0 La géométrie du hasard

La théorie des probabilités a une date de naissance : 1654, et c'est un problème très particulier qui a mis le feu aux poudres.

1 Fra Luca Bartolomeo de Pacioli (1447–1517)

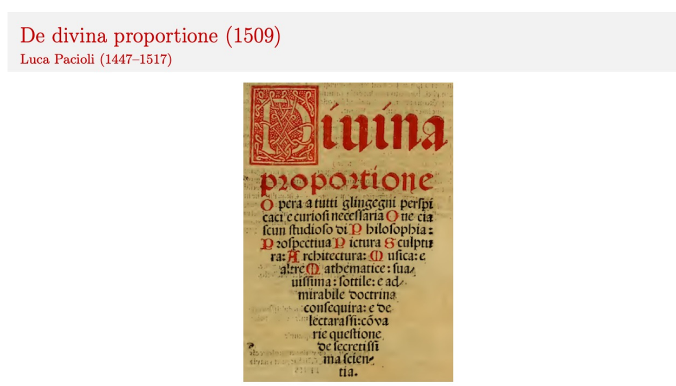
Le personnage principal de ce tableau est Luca Pacioli. C'est un moine italien de la Renaissance, qui a passé une grande partie de sa vie à enseigner les mathématiques.

Vous le voyez avec un de ses élèves et ses instruments de travail. Il tient une baguette et montre une figure géométrique sur une ardoise. Sur la tranche de cette ardoise, on lit : « Euclide ». Sur la table, on voit une équerre et un compas. Posé sur un livre, il y a un dodécaèdre, et suspendu au plafond, un autre polyèdre qui semble en verre : c'est un octaèdre tronqué.

2 De divina proportione (1509)

Son livre le plus connu est « De divina proportione », « Sur la proportion divine ». La proportion divine, c'est ce que nous appelons le nombre d'or.

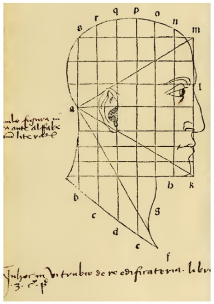
Si ce livre est aussi célèbre, c'est à cause de ses illustrations magnifiques.



3 De divina proportione (1509)

On y voit les proportions d'un visage humain,. . .

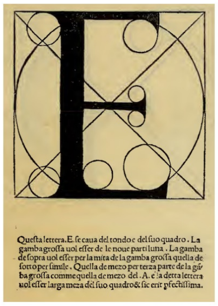
De divina proportione (1509)
Luca Pacioli (1447–1517)



4 De divina proportione (1509)

les proportions des lettres de l'alphabet, et la manière dont doivent être dessinés les caractères typographiques.

De divina proportione (1509)
Luca Pacioli (1447–1517)

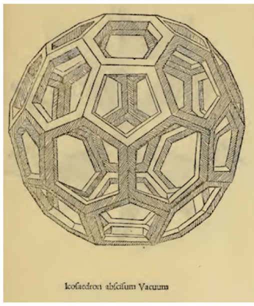


5 De divina proportione (1509)

Il y a surtout des polyèdres réguliers, dessinés en perspective. Voici un icosaèdre tronqué, formé d'hexagones réguliers autour de pentagones réguliers. Nous en voyons souvent parce que c'est, ou au moins c'était, l'agencement des pièces d'un ballon de football.

Remarquez la représentation par les arêtes en perspective creuse.

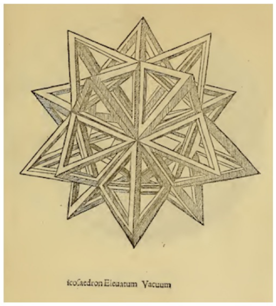
De divina proportione (1509)
Luca Pacioli (1447–1517)



6 De divina proportione (1509)

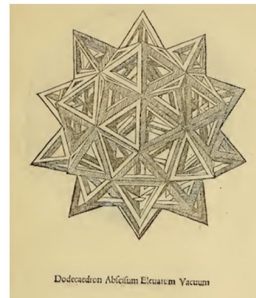
Voici encore un icosaèdre. Cette fois-ci il est stellé, c'est-à-dire qu'un tétraèdre est posé sur chacune des 20 faces triangulaires de l'icosaèdre.

