenter les principaux acteurs.

Lettre à M. de Montmort, 9 septembre 1713

Nicolas Bernoulli (1687-1759)

...mène au quatrième, & ainsi de suite ; on demande quelle est l'espérance de B. Cinquième Problème. On demande la même chose si A promet à B de lui donner des écus en cette progression 1, 2, 4, 8, 16, &c. ou 1, 3, 9, 27, &c. ou 1, 4, 9, 16, 25, &c. ou 1, 8, 27, 64, &c. au lieu de 1, 2, 4, 8, 16, &c. comme auparavant. Quoique ces Problèmes pour la plupart ne soient pas difficiles, vous y trouverez pourtant quelque chose de fort curieux ; je vous ai déjà proposé le premier dans ma dernière Lettre. Vous me ferez plaisir de me communiquer enfin votre solution du Tier, afin que je puisse vous donner l'explication de mon Anagramme. Au reste, Monsieur, je me réjouis de ce que votre fanté est meilleure ; mais je vous plains de ce que vous avez perdu votre Princeps. J'ai l'honneur d'être avec un attachement inviolable,

MONSIEUR,

Votre très humble & très obéissant Serviteur
N. BERNOULLI.

vous y trouverez quelque chose de fort curieux

Nicolas Bernoulli, 9 septembre 1713

coup	probabilité	gain
1	$\frac{1}{2}$	1
2	$\frac{1}{4}$	2
3	$\frac{1}{8}$	4
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$\frac{1}{2^n}$	2^{n-1}

Espérance de gain :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots = +\infty$$

3 famille Bernoulli

D'abord la famille Bernoulli. Il faut dire qu'ils ne facilitent pas le boulot de l'historien. Il y en a onze ici, et encore il n'y sont pas tous.

Il va être question de trois d'entre eux. Jacob ou Jacques Bernoulli en haut à gauche est celui de la loi de Bernoulli, du jeu de Pile ou Face. C'est celui qui a donné la première démonstration d'une loi des grands nombres, en 1713 dans l'Ars conjectandi. Sauf qu'en 1713, il était mort depuis 8 ans. C'est son neveu Nicolas qui a édité l'Ars conjectandi. Ce Nicolas est celui qui a écrit la lettre, l'auteur du paradoxe.

Le troisième Bernoulli dont il va être question est Daniel, un autre neveu de Jacques. Ce Daniel Bernoulli a publié un article important sur le paradoxe de son cousin, et il l'a publié dans les « Commentaires de l'académie de Saint-Petersbourg ». D'où le nom du paradoxe.

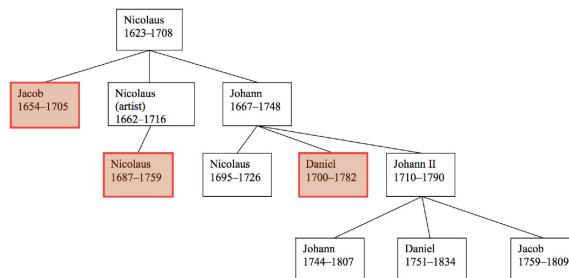
Ouf, ça, c'est fait. Ça va, vous suivez ?

4 Nicolas Bernoulli (1687–1759)

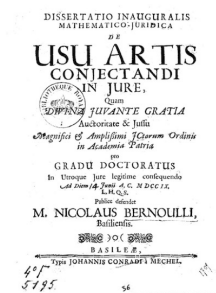
L'auteur du paradoxe donc, c'est Nicolas Bernoulli. Il avait commencé ses études sous la direction de son oncle Jacques, mort en 1705. Il a soutenu sa thèse en 1709, et vous voyez la première page de la thèse en question : « sur l'usage de l'Art de la conjecture en droit ». Cet Art de la conjecture, c'est celui qu'il a commencé à apprendre de son oncle Jacques.

En septembre 1713, au moment où il envoie son petit problème à Montmort, il termine la publication de l'Ars conjectandi, qui est pour l'essentiel de son oncle Jacques, mais dans lequel il a tout de même rajouté son grain de sel, en particulier une de ses lettres à Montmort en introduction.

famille Bernoulli



Nicolas Bernoulli (1687–1759)



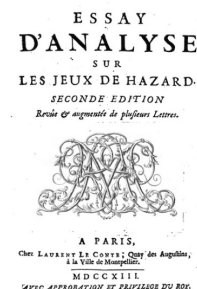
5 Essay d'analyse sur les jeux de hazard (1713)

Le destinataire de la lettre, Pierre Rémond de Montmort, a écrit un « Essai d'analyse sur les jeux de hasard » en 1708. Il le réédite justement en cette même année 1713. Il augmente cette deuxième édition, entre autres de sa correspondance avec Nicolas Bernoulli.

Il faut reconnaître qu'il n'a pas vraiment mordu à l'hameçon : il savait évidemment faire le calcul d'espérance que lui demandait Nicolas Bernoulli, mais soit il ne l'a pas fait, soit il n'a pas vu ce qui était paradoxal là-dedans.

