0 La probabilité des jugements

histoires de statistique

La probabilité des jugements

de Cicéron à l'affaire Dreyfus

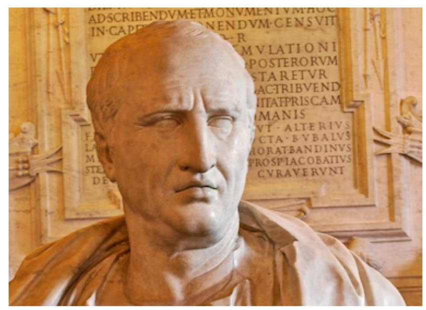
hist-math.fr Bernard Ycart

Les probabilités viennent de raisonnements sur les jeux de hasard, c'est vrai. Mais franchement s'il n'y avait pas eu d'enjeu plus important, elles ne seraient peut-être pas allé aussi loin.

Depuis le début, on avait en ligne de mire toutes les prises de décision en environnement incertain, surtout en matière politique, économique, et judiciaire : rien que ça !

1 Marcus Tullius Cicero (106–43 av. JC)

Marcus Tullius Cicero (106–43 av. JC)



Les mathématiques ont été inventées par les Grecs comme méthode pour distinguer le vrai du faux. Mais très vite, les successeurs de Platon, les néo académiciens, se sont rendu compte que le vrai et le faux absolus, dans la vie courante, c'était plutôt rare. Et qu'il serait plus utile d'avoir un outil de pensée pour l'incertain, pour le plus ou moins probable, pour distinguer le « un peu vrai » du « plutôt faux ».

On en trouve des traces dans les écrits de Cicéron. Il est difficile de distinguer chez Cicéron ce qui relève de sa propre réflexion et ce qui était déjà dans les textes grecs qu'il a traduits. Mais au fond, peu importe.

Voici la notion de probabilité telle qu'elle est exprimée dans les Académiques de Cicéron.

2 Le sage se livre à plusieurs probabilités

Le sage se livre à plusieurs probabilités

Cicéron, Académiques

Ainsi, selon lui, aucune perception n'est suivie de la certitude, tandis qu'il y en a plusieurs accompagnées de la probabilité ; car il répugnerait à la nature que rien ne fut probable [. . .] Il en résulte que le sage se servira de tout ce qui lui paraît probable, s'il n'y a rien de contraire à cette probabilité ; et telle sera la règle de notre conduite. Le sage même que vous imaginez se livre à plusieurs probabilités qu'il n'a pas bien saisies, qu'il ne regarde pas comme certaines et démontrées, mais comme vraisemblables.

« Ainsi, selon lui, aucune perception n'est suivie de la certitude, tandis qu'il y en a plusieurs accompagnées de la probabilité ; car il répugnerait à la nature que rien ne fut probable [. . .] Il en résulte que le sage se servira de tout ce qui lui paraît probable, s'il n'y a rien de contraire à cette probabilité ; et telle sera la règle de notre conduite. Le sage même que vous imaginez se livre à plusieurs probabilités qu'il n'a pas bien saisies, qu'il ne regarde pas comme certaines et démontrées, mais comme vraisemblables. »

3 Ne demandez rien de plus

« Si donc, en dissertant après tant d'autres sur les dieux et sur la naissance du monde, nous ne pouvons parvenir, malgré nos vœux, à tenir un langage toujours clair et persuasif, toujours d'accord avec lui-même, ne vous en étonnez pas ; mais contentez-vous de ces opinions, pour peu qu'elles aient de la vraisemblance à vos yeux. N'oubliez pas que moi qui parle, et vous qui jugez, nous sommes des hommes, et si je vous donne des probabilités, ne demandez rien de plus. »

Si la probabilité chez Cicéron apparaît comme une échelle plus ou moins continue entre le vrai et le faux, elle n'est pas absolument chiffrée. On n'ira pas plus loin sur le sujet, jusqu'au dix-septième siècle.