De divina proportione (1509)
Luca Pacioli (1447–1517)



7 De divina proportione (1509)

De divina proportione (1509)
Luca Pacioli (1447–1517)



Encore une stellation, ici c'est un dodécaèdre avec des pyramides à base pentagonale.

Soyons honnête, ce livre est plus intéressant par ses gravures magnifiques, que par son contenu écrit. La morale de cette histoire, c'est que quand on écrit un livre, c'est bien d'avoir un copain qui s'y connaisse un peu en dessin.

8 Leonardo da Vinci (1452–1719)

Leonardo da Vinci (1452–1719)

Le copain de Pacioli, s'appelle Léonard de Vinci.

L'autre morale de l'histoire, c'est que je préfère vous montrer de jolies images plutôt que le bouquin dont j'ai à vous parler, et qui lui, est beaucoup moins spectaculaire.

9 Summa de arithmetica (1494)

C'est cette « somme d'arithmétique ». Le titre complet annonce aussi de la géométrie, des proportions, et de la proportionnalité. Ce livre est dans la droite ligne de beaucoup d'ouvrages de la Renaissance italienne qu'on appelle des « Abacos ».

Ce sont des ouvrages pédagogiques pratiques, des traités « d'arithmétique commerciale ». Au fond, on peut considérer que le fondateur du genre est le « liber abaci » de Fibonacci, au début du treizième siècle.

Ces traités contiennent des exercices particuliers, sans vraiment de méthodes générales, un peu à la mode de ce qu'on appellera plus tard les Récréations mathématiques. Voici un des problèmes de la Summa de Arithmetica de Pacioli.

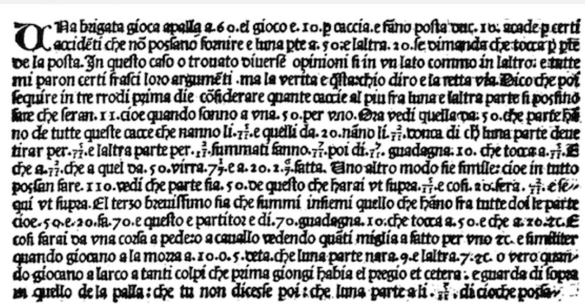
Summa de arithmetica (1494)
Luca Pacioli (1447–1517)

105

Summa de
Arithmetica geo
metria. Proportioni: et proportionalita:
Nouamente impressa In Toscolano su la riua dil Benacense et
vnico carpionista Laco: Amenissimo Sito: de li antique z
euidenti ruine di la nobil cita Benaco ditta illustra-
to: Cum numerosita de Impatori epithaphij
di antique z perfette littere sculpiti do-
tato: z cun finissimi z mirabil co-

10 Summa de arithmetica (1494)

Summa de arithmetica (1494)
Luca Pacioli (1447–1517)