Essay d'analyse sur les jeux de hazard (1713)

Pierre Rémond de Montmort (1678-1719)



6 Daniel Bernoulli (1700–1782)

Nicolas, est un peu déçu que Montmort ne réagisse pas. Plus tard, il enverra le même problème à son jeune cousin, Daniel Bernoulli, qui en 1713 n'a que 13 ans. La fameuse solution de Daniel Bernoulli dans les Commentaires de l'Académie de Saint-Petersbourg date de 1738. Dans son article, Daniel cite Gabriel Cramer.

Daniel Bernoulli (1700–1782)



7 Gabriel Cramer (1704–1752)

Gabriel Cramer est encore plus jeune, il n'a que 9 ans en 1713. Il donnera une solution du problème en 1728, dix ans avant Bernoulli.

Gabriel Cramer a joué un grand rôle dans la théorie des probabilités. Il est un peu injuste qu'il n'ait survécu que pour ces « formules de Cramer », qui au fond ne servent pas à grand chose.

Gabriel Cramer (1704–1752)



8 Georges-Louis Leclerc, Comte de Buffon (1707–1788)

Buffon lui, est encore plus jeune que Cramer. Il est plus connu comme naturaliste que comme mathématicien, pourtant c'est sur des problèmes de probabilité qu'il démarre sa carrière de savant.

Voici quelques extraits de sa correspondance avec Cramer à propos du paradoxe.

Georges-Louis Leclerc, Comte de Buffon (1707–1788)



9 Lettre à Gabriel Cramer, 3 Octobre 1730

« La raison de cette contrariété entre le calcul mathématique et le bon sens, me semble consister dans le peu de proportion qu'il y a entre l'argent et l'avantage qui en résulte. [...] »

Pour raisonner donc plus certainement sur toutes ces choses, il faudrait établir quelques principes ; je dirais, par exemple, que le nécessaire est égal à la somme qu'on est obligé de dépenser pour continuer à vivre comme on a toujours vécu. [...] je dirais de plus que la perte du nécessaire se fait ressentir infiniment ; qu'ainsi elle ne peut être compensée par aucune espérance, qu'au contraire le sentiment de la perte du superflu est borné, et que par conséquent il peut être compensé. »

Ce que Buffon exprime là est un argument qui revient très souvent dans les discussions. L'espérance mathématique ne traduirait pas exactement l'utilité de l'argent. Pour Buffon, le nécessaire correspond à une espérance infinie, et la perte du nécessaire est incalculable.

Plus tard, dans son Essai d'Arithmétique Morale, Buffon rajoutera un autre argument qui est apparu lui aussi très tôt, en particulier chez Cramer.

10 cette contrariété extraordinaire

« La raison de cette contrariété extraordinaire du bon sens et du calcul, vient de deux causes, la première est que la probabilité doit être regardée comme nulle, dès qu'elle est très-petite, c'est-à-dire, au-dessous de $\frac{1}{10000}$; la seconde est le peu de proportion qu'il y a entre la quantité de l'argent et les avantages qui en résultent ; le mathématicien dans son calcul, estime l'argent par sa quantité, mais l'homme moral doit l'estimer autrement. »

Il y a donc deux explications au paradoxe. L'une est que les probabilités trop faibles doivent être considérées comme nulles, l'autre est que l'espérance mathématique ne correspond pas à l'attente morale du joueur. Pourquoi cette limite arbitraire de un sur dix mille pour qu'une probabilité soit considérée comme nulle ? Parce que pour Buffon, un sur dix mille c'est la probabilité qu'a un homme en bonne santé, de mourir dans la journée. Ça fait plaisir de le savoir.

L'originalité de Buffon est son approche expérimentale.

11 J'ai fait deux mille quarante-huit expériences

« J'ai donc fait deux mille quarante-huit expériences sur cette question, c'est-à-dire, j'ai joué deux mille quarante-huit fois ce jeu en faisant jeter la pièce en l'air par un enfant ; les deux-mille quarante-huit parties de jeu, ont produit dix mille cinquante-sept écus en tout, ainsi la somme équivalant à l'espérance de celui qui ne peut gagner, est à peu-près cinq écus pour chaque partie. [...] Je tiens ce résultat général pour bon, parce qu'il est fondé sur un grand nombre d'expériences, et que d'ailleurs il s'accorde avec un autre raisonnement mathématique et incontestable, par lequel on trouve à peu-près ce même équivalent de cinq écus. »

Clairement, Buffon ne voit pas que son raisonnement est faux, précisément à cause de ces occurrences de probabilité faibles qu'il décide d'annuler.

Lettre à Gabriel Cramer, 3 Octobre 1730

Georges-Louis Leclerc, Comte de Buffon (1707-1788)

La raison de cette contrariété entre le calcul mathématique & le bon sens, me semble consister dans le peu de proportion qu'il y a entre l'argent & l'avantage qui en résulte. [...]