Ne demandez rien de plus
Cicéron, Académiques

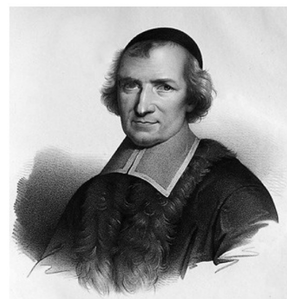
Si donc, en dissertant après tant d'autres sur les dieux et sur la naissance du monde, nous ne pouvons parvenir, malgré nos vœux, à tenir un langage toujours clair et persuasif, toujours d'accord avec lui-même, ne vous en étonnez pas ; mais contentez-vous de ces opinions, pour peu qu'elles aient de vraisemblance à vos yeux. N'oubliez pas que moi qui parle, et vous qui jugez, nous sommes des hommes, et si je vous donne des probabilités, ne demandez rien de plus.

4 Antoine Arnauld (1612–1694)

Le dix-septième siècle est le siècle du rationalisme. Avec Descartes et son discours de la méthode, on reprend et on érige en modèle, les raisonnements mathématiques des Grecs.

C'est aussi au dix-septième siècle qu'émerge la mathématisation du hasard, avec Pascal et Fermat, puis Huygens. On retrouve l'héritage de la pensée probabiliste de Cicéron, dans un ouvrage de Antoine Arnaud et …

Antoine Arnauld (1612–1694)



5 Pierre Nicole (1625–1695)

Pierre Nicole, que l'on appelle la « Logique de Port-Royal ».

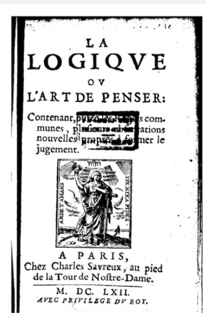
Pierre Nicole (1625–1695)

6 La logique ou l'art de penser (1662)

Le titre exact est « la logique ou l'art de penser », et la date d'édition est 1662. C'est 8 ans après Pascal et Fermat, 5 ans après Huygens, et c'est aussi la même année que les premiers raisonnements démographiques de Graunt sur les registres de mortalité de Londres ont été faits.

Qu'il y ait eu des échanges d'idées entre Pascal et les auteurs de la logique de Port-Royal, c'est pratiquement certain. Il est même possible que Pascal ait contribué à l'ouvrage. Voici ce qu'on y trouve.

La logique ou l'art de penser (1662)
Arnauld & Nicole


LA
LOGIQVE
OV
L'ART DE PENSER:
Contenant, [illegible] com-
munes, [illegible]
nouvelles [illegible]
jugement.
A PARIS,
Chez Charles Savreux, au pied
de la Tour de Noftre-Dame.
M. DC. LXII.
AVEC PRIVILEGE DV ROY.

7 embrasser le plus probable

« Car comme nous nous devons contenter d'une certitude morale dans les choses qui ne sont pas susceptibles d'une certitude métaphysique, lors aussi que nous ne pouvons pas avoir une entière certitude morale, le mieux que nous puissions faire quand nous sommes engagés à prendre parti, est d'embrasser le plus probable, puisque ce serait un renversement de la raison d'embrasser le moins probable. »

Cicéron disait pratiquement la même chose. La nouveauté est dans la tentative de quantification.

embrasser le plus probable
Arnauld & Nicole, La logique ou l'art de penser (1662)

Car comme nous nous devons contenter d'une certitude morale dans les choses qui ne sont pas susceptibles d'une certitude métaphysique, lors aussi que nous ne pouvons pas avoir une entière certitude morale, le mieux que nous puissions faire quand nous sommes engagez à prendre parti, est d'embrasser le plus probable, puisque ce seroit un renversement de la raison d'embrasser le moins probable.

8 la probabilité qu'il arrive ou n'arrive pas

« Le défaut de ces raisonnements est, que pour juger de ce que l'on doit faire pour obtenir un bien, ou éviter un mal, il ne faut pas seulement considérer le bien et le mal en soi, mais aussi la probabilité qu'il arrive ou n'arrive pas ; et regarder géométriquement la proportion que toutes ces choses ont ensemble. »

En clair, il ne suffit pas de regarder séparément le gain et la probabilité, il faut aussi pondérer le gain par la probabilité, c'est-à-dire calculer une espérance de gain. Certes il n'y a pas de chiffres, mais c'est bien la notion d'espérance définie peu avant par Huygens.

la probabilité qu'il arrive ou n'arrive pas
Arnauld & Nicole, La logique ou l'art de penser (1662)

Le defaut de ces raisonnemens est, que pour juger de ce que l'on doit faire pour obtenir un bien, ou éviter un mal, il ne faut pas seulement considérer le bien & le mal en soy, mais aussi la probabilité qu'il arrive ou n'arrive pas ; & regarder geometriquement la proportion que toutes ces choses ont ensemble.