Una brigata gioca apalla a.60.el gioco e.10.p caccia.e fano posta duc.10. acade p certi
accidēti che nō posano fornire e luna pte a.50.e laltra.20.se dimanda che tocca p pte
de la posta. In questo caso o trouato diuerse opinioni si in vn lato commo in laltro: e tutte
mi paron certi frasci loro argumēti .ma la verita e questa chio diro e la retta via. Dico che poi
sequire in tre modi prima die cōsiderare quante caccie al piu fra luna e laltra parte si posino
fare che seran.11.cioe quando fonno a vna.50.per vno. Ora vedi quella da.50.che parte han
no de tutte queste cacce che hanno li.$\frac{5}{11}$.e quelli da.20.hāno li.$\frac{2}{11}$.donca di ch luna parte deue
tirar per.$\frac{5}{11}$.e laltra parte per.$\frac{2}{11}$.summati fanno.$\frac{7}{11}$.poi di.$\frac{7}{11}$.guadagna.10.che tocca a.$\frac{5}{11}$.E
che a.$\frac{2}{11}$.che a quel da.50.virra.$7\frac{1}{7}$.e a.20.$2\frac{6}{7}$.fatta. Uno altro modo se simile: cioe in tutto
posian fare.110.vedi che parte sia.50.de questo che harai vt supra.$\frac{5}{11}$.e cosi.20.sera.$\frac{2}{11}$.e se
gui vt supra. El terzo breuissimo sia che summi insiemi quello che hāno fra tutte doi le parte
cioe.50.e.20.fa.70.e questo e partitor e di.70.guadagna.10.che tocca a.50.e che a.20.zc. E
cosi farai da vna corsa a pede o a cauallo vedendo quāti miglia a fatto per vno zc. e similiter
quando giocano a la mora a.10.o.5.deta.che luna parte nara.9.e laltra.7.zc. o vero quan
do giocano a larco a tanti colpi che prima giongi habia el pregio et cetera: e guarda di sopra
in quello de la palla: che tu non dicesse poi: che luna parte a li.$\frac{5}{11}$.di cio che posa

C'est écrit en vieil italien et assez serré, donc plutôt difficile à lire. Voici la traduction des premières lignes.

11 il arrive que le jeu ne puisse s'achever

« Deux camps jouent à la balle ; chaque manche est de 10 points et il faut 60 points pour gagner le jeu ; la mise totale est de 10 ducats. Il arrive que, pour quelque raison accidentelle, le jeu ne puisse s'achever. On demande ce que touche de la mise totale chacun des deux camps, lorsque l'un a 50 points et l'autre 20 points. »

Ça s'appelle le « problème des partis », au sens de répartition. Il est évident que celui qui a déjà 50 et qui n'a plus qu'une manche à remporter pour arriver à soixante, a plus de chances de gagner les 10 ducats que celui qui n'a que 20. Celui qui a déjà 50 doit donc recevoir plus de la moitié des 10 ducats. Oui mais combien exactement ? Imaginez que vous ne sachiez rien en probabilité, et que vous n'avez que votre intuition : quel va être votre raisonnement ?

Vous allez supposer, comme on le faisait déjà à l'époque, que chaque joueur a autant de chances de gagner la manche suivante que les autres.

Oui mais, s'agissant d'un jeu d'adresse, les hypothèses d'indépendance et d'équiprobabilité ne sont pas si naturelles qu'il y paraît. Demandez à qui vous voulez : si quelqu'un mène déjà 5 manches à deux, c'est qu'il est meilleur, donc il a plus de de chances de gagner la manche suivante. Bon, c'est pas grave ; promis, je ne vous embête plus avec mes états d'âme.

Le problème des partis qu'on trouve à la fin du quinzième siècle chez Luca Pacioli, on le trouve aussi, bien avant dans d'autres arithmétiques commerciales italiennes de la Renaissance. Voici quelques exemples.

il arrive que le jeu ne puisse s'achever
Luca Pacioli (1447–1517)

Deux camps jouent à la balle ; chaque manche est de 10 points et il faut 60 points pour gagner le jeu ; la mise totale est de 10 ducats. Il arrive que, pour quelque raison accidentelle, le jeu ne puisse s'achever. On demande ce que touche de la mise totale chacun des deux camps, lorsque l'un a 50 points et l'autre 20 points.