Pour raisonner donc plus certainement sur toutes ces choses, il faudroit établir quelques principes ; je dirois, par exemple, que le nécessaire est égal à la somme qu'on est obligé de dépenser pour continuer à vivre comme on a toujours vécu. [...] je dirois de plus que la perte du nécessaire se fait ressentir infiniment ; qu'ainsi elle ne peut être compensée par aucune espérance, qu'au contraire le sentiment de la perte du superflu est borné, & que par conséquent il peut être compensé.

cette contrariété extraordinaire

Buffon, Essai d'arithmétique morale (1777)

La raison de cette contrariété extraordinaire du bon sens et du calcul, vient de deux causes, la première est que la probabilité doit être regardée comme nulle, dès qu'elle est très-petite, c'est-à-dire, au-dessous de $\frac{1}{10000}$; la seconde est le peu de proportion qu'il y a entre la quantité de l'argent & les avantages qui en résultent ; le Mathématicien dans son calcul, estime l'argent par sa quantité, mais l'homme moral doit l'estimer autrement.

J'ai fait deux mille quarante-huit expériences

Buffon, Essai d'arithmétique morale (1777)

J'ai donc fait deux mille quarante-huit expériences sur cette question, c'est-à-dire, j'ai joué deux mille quarante-huit fois ce jeu en faisant jeter la pièce en l'air par un enfant ; les deux-mille quarante-huit parties de jeu, ont produit dix mille cinquante-sept écus en tout, ainsi la somme équivalent à l'espérance de celui qui ne peut gagner, est à peu-près cinq écus pour chaque partie. [...] Je tiens ce résultat général pour bon, parce qu'il est fondé sur un grand nombre d'expériences, & que d'ailleurs il s'accorde avec un autre raisonnement mathématique & incontestable, par lequel on trouve à peu-près ce même équivalent de cinq écus.

12 L'Avare est comme le Mathématicien

L'Avare est comme le Mathématicien

Buffon, Essai d'arithmétique morale (1777)

« L'avare est comme le mathématicien ; tous deux estiment l'argent par sa quantité numérique, l'homme sensé n'en considère ni la masse ni le nombre, il n'y voit que les avantages qu'il peut en tirer, il raisonne mieux que l'avare, et sent mieux que le mathématicien. »

L'Avare est comme le Mathématicien ; tous deux estiment l'argent par sa quantité numérique, l'homme sensé n'en considère ni la masse ni le nombre, il n'y voit que les avantages qu'il peut en tirer, il raisonne mieux que l'Avare, & sent mieux que le Mathématicien.

13 Jean le Rond d'Alembert (1717–1783)

D'autres se sont mêlés du problème, en particulier d'Alembert, parce qu'il se mêlait de tout. En l'occurrence, il n'aurait peut-être pas dû.

D'Alembert a résolu définitivement le problème de la publication scientifique. Il rassemble ses écrits dans des volumes qu'il appelle ses « Opuscules » et il décide tout seul comme un grand de leur publication. Dans son recueil d'opuscules de 1761 donc, il publie ses « Réflexions sur le calcul des probabilités ».

Jean le Rond d'Alembert (1717–1783)



14 Réflexions sur le calcul des probabilités (1761)

« La règle ordinaire de l'analyse des jeux de hasard, est celle-ci : multipliez le gain ou la perte que chaque événement doit produire, par la probabilité qu'il y a que cet événement doit arriver ; ajoutez ensemble tous ces produits, en regardant les pertes comme des gains négatifs ; et vous aurez l'espérance du joueur, ou, ce qui revient au même, la somme que ce joueur devrait donner avant le jeu, pour commencer à jouer but-à-but. Aucun analyste, que je sache, n'a jusqu'ici révoqué cette règle en doute, et tous s'y sont conformés dans les calculs qu'ils ont faits des différentes probabilités. Il se trouve néanmoins des cas où elle paraît être en défaut, et qui vont faire la matière de quelques réflexions. »

Réflexions sur le calcul des probabilités (1761)

Jean le Rond d'Alembert (1717–1783)

La règle ordinaire de l'analyse des jeux de hasard, est celle-ci : multipliez le gain ou la perte que chaque événement doit produire, par la probabilité qu'il y a que cet événement doit arriver ; ajoutez ensemble tous ces produits, en regardant les pertes comme des gains négatifs ; & vous aurez l'espérance du joueur, ou, ce qui revient au même, la somme que ce joueur devrait donner avant le jeu, pour commencer à jouer but-à-but. **Aucun Analyste, que je sache, n'a jusqu'ici révoqué cette règle en doute, & tous s'y sont conformés dans les calculs qu'ils ont faits des différentes probabilités. Il se trouve néanmoins des cas où elle paraît être en défaut, & qui vont faire la matière de quelques réflexions.**