9 Ce seroit une sotise de joüer vingt sols

« Il y a quelquefois si peu d'apparence dans le succès d'une chose, et quelque petite que soit celle qu'on hasarde pour l'obtenir, il est utile de ne la pas hasarder. Ainsi, ce serait une sottise de jouer vingt sols contre dix millions de livres, ou contre un royaume, à condition qu'on ne pourrait le gagner qu'au cas qu'un enfant arrangeant au hasard des lettres d'une imprimerie, composât tout d'un coup les vingt premiers vers de l'Éneide de Virgile. »

Attendez, ça ne vous rappelle rien cette histoire d'arranger des lettres au hasard ? C'est le paradoxe du singe dactylographe. Ce n'est pas un singe mais un enfant, ce n'est pas une machine à écrire mais des des caractères d'imprimerie que l'enfant arrange au hasard.

La première apparition du singe dactylographe date de 1913, chez Borel.

Ce seroit une sotise de joüer vingt sols
Arnauld & Nicole, La logique ou l'art de penser (1662)

Il y a quelquefois si peu d'apparence dans le succez d'une chose, & quelque petite que soit celle qu'on hazarde pour l'obtenir, il est utile de ne la pas hazarder. Ainsi, ce seroit une sotise de joüer vingt sols contre dix millions de livres, ou contre un Royaume, à condition qu'on ne pourrait le gaigner qu'au cas qu'un enfant arrangeant au hazard des lettres d'une imprimerie, composast tout d'un coup les vingt premiers vers de l'Eneide de Virgile.

10 Un million de singes

« Concevons qu'on ait dressé un million de singes à frapper au hasard sur les touches d'une machine à écrire et que, sous la surveillance de contremaîtres illettrés, ces singes dactylographes travaillent avec ardeur dix heures par jour avec un million de machines à écrire de types variés. Et au bout d'un an, ces volumes se trouveraient renfermer la copie exacte des livres de toute nature et de toutes langues conservés dans les plus riches bibliothèques du monde. »

Revenons à Arnaud et Nicole et leur logique. Un de leurs exemples de raisonnement porte sur la confiance à accorder à la date d'un document, quand elle est confirmée par deux signatures de notaires.

Un million de singes

É. Borel, Mécanique Statistique et Irréversibilité (1913)

Concevons qu'on ait dressé un million de singes à frapper au hasard sur les touches d'une machine à écrire et que, sous la surveillance de contremaîtres illettrés, ces singes dactylographes travaillent avec ardeur dix heures par jour avec un million de machines à écrire de types variés. [. . .] Et au bout d'un an, ces volumes se trouveraient renfermer la copie exacte des livres de toute nature et de toutes langues conservés dans les plus riches bibliothèques du monde.

11 la probité des notaires

« Mais si à cette circonstance commune d'être signé par deux notaires, qui m'est une raison suffisante, quand elle n'est point combattue par d'autres, d'ajouter foi à la date d'un contrat, on y a joint d'autres circonstances particulières, comme que ces notaires soient diffamés pour être sans honneur et sans conscience, et qu'ils aient pu avoir un grand interêt à cette falsification, cela ne me fera pas encore conclure que ce contrat est antidaté, mais diminuera le poids qu'aurait eu sans cela dans mon esprit la signature de deux notaires pour me faire croire qu'il ne le serait pas. »

la probité des notaires

Arnauld & Nicole, La logique ou l'art de penser (1662)

Mais si à cette circonstance commune d'estre signé par deux Notaires, qui m'est une raison suffisante, quand elle n'est point combatuë par d'autres, d'ajouter foy à la datte d'un contract, on y a joint d'autres circonstances particulières, comme que ces Notaires soient diffamez pour estre sans honneur & sans conscience, & qu'ils ayent pû avoir un grand interest à cette falsification, cela ne me fera pas encore conclure que ce contract est antidaté, mais diminuera le poids qu'auroit eu sans cela dans mon esprit la signature de deux Notaires pour me faire croire qu'il ne le seroit pas.