12 avant Pacioli

- « Deux personnes jouent à la longue paume de telle sorte que le premier qui a six chasses gagne le jeu. Il arrive alors par hasard quand l'un d'eux en a gagné quatre et l'autre trois que la balle éclate de telle sorte qu'ils ne peuvent finir le jeu mais tombent d'accord pour que chacun ait ce qui lui convient. »
- « Trois personnes jouent à l'arbalète 3 deniers de telle façon que celui qui le premier a 3 coups gagne et obtient 3 deniers. Et tirant à l'arbalète le premier en a fait 2, le deuxième un, le troisième n'a aucun coup. Il arrive par hasard qu'une arbalète se casse et ils sont d'accord que chacun prend ce qui lui convient. »
- « Deux hommes jouent aux échecs et font un dépôt de un ducat pour trois jeux ; il arrive que le premier gagne 2 jeux au second, il demande de ne pas jouer plus avant. »

La balle éclate, l'arbalète se casse… dites, il n'y avait pas que le résultat final qui était aléatoire à l'époque.

avant Pacioli
arithmétiques commerciales italiennes XIV^e^–XV^e^ siècles

- Deux personnes jouent à la longue paume de telle sorte que le premier qui a six chasses gagne le jeu. Il arrive alors par hasard quand l'un d'eux en a gagné quatre et l'autre trois que la balle éclate de telle sorte qu'ils ne peuvent finir le jeu mais tombent d'accord pour que chacun ait ce qui lui convient.
- Trois personnes jouent à l'arbalète 3 Deniers de telle façon que celui qui le premier a 3 coups gagne et obtient 3 Deniers. Et tirant à l'arbalète le premier en a fait 2, le deuxième un, le troisième n'a aucun coup. Il arrive par hasard qu'une arbalète se casse et ils sont d'accord que chacun prend ce qui lui convient.
- Deux hommes jouent aux échecs et font un dépôt de un ducat pour trois jeux ; il arrive que le premier gagne 2 jeux au second, il demande de ne pas jouer plus avant.

13 avant Pacioli

- « Deux hommes jouent aux échecs un ducat en quatre jeux, quand il arrive le cas que le premier gagne le premier jeu, le second, le troisième, et se retire du jeu sans jouer plus selon la volonté de son compagnon, je demande ce qu'il a gagné. »
- « Si on te disait qu'il y a trois hommes qui jouent et qu'on te dise de quel jeu il s'agit, et qu'ils jouent en trois jeux et qu'ils ont mis 2 sous entre eux trois, et que celui qui le premier qui laboure trois jeux retire les dits 2 sous, dont chacun a mis 8 deniers. Maintenant l'un a deux jeux, l'autre a un jeu et l'autre n'a aucun jeu ; on demande, si on ne joue plus, combien revient à chacun. »

Notez qu'il peut y avoir plus de deux joueurs, le nombre de parties à gagner varie, mais jamais le problème n'est posé en toute généralité : ce n'était pas dans l'esprit du temps.

avant Pacioli

arithmétiques commerciales italiennes XIV^e–XV^e siècles

- Deux hommes jouent aux échecs un ducat en quatre jeux, quand il arrive le cas que le premier gagne le premier jeu, le second, le troisième, et se retire du jeu sans jouer plus selon la volonté de son compagnon, je demande ce qu'il a gagné.
- Si on te disait qu'il y a trois hommes qui jouent et qu'on te dise de quel jeu il s'agit, et qu'ils jouent en trois jeux et qu'ils ont mis 2 sous entre eux trois, et que celui qui le premier qui laboure trois jeux retire les dits 2 sous, dont chacun a mis 8 deniers. Maintenant l'un a deux jeux, l'autre a un jeu et l'autre n'a aucun jeu ; on demande, si on ne joue plus, combien revient à chacun.

14 Blaise Pascal (1623–1662)

Alors qu'il faisait partie du folklore mathématique depuis plusieurs siècles sans que personne ne cherche à le théoriser, le problème des partis va mettre le feu aux poudres subitement, parce qu'un certain Antoine Gombaud, qui signait du nom de chevalier de Méré, homme du monde et joueur invétéré, a posé la question à Blaise Pascal.

Pendant l'été 1654, une correspondance s'engage entre Pascal et…

Blaise Pascal (1623–1662)

15 Pierre de Fermat (1607–1665)

Pierre de Fermat. Voici ce qu'écrit Pascal le 29 juillet.