15 Un Géomètre plein de savoir et de sagacité

« Un géomètre célèbre de l'Académie des sciences, plein de savoir et de sagacité, avec lequel je raisonnais un jour sur cette question, m'en donna une solution qui paraît d'abord satisfaisante, et qui est très simple, quoique très ingénieuse. « On ne doit point supposer, me dit-il, que le nombre des jets soit infini, ni même indéterminé ; car Jacques, quelque riche qu'on le suppose, n'a pas une somme infinie en argent à donner à Pierre ; il n'a, et ne peut avoir qu'une certaine quantité finie d'argent. Supposons-le riche de 2^{99} écus, somme exorbitante, et qui passe le vraisemblable ; il est évident qu'il ne pourra jouer au-delà de cent coups ; et qu'ainsi l'espérance ou l'enjeu de Pierre est cinquante écus. Voilà ce que Pierre doit donner à Jacques pour jouer avec Jacques à jeu égal ». »

Le « géomètre célèbre plein de savoir et de sagacité », est probablement Condorcet. Il explique, après beaucoup d'autres, que la quantité d'argent possible est forcément finie, donc le jeu ne peut pas se prolonger indéfiniment. Cela ne convainc pas pour autant d'Alembert.

Un Géomètre plein de savoir et de sagacité

d'Alembert, *Réflexions sur le calcul des probabilités* (1761)

Un Géomètre célèbre de l'Académie des Sciences, plein de savoir & de sagacité, avec lequel je raisonneis un jour sur cette question, m'en donna une solution qui paroît d'abord satisfaisante, & qui est très-simple, quoique très ingénieuse. « On ne doit point supposer, me dit-il, que le nombre des jets soit infini, ni même indéterminé ; car Jacques, quelque riche qu'on le suppose, n'a pas une somme infinie en argent à donner à Pierre ; il n'a, & ne peut avoir qu'une certaine quantité finie d'argent. Supposons-le riche de 2^{99} écus, somme exorbitante, & qui passe le vraisemblable ; il est évident qu'il ne pourra jouer au-delà de cent coups ; & qu'ainsi l'espérance ou l'enjeu de Pierre est cinquante écus. Voilà ce que Pierre doit donner à Jacques pour jouer avec Jacques à jeu égal ».

16 Ces règles ont besoin d'être modifiées

« Il me suffit d'avoir exposé les doutes (bien fondés, ce me semble) qu'on peut avoir sur la théorie ordinaire des probabilités ; doutes que je ne pousserai pas plus loin quant à présent, et qui me paraissent ne pouvoir être rendus trop sensibles aux géomètres, pour qu'ils s'attachent ou à les lever, ou à réformer la théorie d'après ces doutes. »

C'est du d'Alembert dans le texte.

Ces règles ont besoin d'être modifiées

d'Alembert, *lettre sur le calcul des probabilités* (1767)

Il me suffit d'avoir exposé les doutes (bien fondés, ce me semble) qu'on peut avoir sur la théorie ordinaire des probabilités ; doutes que je ne pousserai pas plus loin quant à présent, & qui me paroissent ne pouvoir être rendus trop sensibles aux Géomètres, pour qu'ils s'attachent ou à les lever, ou à réformer la théorie d'après ces doutes.

17 ce ton tranchant et positif qu'il affecte en tout

« il a donc certainement beaucoup de talent pour méditer, pour bien écrire et pour bien parler, mais aussi a-t-il un grand défaut, c'est ce ton tranchant et positif, qu'il affecte en tout et, au contraire, un excès de critique par rapport à des matières traitées par d'autres. [...] Les doutes que s'est formé M. d'Alembert sur plusieurs choses, comme [...] sur le calcul des probabilités, [...] ne sont rien moins que bien fondées et on est étonné de voir un si grand géomètre s'occuper à résoudre des difficultés, qu'il s'est fait lui-même et qui ne devraient pas arrêter un novice en géométrie. »

Celui qui parle de d'Alembert avec autant de réalisme, est un astronome suédois, Lexell, qui écrit à Euler, le fils.

ce ton tranchant et positif qu'il affecte en tout

lettre de Lexell à Euler (fils), 7 janvier 1781

il a donc certainement beaucoup de talent pour mediter, pour bien ecrire et pour bien parler, mais aussi a t'il un grand defaut, c'est ce ton tranchant et positif, qu'il affecte en tout et, au contraire, un excès de critique par rapport à des matières traitées par d'autres. [...] Les doutes que s'est formé M-r d'Alembert sur plusieurs choses, comme [...] sur le calcul des probabilités, [...] ne sont rien moins que bien fondées et on est étonné de voir un si grand Geometre s'occuper à resoudre des difficultes, qu'il s'est fait lui-même et qui ne devraient pas arreter un novice en Geometrie.

18 Daniel Bernoulli (1700–1782)

Daniel Bernoulli (1700–1782)

Une solution réaliste au problème du calcul de l'espérance avait déjà été donnée en 1738, par Daniel Bernoulli.