12 Jacob Bernoulli (1655–1705)

L'Ars Conjectandi de Jacques Bernoulli est paru en 1713, huit ans après sa mort. Il a été édité et publié par son neveu Nicolas, et le titre Ars Conjectandi est peut-être un clin d'œil à l'Ars Cogitandi, l'Art de penser d'Arnaud et Nicole. En tout cas, Nicolas Bernoulli, qui avait commencé ses études sous la direction de son oncle Jacques, avait soutenu en 1709 une thèse dont le titre est « Les usages de l'art de la conjecture en droit ».

La première partie de l'Ars Conjectandi reprend le traité de Huygens, la seconde donne des techniques et des exemples de combinatoire, la troisième détaille les calculs de probabilités pour quelques jeux de hasard.

Jacob Bernoulli (1655–1705)

13 Usage et application

Et voici le titre de la quatrième partie : « Usage et applications des doctrines précédentes en matières civiles, morales, et économiques ». Comme vous le voyez, le premier chapitre commence par des « préliminaires sur la certitude, la probabilité, la nécessité et la contingence des choses ».

Pour vous dire à quel point on ne joue plus, voici un exemple.

Usage et application

J. Bernoulli, Ars Conjectandi (1713)

210 ARTIS CONJECTANDI

ARTIS CONJECTANDI
PARS QUARTA,
tradens
Usum & applicationem præcedentis Doctrinæ in Civilibus, Moralibus & Oeconomicis.

CAPUT I.

Præliminaria quædam de Certitudine, Probabilitate, Necessitate & Contingentia Rerum.

C*Ertitudo* rei cujusvis spectatur vel *objectivè* & in se; nec aliud significat, quàm ipsam veritatem existentiæ aut futuritionis illius rei: vel *subjective* & in ordine ad nos; & consistit in mensura cognitionis nostræ circa hanc veritatem.

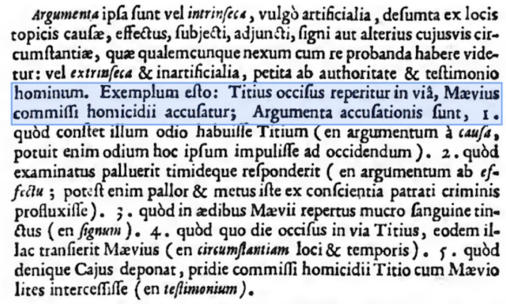
Omnia, quæ sub Sole sunt vel fiunt, præte-

14 Le meurtre de Titius

« Titius a été retrouvé mort dans la rue. Maevius est accusé d'avoir commis le meurtre. »

Le meurtre de Titius

J. Bernoulli, Ars Conjectandi (1713)



Argumenta ipſa ſunt vel *intrinſeca*, vulgò artificialia, deſumta ex locis topicis cauſæ, effectus, ſubjecti, adjuncti, ſigni aut alterius cujusvis circumſtantiæ, quæ qualemcunque nexum cum re probanda habere videtur: vel *extrinſeca* & inartificialia, petita ab authoritate & teſtimonio hominum. Exemplum eſto: Titius occiſus reperitur in viâ, Mævius commiſſi homicidii accuſatur; Argumenta accuſationis ſunt, 1. quòd conſtet illum odio habuiſſe Titium (en argumentum à *cauſa*, potuit enim odium hoc ipſum impuliſſe ad occidendum). 2. quòd examinatus palluerit timideque reſponderit (en argumentum ab *effectu*; poteſt enim pallor & metus iſte ex conſcientia patrati criminis profluxiſſe). 3. quòd in ædibus Mævii repertus mucro ſanguine tinctus (en *ſignum*). 4. quòd quo die occiſus in via Titius, eodem illac tranſierit Mævius (en *circumſtantiam* loci & temporis). 5. quòd denique Cajus deponat, pridie commiſſi homicidii Titio cum Mævio lites interceſſiſſe (en *teſtimonium*).