Pierre de Fermat (1606–1665)

16 correspondance Pascal-Fermat

« L'impatience me prend aussi bien qu'à vous ; et quoique je sois encore au lit, je ne puis m'empêcher de vous dire que je reçus hier au soir, de la part de M. de Carcavi, votre lettre sur les partis, que j'admire si fort, que je ne puis vous le dire. Je n'ai pas le loisir de m'étendre ; mais en un mot vous avez trouvé les deux partis des dés et des parties dans la parfaite justesse : j'en suis tout satisfait ; car je ne doute plus maintenant que je ne sois dans la vérité, après la rencontre admirable où je me trouve avec vous. J'admire bien d'avantage la méthode des parties que celle des dés : j'avais vu plusieurs personnes trouver celle des dés, comme M. le chevalier de Meré, qui est celui qui m'a proposé ces questions, et aussi M. de Roberval ; mais M. de Meré n'avait jamais pu trouver la juste valeur des parties. »

En fait la solution de Pascal est plus générale que celle de Fermat. Il va la rédiger à l'automne dans son « Traité du triangle arithmétique ».

correspondance Pascal-Fermat
été 1654

L'impatience me prend aussi bien qu'à vous ; et quoique je sois encore au lit, je ne puis m'empêcher de vous dire que je reçus hier au soir, de la part de M. de Carcavi, votre lettre sur les partis, que j'admire si fort, que je ne puis vous le dire. Je n'ai pas le loisir de m'étendre ; mais en un mot vous avez trouvé les deux partis des dés et des parties dans la parfaite justesse : j'en suis tout satisfait ; car je ne doute plus maintenant que je ne sois dans la vérité, après la rencontre admirable où je me trouve avec vous. J'admire bien d'avantage la méthode des parties que celle des dés : j'avois vu plusieurs personnes trouver celle des dés, comme M. le chevalier de Meré, qui est celui qui m'a proposé ces questions, et aussi M. de Roberval ; mais M. de Meré n'avoit jamais pu trouver la juste valeur des parties [...]

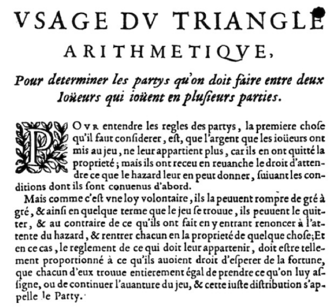
Pascal, 29 juillet 1654

17 Traité du triangle arithmétique (1665)

Ce Traité du triangle arithmétique, qui circule de manière confidentielle en 1654, ne sera officiellement publié qu'après la mort de Pascal. C'est de là que vient l'expression « Triangle de Pascal ». Le triangle des nombres de combinaisons était connu bien avant Pascal, et Pascal ne prétend pas qu'il soit nouveau.

Par contre, ce que vous voyez ici, l'usage du triangle arithmétique pour déterminer les partis qu'on doit faire entre deux joueurs qui jouent en plusieurs parties, ça c'est bien nouveau.

Traité du triangle arithmétique (1665)
Blaise Pascal (1623–1662)


VSAGE DV TRIANGLE ARITHMETIQVE,

Pour determiner les partys qu'on doit faire entre deux Ioüeurs qui ioüent en plusieurs parties.

POVR entendre les regles des partys, la premiere chose qu'il faut considerer, est, que l'argent que les ioüeurs ont mis au jeu, ne leur appartient plus, car ils en ont quitté la proprieté ; mais ils ont receu en reuanche le droit d'attendre ce que le hazard leur en peut donner, suiuant les conditions dont ils sont conuenus d'abord.