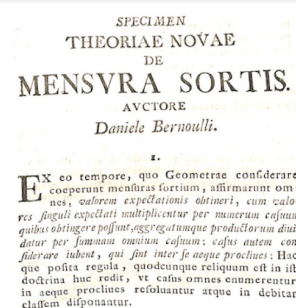


19 Une nouvelle théorie sur la mesure du sort (1738)

Une nouvelle théorie sur la mesure du risque (1738)

Daniel Bernoulli, Commentaires de l'Académie de Saint-Petersbourg

C'est cette fameuse publication dans les Commentaires de l'Académie de Saint-Petersbourg qui a donné son nom au paradoxe. Bernoulli annonce « Une nouvelle théorie sur la mesure du sort ». Cet article est un des plus cités dans l'histoire des probabilités, et il est encore cité de nos jours en économétrie.



20 Pierre-Simon Laplace (1749–1827)

Pierre-Simon Laplace (1749–1827)

Laplace bien sûr, aborde le problème de Saint-Petersbourg dans son Essai philosophique sur les probabilités. Il reprend à son compte la solution de Bernoulli. Voici ce qu'il en dit.



21 Essai Philosophique sur les Probabilités (1814)

Essai Philosophique sur les Probabilités (1814)

Pierre Simon Laplace (1749–1827)

« D'où vient cette différence entre le résultat du calcul, et l'indication du sens commun ? On reconnut bientôt, qu'elle tenait à ce que l'avantage moral qu'un bien nous procure, n'est pas proportionnel à ce bien, et qu'il dépend de mille circonstances souvent très-difficiles à définir, mais dont la plus générale et la plus importante est celle de la fortune. En effet, il est visible qu'un franc a beaucoup plus de prix pour celui qui n'en a que cent, que pour un millionnaire. On doit donc, dans le bien espéré, distinguer sa valeur absolue, de sa valeur relative. »

D'où vient cette différence entre le résultat du calcul, et l'indication du sens commun ? On reconnut bientôt, qu'elle tenait à ce que l'avantage moral qu'un bien nous procure, n'est pas proportionnel à ce bien, et qu'il dépend de mille circonstances souvent très-difficiles à définir, mais dont la plus générale et la plus importante est celle de la fortune. En effet, il est visible qu'un franc a beaucoup plus de prix pour celui qui n'en a que cent, que pour un millionnaire. On doit donc, dans le bien espéré, distinguer sa valeur absolue, de sa valeur relative.

22 Nous nommerons cet accroissement *espérance morale*

« En voici cependant un proposé par Daniel Bernoulli, et qui peut servir dans beaucoup de cas. [...] »

Si l'on détermine les diverses valeurs que cette fortune peut recevoir en vertu de ces expectatives, et leurs probabilités ; le produit de ces valeurs élevées respectivement aux puissances indiquées par ces probabilités, sera la fortune physique qui procurerait à l'individu, le même avantage moral qu'il reçoit de la partie de sa fortune, prise pour unité, et de ses expectatives ; en retranchant donc l'unité, de ce produit ; la différence sera l'accroissement de la fortune physique, dû aux expectatives : nous nommerons cet accroissement, *espérance morale*. »

Le produit des valeurs élevées aux puissances indiquées par les probabilités, revient à remplacer le calcul d'une moyenne arithmétique, par une moyenne géométrique. Et c'est ce que Laplace, après Daniel Bernoulli, appelle l'espérance morale.

Nous nommerons cet accroissement *espérance morale*

Laplace, Essai Philosophique sur les Probabilités (1814)

En voici cependant un proposé par Daniel Bernoulli, et qui peut servir dans beaucoup de cas. [...]

si l'on détermine les diverses valeurs que cette fortune peut recevoir en vertu de ces expectatives, et leurs probabilités ; **le produit de ces valeurs élevées respectivement aux puissances indiquées par ces probabilités**, sera la fortune physique qui procurerait à l'individu, le même avantage moral qu'il reçoit de la partie de sa fortune, prise pour unité, et de ses expectatives ; en retranchant donc l'unité, de ce produit ; la différence sera l'accroissement de la fortune physique, dû aux expectatives : nous nommerons cet accroissement, *espérance morale*.

23 Siméon Denis Poisson (1781–1840)

Siméon Denis Poisson est un de ceux qui ont osé aborder les probabilités juste après Laplace.

Siméon Denis Poisson (1781–1840)



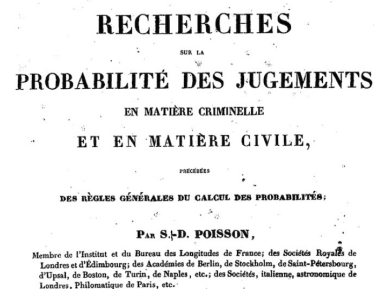
24 Recherches sur la probabilité des jugements (1837)

On a beaucoup reproché à Poisson ces « Recherches sur la probabilité des jugements », surtout à cause du titre, parce que l'application des probabilités au droit était considérée comme peu fondée.