15 Le meurtre de Titius

Les arguments de l'accusation sont :

1. Il est connu qu'il haïssait Titius (argument de *cause*)
2. à l'interrogatoire, il a pâli et a répondu timidement (argument d'*effet*) ;
3. chez Mævius on a trouvé un poignard tâché de sang (c'est une *indication*) ;
4. le jour où Titius a été tué, Mævius marchait sur la même route (c'est une *circonstance* de lieu et de temps) ;
5. Finalement, Cajus maintient que le jour précédant sa mort, Titius s'était querellé avec Mævius (ceci est un *témoignage*).

Le problème posé est clair : comment utiliser ces éléments pour calculer la probabilité que Mævius ait commis le meurtre. La résolution est plus difficile. Parce que jusque-là on ne connaît qu'une manière de calculer, qui consiste à compter des chances considérées comme égales. Ça marche très bien avec des cartes ou des dés, mais avec un meurtre ?

Le meurtre de Titius

J. Bernoulli, Ars Conjectandi (1713)

Titius est trouvé mort dans la rue. Mævius est accusé de meurtre. Les arguments de l'accusation sont :

1. Il est connu qu'il haïssait Titius (argument de *cause*)
2. à l'interrogatoire, il a pâli et a répondu timidement (argument d'*effet*) ;
3. chez Mævius on a trouvé un poignard tâché de sang (c'est une *indication*) ;
4. le jour où Titius a été tué, Mævius marchait sur la même route (c'est une *circonstance* de lieu et de temps) ;
5. Finalement, Cajus maintient que le jour précédant sa mort, Titius s'était querellé avec Mævius (ceci est un *témoignage*).

16 Thomas Bayes (1702–1761)

Il y a bien un moyen expérimental, qui est d'approcher la probabilité d'un événement par sa fréquence d'occurrence sur un grand nombre d'expériences répétées. Ce qui justifie ce calcul, c'est la loi des grands nombres, et cette loi des grands nombres est précisément le résultat le plus marquant dans l'Ars Conjectandi de Jacques Bernoulli. Mais Bernoulli part d'une probabilité supposée connue pour donner un intervalle dans lequel doit se trouver la fréquence expérimentale.

Ce qui serait vraiment utile, ce serait le contraire. Étant donnée une fréquence expérimentale, avec quelle précision peut-on donner la probabilité de l'événement ? C'est Thomas Bayes qui résout ce problème, en quelque sorte le problème inverse de celui de Bernoulli. Comme l'Ars Conjectandi de Bernoulli, son ouvrage est posthume.

Thomas Bayes (1702–1761)

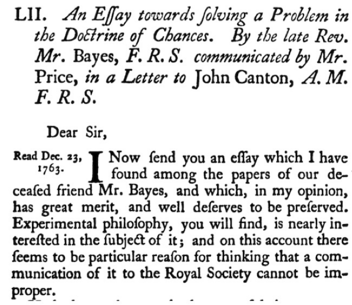
17 An Essay towards solving a Problem. . . (1763)

Il est paru deux ans après sa mort, et le titre n'est pas très explicite : « An Essay towards solving a Problem in the Doctrine of chances ». Doctrine of chances, c'est le titre du livre de de Moivre.

Même si Bayes se contente de donner ses calculs sans s'étendre sur l'application, son ami qui communique l'article,. . .

An Essay towards solving a Problem. . . (1763)

Thomas Bayes (1702–1761)



LII. *An Eſſay towards ſolving a Problem in the Doctrine of Chances. By the late Rev. Mr.* Bayes, *F. R. S. communicated by Mr.* Price, *in a Letter to* John Canton, *A. M. F. R. S.*

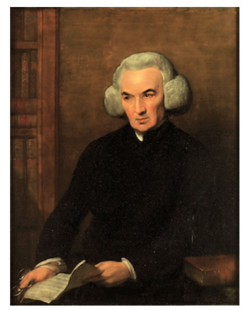
Dear Sir,

Read Dec. 23, 1763. I Now ſend you an eſſay which I have found among the papers of our deceaſed friend Mr. Bayes, and which, in my opinion, has great merit, and well deſerves to be preſerved. Experimental philoſophy, you will find, is nearly intereſted in the ſubject of it; and on this account there ſeems to be particular reaſon for thinking that a communication of it to the Royal Society cannot be improper.