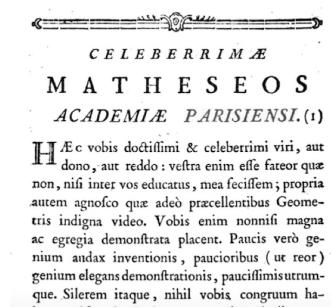
Mais comme c'est vne loy volontaire, ils la peuuent rompre de gré à gré, & ainsi en quelque terme que le jeu se trouue, ils peuuent le quitter, & au contraire de ce qu'ils ont fait en y entrant renoncer à l'attente du hazard, & rentrer chacun en la proprieté de quelque chose; Et en ce cas, le reglement de ce qui doit leur appartenir, doit estre tellement proportionné à ce qu'ils auoient droit d'esperer de la fortune, que chacun d'eux trouue entierement égal de prendre ce qu'on luy assigne, ou de continuer l'auanture du jeu, & cette iuste distribution s'appelle le Party.

18 Célèbres mathématiciens de l'Académie Parisienne (1654)

Il s'en vante d'ailleurs dans cette lettre aux « Célèbres mathématiciens de l'académie parisienne ». Il ne s'agit pas de l'Académie Royale des Sciences, qui ne sera fondée qu'en 1666. C'est simplement un groupe informel de savants qui se réunissent régulièrement, et auxquels Pascal envoie un compte-rendu de son activité pour 1654.

Dans ce compte-rendu, apparaît le paragraphe suivant.

Célèbres mathématiciens de l'Académie Parisienne (1654)
Blaise Pascal (1623–1662)


CELEBERRIMÆ MATHESEOS ACADEMIÆ PARISIENSI. (1)

HÆc vobis doctissimi & celeberrimi viri, aut dono, aut reddo : vestra enim esse fateor quæ non, nisi inter vos educatus, mea fecissem ; propria autem agnosco quæ adeò præcellentibus Geometris indigna video. Vobis enim nonnisi magna ac egregia demonstrata placent. Paucis verò genium audax inventionis, paucioribus (ut reor) genium elegans demonstrationis, paucissimis utrumque. Silerem itaque, nihil vobis congruum ha-

19 Célèbres mathématiciens de l'Académie Parisienne (1654)

« Et puis un traité tout à fait nouveau, d'une matière absolument inexplorée jusqu'ici, savoir : la répartition du hasard dans les jeux qui lui sont soumis, ce que l'on appelle en français « faire les partis des jeux » ; La fortune incertaine y est si bien maîtrisée par l'équité du calcul qu'à chacun des joueurs on assigne toujours exactement ce qui s'accorde avec la justice. Et c'est là certes ce qu'il faut d'autant plus chercher par le raisonnement, qu'il est moins possible d'être renseigné par l'expérience.

Ainsi, joignant la rigueur des démonstrations mathématiques à l'incertitude du hasard, et conciliant ces choses en apparence contraires, elle peut, tirant son nom des deux, s'arroger à bon droit ce titre stupéfiant : *La géométrie du hasard.* »

Pascal a bien compris la contradiction qu'il y a, à faire sur de l'aléatoire, des mathématiques rigoureuses et certaines. Et il en est tout fier.

Pour tout vous dire, il s'en est fallu de quelques semaines que l'histoire prenne une toute autre tournure. En novembre 1654, Pascal a eu un accident de fiacre sur le pont de Neuilly, où il s'est vu quasiment mort. Deux semaines plus tard, le 23 novembre, il connaît une illumination, une « extase mystique », qui le fait renoncer à la vie mondaine, mais aussi aux sciences, plus rien n'ayant de valeur à ses yeux que la pensée de Dieu.

Célèbres mathématiciens de l'Académie Parisienne (1654)

Blaise Pascal (1623–1662)

Et puis un traité tout à fait nouveau, d'une matière absolument inexplorée jusqu'ici, savoir : la répartition du hasard dans les jeux qui lui sont soumis, ce que l'on appelle en français « faire les partis des jeux » ; La fortune incertaine y est si bien maîtrisée par l'équité du calcul qu'à chacun des joueurs on assigne toujours exactement ce qui s'accorde avec la justice. Et c'est là certes ce qu'il faut d'autant plus chercher par le raisonnement, qu'il est moins possible d'être renseigné par l'expérience.