En fait le livre est essentiellement un cours de probabilités. Voici ce qu'il dit du problème de Saint-Petersbourg.

Recherches sur la probabilité des jugements (1837)

Siméon Denis Poisson (1781–1840)



25 La règle de l'espérance morale

« Ici la règle de l'espérance mathématique paraît donc en défaut ; et c'est pour lever la difficulté que nous signalons, que l'on a imaginé la règle de l'espérance morale et sa mesure. Mais on doit remarquer que cette difficulté tient à ce que, dans les conditions du jeu, on a fait abstraction de la possibilité pour B, de payer toutes les sommes que les chances du jeu pourront valoir à A. Quelque grande qu'on la suppose, la fortune de B est nécessairement limitée. »

Voici donc résumé en peu de phrases, ce que l'on a compris du paradoxe, et les mathématiciens en sont à peu près restés là, jusqu'au vingtième siècle.

Bien. Mais les joueurs, eux, qu'en pensaient-ils pendant tout ce temps ?

La règle de l'espérance morale

Poisson, Recherches sur la probabilité des jugements (1837)

Ici la règle de l'espérance mathématique paraît donc en défaut ; et c'est pour lever la difficulté que nous signalons, que l'on a imaginé la règle de l'espérance morale et sa mesure. Mais on doit remarquer que cette difficulté tient à ce que, dans les conditions du jeu, on a fait abstraction de la possibilité pour B, de payer toutes les sommes que les chances du jeu pourront valoir à A. Quelle que grande qu'on la suppose, la fortune de B est nécessairement limitée.

26 Jean Barbeyrac (1674–1744)

Jean Barbeyrac n'est pas du tout mathématicien. C'est un juriste, qui écrit en 1737 un Traité du jeu.

Jean Barbeyrac (1674–1744)

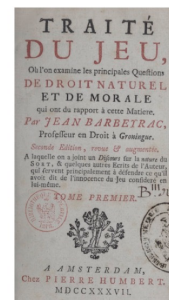


27 Traité du jeu (1737)

Dans ce traité du jeu, vu sous ses aspects juridiques et moraux, il se montre parfaitement conscient des débats mathématiques.

Traité du jeu (1737)

Jean Barbeyrac (1674–1744)



28 de grands et beaux efforts de l'Esprit Géométrique

« Ce sont là, à la vérité, de grands et beaux efforts de l'esprit géométrique, mais qui ne peuvent ici nous être d'aucun usage. La plupart des joueurs ne sont rien moins que mathématiciens ; et quand ils le seraient, je doute qu'ils voulussent se donner la peine d'appliquer leur science à une chose comme le jeu, où l'avidité du gain ne permet guère de donner beaucoup de temps à des idées et des discussions abstraites, qui au fond seraient ici très mal employées. »

de grands & beaux efforts de l'esprit Géométrique

Barbeyrac, Traité du jeu (1737)

Ce sont là, à la vérité, de grands & beaux efforts de Esprit Géométrique, mais qui ne peuvent ici nous être d'aucun usage. La plupart des Joueurs ne sont rien moins que Mathématiciens ; & quand ils le seraient, je doute qu'ils voulussent se donner la peine d'appliquer leur Science à une chose comme le Jeu, où l'avidité du Gain ne permet guères de donner beaucoup de tems à des idées & des discussions abstraites, qui au fond seroient ici très-mal employées.

29 salle de jeu au XVIII^e

Le dix-huitième siècle est furieusement joueur. On ne compte plus les décrets qui tentent d'encadrer les jeux d'argent, comme le pharaon, ou la bassette, qui ruinent les familles, et provoquent des désordres publics.

salle de jeu au XVIII^e
William Hogart (1697–1764)



30 roulette au XVIII^e

La roulette, qui semble être née en France dans la première moitié du dix-huitième siècle, se répand rapidement dans toute l'Europe. Ceci est une caricature anglaise.

roulette au XVIII^e



31 Martingale

Les joueurs, c'est bien connu, passent leur temps à inventer des tactiques de jeu. Le terme « martingale » relève à l'origine de l'équitation. « Une martingale nous dit ce dictionnaire, est une large courroie de manège, qui empêche un cheval qui porte au vent, de battre à la main ».

Ah! C'est tout de suite plus clair avec un dictionnaire.

Martingale est « aussi un terme du jeu de pharaon, lorsque le ponte double toujours son jeu, pour se retirer avec un bien sûr, supposé qu'il gagne une seule fois. »

Au pharaon, le ponte est le joueur qui mise, opposé au banquier qui raffe les mises.