18 Richard Price (1723–1791)

Richard Price, se montre parfaitement conscient de l'enjeu. Voici ce qu'il dit dans son commentaire.

Richard Price (1723–1791)



19 the strength of inductive reasoning

« Toute personne sensée reconnaîtra que le problème traité ici n'est absolument pas qu'une spéculation curieuse dans la théorie du hasard, mais qu'il doit être nécessairement résolu pour fonder tout raisonnement concernant les faits passés, et ce qui est probable dans le futur.

Il est certain que nous ne pouvons pas déterminer à quel degré des expériences répétées confirment une conclusion, sans la discussion particulière du problème sus-mentionné. Ce problème donc doit être considéré par tous ceux qui voudraient évaluer clairement la force du raisonnement analogique ou inductif. »

C'est vous dire l'enjeu : la base même de la science moderne. Le raisonnement inductif avait été formalisé au début du dix-septième siècle par Bacon. Son triomphe avait été concrétisé par les Principia de Newton. Reconnaître dans des expériences répétées la confirmation d'une nouvelle loi, c'était le meilleur moyen de créer de la science. Mais quel degré de certitude la répétition des expériences apporte-t-elle ? C'est ce que calcule le résultat de Bayes.

the strength of inductive reasoning

R. Price, commentaire (1763)

Every judicious person will be sensible that the problem now mentioned is by no means merely a curious speculation in the doctrine of chances, but necessary to be solved in order to a sure foundation for all our reasonings concerning past facts, and what is likely to be hereafter.

[. . .]

But it is certain that we cannot determine, [. . .] in what degree repeated experiments confirm a conclusion, without the particular discussion of the beforementioned problem; which, therefore, is necessary to be considered by any one who would give a clear account of the strength of *analogical* or *inductive reasoning*;

20 An Essay towards solving a Problem… (1763)

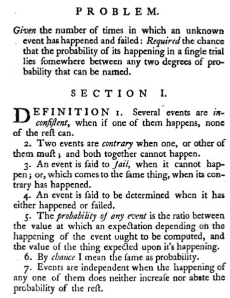
Pour décrire le problème, il est difficile de faire plus clair et plus direct que Bayes lui-même.

« Problème.

Étant donné le nombre de fois qu'un événement donné est arrivé ou a échoué, on demande les chances que la probabilité de cet événement de survenir dans une seule expérience, reste dans un intervalle donné. »

An Essay towards solving a Problem… (1763)

Thomas Bayes (1702–1761)



PROBLEM.

Given the number of times in which an unknown event has happened and failed: *Required* the chance that the probability of its happening in a ſingle trial lies ſomewhere between any two degrees of probability that can be named.

SECTION I.

DEFINITION 1. Several events are *inconſiſtent*, when if one of them happens, none of the reſt can.

2. Two events are *contrary* when one, or other of them muſt; and both together cannot happen.

3. An event is ſaid to *fail*, when it cannot happen; or, which comes to the ſame thing, when its contrary has happened.

4. An event is ſaid to be determined when it has either happened or failed.

5. The *probability of any event* is the ratio between the value at which an expectation depending on the happening of the event ought to be computed, and the value of the thing expected upon it's happening.

6. By *chance* I mean the ſame as probability.

7. Events are independent when the happening of any one of them does neither increaſe nor abate the probability of the reſt.

21 estimation bayésienne

Voici comment Bayes résout le problème, en écriture moderne. Ce sont bien des statistiques bayésiennes à notre sens.

On se donne un a priori sur la probabilité. Puisqu'on ne sait rien, c'est un nombre au hasard entre 0 et 1.

Connaissant la valeur p prise par cette probabilité tirée au hasard, la probabilité qu'il y ait k occurrences de l'événement parmi n expériences, est donnée par la loi binomiale.