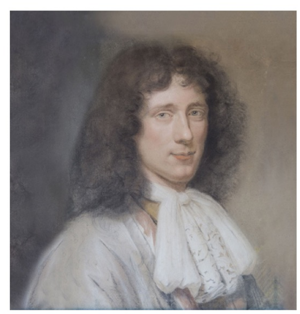
[...]

Ainsi, joignant la rigueur des démonstrations mathématiques à l'incertitude du hasard, et conciliant ces choses en apparence contraires, elle peut, tirant son nom des deux, s'arroger à bon droit ce titre stupéfiant : *La géométrie du hasard*.

20 Christiaan Huygens (1629–1695)

Mais, puisqu'il s'agit de jeu, un autre va saisir la balle au bond. Il s'appelle Christian Huygens, il est hollandais, et en 1654 il n'a que 25 ans. Lors d'une visite à Paris, il entend parler du problème des partis.

Christiaan Huygens (1629–1695)



21 De ratiociniis in ludo aleae (1657)

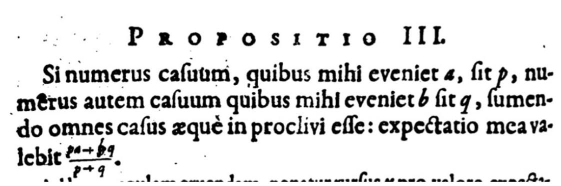
Il n'a rencontré ni Pascal, ni Fermat. Mais il réfléchit de son côté et il en déduit un petit traité, publié en 1657, « Sur les raisonnements dans les jeux de hasard ». C'est le premier ouvrage au monde portant sur les probabilités.

Les trois premières propositions définissent la notion d'espérance, que Huygens appelle « expectatio » en latin.

La proposition 3 contient le cas le plus général que pose Huygens.

De ratiociniis in ludo aleae (1657)

Christiaan Huygens (1629–1695)



PROPOSITIO III.

Si numerus caſuum, quibus mihi eveniet a, ſit p, numerus autem caſuum quibus mihi eveniet b ſit q, ſumendo omnes caſus æquè in proclivi eſſe: expectatio mea valebit $\frac{pa+bq}{p+q}$.

22 De ratiociniis in ludo aleae (1657)

« Si le nombre de chances que j'ai de gagner a est p, et le nombre de chances que j'ai de gagner b est q, en supposant que les chances soient égales : mon espérance vaudra $\frac{ap+bq}{p+q}$. »

Remarquez qu'il ne s'agit pas de probabilités entre zéro et un, mais de nombres de chances p et q, toutes ces chances étant égales. C'est ainsi que l'on écrira les probabilités, au moins jusqu'à Laplace, plus d'un siècle plus tard.

De ratiociniis in ludo aleae (1657)

Christiaan Huygens (1629–1695)

Si le nombre de chances que j'ai de gagner a est p, et le nombre de chances que j'ai de gagner b est q, en supposant que les chances soient égales : mon espérance vaudra $\frac{ap+bq}{p+q}$.

23 références

Bon allez, j'arrête de causer. Comment ça j'ai pas fini ? D'abord j'arrête quand je veux, après, y a qu'à répartir l'enjeu équitablement, on devrait y arriver.

références

- M.F. Bru, B. Bru (2018) *Les jeux de l'infini et du hasard*, Besançon : Presses universitaires de Franche-Comté
- J. Franklin (2015) *The science of conjecture, evidence and probability before Pascal*, 3rd ed., Baltimore : John Hopkins University Press
- A.-S. Godfroy-Génin (2000) Pascal : la géométrie du hasard, *Mathématiques et Sciences Humaines*, 150, 7–39
- N. Meusnier (2007) Le problème des partis bouge… de plus en plus, *J. Elect. Hist. Probab. Statist.* 3(1), 1–33
- R. Pisano (2016) Details on the mathematical interplay between Leonardo da Vinci and Luca Pacioli, *BSHM Bulletin* 31(2), 104–11