Martingale
Abbé Prévost, dictionnaire portatif (1750)

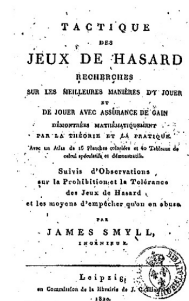
MARTINGALE, f. f. Nom d'une large courroie de manège, qui, attachée par un bout aux fangles & de l'autre au dessous de la muflerole, empêche un cheval qui porte au vent de battre à la main. C'est aussi un terme du jeu de Pharaon, lorsque le Ponte double toujours son jeu, pour se retirer avec un gain sûr, supposé qu'il gagne une seule fois.

32 Tactique des jeux de hasard (1802)

Ce livre recense les tactiques utilisées par les joueurs. Le sous-titre est « Recherches sur les meilleures manières de jouer avec assurance du gain ». L'auteur, un certain James Smyll, se présente comme ingénieur. Pourtant son livre n'est pas un livre de mathématiques.

Voici comme il explique la tactique de la martingale.

tactique des jeux de hasard (1802)
James Smyll



33 Jouer en Martingale

« Plusieurs personnes jouent en martingale, c'est-à-dire qu'ayant perdu *un* écu elles en mettent *deux* pour le coup suivant, et si elles perdent encore, elles en mettent *quatre* toujours en doublant, 8, 16, 32, 64, 128, 256, etc. de sorte qu'après avoir perdu huit coups de suite et conséquemment 255 écus et mettant encore 256 écus pour le neuvième coup, en gagnant ce dernier coup elles ne regagneraient que les pertes des huit coups précédents et un écu en sus. [...]

Qu'en mettant 2,147,483,648 écus au trente-deuxième coup, joint aux 31 précédents, cela formerait un déboursé de 4,294,967,295 écus : et si je n'avais pas le malheur de sauter j'aurais le *beau bonheur* de gagner un écu!!! »

Smyll a beau ironiser, comment voulez-vous convaincre un joueur que ça ne marche pas ?

34 Jouer en Martingale

Voici ce qui se passe. On joue un au premier coup. Si on gagne, on reçoit deux, pour un bénéfice de un. Si on perd, on mise deux. La mise totale est donc 3. Si on gagne au second coup, on recevra 4 et le bénéfice sera encore un. Si on gagne au *n*-ième coup, on aura misé en tout deux puissance *n* moins un, on recevra deux puissance *n*, pour un bénéfice toujours égal à un.

En jouant « en martingale », on est donc absolument certain de gagner.

35 La théorie des jeux de hasard (1788)

Là il y a quelque chose qui ne va pas. N'importe quelle personne sensée vous dira que s'il y avait un moyen certain de gagner, tout le monde l'utiliserait. On sait bien depuis toujours qu'il n'y en a pas. Voici comment c'est exprimé dans cette théorie des jeux de hasard de 1788.

Jouer en Martingale
Smyll, tactique des jeux de hasard (1802)

Plusieurs personnes jouent en Martingale, c'est-à-dire qu'ayant perdu *un* écu elles en mettent *deux* pour le coup suivant, et si elles perdent encore, elles en mettent *quatre* toujours en doublant, 8, 16, 32, 64, 128, 256, etc. de sorte qu'après avoir perdu huit coups de suite et conséquemment 255 écus et mettant encore 256 écus pour le neuvième coup, en gagnant ce dernier coup elles ne regagneroient que les pertes des huit coups précédens et un écu en sus. [...]

Qu'en mettant 2,147,483,648 écus au trente-deuxième coup, joint aux 31 précédents, cela formeroit un déboursé de 4,294,967,295 écus : et si je n'avois pas le malheur de sauter j'aurois le *beau bonheur* de gagner un écu!!!

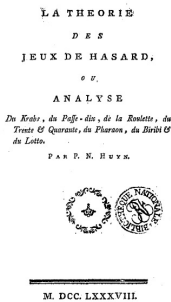
Jouer en Martingale

coup	mise	gain	bénéfice
1	1	2	1
2	1 + 2	4	1
3	1 + 2 + 4	8	1
⋮	⋮	⋮	
<i>n</i>	2 ^{<i>n</i> - 1}	2 ^{<i>n</i>}	1

Probabilité de gagner 1 :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = 1$$

La théorie des jeux de hasard (1788)
P. N. Huyn



36 aucune maniere de jouer pour gagner surement

« Il ne peut exister aucune marche, aucune manière de jouer pour gagner sûrement ; pas même pour ôter la moindre portion de l'avantage du banquier. À la longue tous les événements s'égalisent, et le banquier ayant plus de chances en sa faveur que le ponte doit gagner absolument. Si un joueur a eu le bonheur de faire un gros coup, il le reperdra en détail, de même que ce qu'on aura gagné avec une martingale on le reperdra en gros ; par ce que aussi grande qu'elle soit, elle sautera dans une proportion égale à ce qu'elle peut rapporter. »

aucune maniere de jouer pour gagner surement

Huyn, La théorie des jeux de hasard (1788)

Il ne peut exister aucune marche, aucune maniere de jouer pour gagner surement ; pas même pour ôter la moindre portion de l'avantage du banquier. À la longue tous les événements s'égalisent, & le banquier ayant plus de chances en sa faveur que le ponte doit gagner absolument. Si un joueur a eu le bonheur de faire un gros coup, il le reperdra en détail, de même que ce qu'on aura gagné avec une martingale on le reperdra en gros ; par ce que telle grande qu'elle soit, elle sautera dans une proportion égale à ce qu'elle peut rapporter.