Si on connaît le nombre d'occurrences k et qu'on renverse le conditionnement, on trouve la probabilité d'un intervalle a, b sous la forme que vous voyez. En termes techniques, la probabilité suit une loi Béta.

estimation bayésienne

Bayes, Essay towards solving a Problem… (1763)

- *a priori* : Soit θ de loi uniforme sur [0,1].
- vraisemblance :

$$\mathrm{Prob}(X = k \,|\, \theta = p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} .$$

- *a posteriori* :

$$\mathrm{Prob}(a < \theta \leq b \,|\, X = k) = \frac{\int_a^b \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}\, \mathrm{d}p}{\int_0^1 \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}\, \mathrm{d}p} .$$

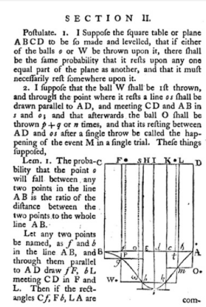
22 An Essay towards solving a Problem… (1763)

Bayes est parfaitement conscient du fait que mettre des probabilités, uniformes en l'occurrence, sur une probabilité, c'est un peu limite comme raisonnement. Puisque son but est précisément de donner une fondation solide au calcul expérimental des probabilités, il serait paradoxal d'utiliser pour cela des probabilités qui n'ont pas de fondement expérimental.

Alors ce fondement expérimental, il le fabrique, en imaginant une sorte de billard, que vous voyez représenté ici. C'est une table carrée ABCD sur laquelle on va lancer une boule. Là où s'arrête la boule on trace une ligne verticale. Il y aura désormais une gauche et une droite. Et toutes les boules suivantes tomberont à gauche ou à droite de la ligne verticale, avec une probabilité, qui aura elle-même été tirée initialement au hasard. Vous voyez la courbe qui est tracée au dessous du carré ? Eh bien c'est la vraisemblance.

An Essay towards solving a Problem… (1763)

Thomas Bayes (1702–1761)



SECTION II.

Poſtulate. 1. I Suppoſe the ſquare table or plane ABCD to be ſo made and levelled, that if either of the balls *o* or W be thrown upon it, there ſhall be the ſame probability that it reſts upon any one equal part of the plane as another, and that it muſt neceſſarily reſt ſomewhere upon it.

2. I ſuppoſe that the ball W ſhall be 1ſt thrown, and through the point where it reſts a line *os* ſhall be drawn parallel to AD, and meeting CD and AB in *s* and *o*; and that afterwards the ball O ſhall be thrown *p* + *q* or *n* times, and that its reſting between AD and *os* after a ſingle throw be called the happening of the event M in a ſingle trial. Theſe things ſuppoſed,

Lem. 1. The probability that the point *o* will fall between any two points in the line AB is the ratio of the diſtance between the two points to the whole line AB.

Let any two points be named, as *f* and *b* in the line AB, and through them parallel to AD draw *f*F, *b*L meeting CD in F and L. Then if the rectangles C*f*, F*b*, LA are com-

23 Pierre-Simon Laplace (1749–1827)

Le résultat de Bayes va être redécouvert indépendamment, devinez par qui ? Laplace bien sûr ! En 1774, il écrit un mémoire sur la probabilité des causes par les événements, où il se montre, comme Price avant lui, parfaitement conscient de l'enjeu.

Pierre-Simon Laplace (1749–1827)

24 Mémoire sur la probabilité des causes par les événements

« Je me propose de déterminer la probabilité des causes par les événements, matière neuve à bien des égards et qui mérite d'autant plus d'être cultivée que c'est principalement sous ce point de vue que la science des hasards peut être utile dans la vie civile. »

Mémoire sur la probabilité des causes par les événements
Pierre-Simon Laplace (1749–1827)

Je me propose de déterminer la probabilité des causes par les événements, matière neuve à bien des égards et qui mérite d'autant plus d'être cultivée que c'est principalement sous ce point de vue que la science des hasards peut être utile dans la vie civile.

25 Mémoire sur la probabilité des causes. . . (1774)

Le problème est exactement le même que celui de Bayes, et posé de manière tout aussi claire.