37 Émile Borel (1871–1956)

Il y a bien là un paradoxe, et de plus il est très proche du paradoxe de Saint-Pétersbourg. Il faudra attendre Émile Borel pour s'en apercevoir, et donner une solution satisfaisante.

Nous sommes maintenant au vingtième siècle, en 1939, et Borel définit ce qu'il appelle la martingale de Saint-Pétersbourg. Martingale à cause de « jouer en martingale », et Saint-Pétersbourg pour le paradoxe.

Émile Borel (1871–1956)



38 Martingale de Saint-Pétersbourg

Voici le problème sous forme mathématique. Soit X_n la fortune à la n -ième partie, et T le nombre de parties. Disons comme Nicolas Bernoulli en 1713 qu'on joue un jeu de pile ou face équitable, et qu'on gagne au premier Face. Le nombre de parties vaut n avec probabilité $1/2^n$.

Si on joue en martingale, la fortune au temps T vaut bien 1, il n'y a pas d'erreur. Pourtant, toujours à la n -ième partie, on perd 2 puissance n , ou bien on gagne 2 puissance n , avec la même probabilité. Donc l'espérance de gain est nulle, c'est-à-dire que le jeu est équitable.

Comment se fait-il qu'un jeu équitable retourne un bénéfice certain ?

Martingale de Saint-Pétersbourg

Borel, valeur pratique et philosophie des probabilités (1939)

X_n fortune à la n -ième partie,
 T nombre de parties ($T = n$ avec probabilité $\frac{1}{2^n}$)

$$X_T \equiv 1$$

Pourtant :

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n - 2^n & \text{si perdu} \\ X_n + 2^n & \text{si gagné} \end{cases}$$

L'espérance de $X_{n+1} - X_n$ sachant X_n est nulle (jeu équitable).

39 Martingale de Saint-Petersbourg

L'explication est celle qu'avaient déjà donnée Condorcet et quelques autres : il y a un nombre maximum de parties possibles. Disons qu'il y en ait n . La fin du jeu a lieu soit au moment où on gagne, soit en n si on n'a toujours pas gagné. Ce n'est pas l'instant du gain T qu'il faut considérer, c'est le minimum de T et de n . La valeur de la fortune à cet instant est, soit 1 si on a gagné, soit une perte énorme, moins 2 puissance n moins 1, si on a perdu tout le long.

La fortune au moment où le jeu s'arrête est 1 avec probabilité $1 - 1/2^n$ ou bien $-(2^n - 1)$ avec probabilité $1/2^n$. L'espérance vaut bien zéro : le jeu était équitable au départ, et il l'est toujours.

Laissons la conclusion à Borel :

40 bien des paradoxes seraient évités

« Si la notion de *vérité statistique* devenait familière à tous ceux qui parlent ou écrivent au sujet de questions où la vérité statistique est la seule vérité, bien des sophismes et bien des paradoxes seraient évités. »

41 références

Ouaouh, c'était un peu prise de tête cette histoire, vous ne trouvez pas ? Ça vous dirait une petite partie de pile ou face pour vous détendre ?

Martingale de Saint-Petersbourg

Borel, valeur pratique et philosophie des probabilités (1939)

Soit $T_n = T \wedge n$ (n nombre maximum de parties).

$$X_{T_n} = \begin{cases} 1 & \text{si } T \leq n \\ -(2^n - 1) & \text{si } T > n \end{cases}$$

Espérance de X_{T_n} :

$$1 \times \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) - (2^n - 1) \times \left(\frac{1}{2^n}\right) = 0$$

bien des paradoxes seraient évités

Borel, Le hasard, 1914

Si la notion de *vérité statistique* devenait familière à tous ceux qui parlent ou écrivent au sujet de questions où la vérité statistique est la seule vérité, bien des sophismes et bien des paradoxes seraient évités.

références

- B. Bru, M.-F. Bru, K. L. Chung (1999) Borel et la martingale de Saint-Petersbourg, *Revue d'Histoire des Mathématiques*, 5, 181-247
- M.F. Bru, B. Bru (2018) *Les jeux de l'infini et du hasard*, Besançon : Presses universitaires de Franche-Comté
- J. Dutka (1988) On the St. Petersburg Paradox, *Archive for History of Exact Sciences*, 39, 13-39
- S. M. Stigler (1999) *Statistics on the table*, Cambridge : Harvard University Press
- I. Todhunter (1865) *A history of the mathematical theory of probability*, London : MacMillan