« Si une urne renferme une infinité de billets blancs et noirs dans un rapport inconnu, et que l'on en tire $p+q$ billets dont p soient blancs et q soient noirs ; on demande la probabilité qu'en tirant un nouveau billet de cette urne il sera blanc. »

Laplace fait le calcul, et comme vous le constatez en bas de l'image, il retrouve bien la même loi que Bayes.

Mais attendez un peu. Depuis tout à l'heure je vous parle de Bayes, vous avez en tête la formule de Bayes, et vous ne l'avez toujours pas reconnue ?

C'est que pour faire le calcul qu'ils proposent, aussi bien Bayes que Laplace ont besoin de renverser des conditionnements, c'est-à-dire utiliser ce que vous connaissez sous le nom de formule de Bayes. Mais l'un comme l'autre considèrent la chose comme tout à fait naturelle, et ne trouvent pas que cela mérite un nom particulier.

Ce n'est que bien des années plus tard que Laplace, dans son « Essai philosophique sur les probabilités », expliquera en termes de causes et de conséquences, ce calcul que nous connaissons sous le nom de formule de Bayes.

Mémoire sur la probabilité des causes. . . (1774)
Pierre-Simon Laplace (1749–1827)

Problème I. — *Si une urne renferme une infinité de billets blancs et noirs dans un rapport inconnu, et que l'on en tire $p+q$ billets dont p soient blancs et q soient noirs ; on demande la probabilité qu'en tirant un nouveau billet de cette urne il sera blanc.*

Solution. — Le rapport du nombre des billets blancs au nombre total des billets contenus dans l'urne peut être un quelconque des nombres fractionnaires compris depuis 0 jusqu'à 1 ; or, si l'on prend un de ces nombres x pour représenter ce rapport inconnu, la probabilité de tirer de l'urne p billets blancs et q billets noirs est, dans ce cas, $x^p(1-x)^q$; partant la probabilité que x est le vrai rapport du nombre des billets blancs au nombre total des billets est par le principe de l'article précédent égale à $\frac{x^p(1-x)^q\,dx}{\int x^p(1-x)^q\,dx}$, l'intégrale étant prise de manière qu'elle

26 Formule de Bayes, vue par Laplace

« La probabilité de l'existence d'une quelconque de ces causes, est donc une fraction dont le numérateur est la probabilité de l'événement, résultante de cette cause, et dont le dénominateur est la somme des probabilités semblables relatives à toutes les causes : si ces diverses causes considérées *a priori*, sont inégalement probables, il faut au lieu de la probabilité de l'événement, résultante de chaque cause, employer le produit de cette probabilité, par celle de la cause elle-même. C'est le principe fondamental de cette branche de l'analyse des hasards, qui consiste à remonter des événements aux causes. »

Le parti-pris de Laplace dans son essai philosophique est de tout écrire en français, sans symbole mathématique. Ce qui reconnaissons-le, rend les choses totalement incompréhensibles. Si vous suivez mot à mot ce que dit Laplace en ayant sous les yeux la formule de Bayes, alors vous verrez que, oui, c'est bien elle.

Formule de Bayes, vue par Laplace
Laplace, essai philosophique sur les probabilités (1812)

La probabilité de l'existence d'une quelconque de ces causes, est donc une fraction dont le numérateur est la probabilité de l'événement, résultante de cette cause, et dont le dénominateur est la somme des probabilités semblables relatives à toutes les causes : si ces diverses causes considérées *a priori*, sont inégalement probables, il faut au lieu de la probabilité de l'événement, résultante de chaque cause, employer le produit de cette probabilité, par celle de la cause elle-même. C'est le principe fondamental de cette branche de l'analyse des hasards, qui consiste à remonter des événemens aux causes.

27 Nicolas de Condorcet (1743–1794)

Nicolas de Condorcet est une figure charnière dans l'histoire des mathématiques. Ce n'est pas que ses contributions soient particulièrement importantes, mais plutôt parce qu'il incarne l'idéal de la philosophie des Lumières.

Voici ce qu'il dit en 1789 sur le droit de vote des femmes.

Nicolas de Condorcet (1743–1794)

28 Sur l'admission des femmes au droit de cité (1789)

« Ou aucun individu de l'espèce humaine n'a de véritables droits, ou tous ont les mêmes ; et celui qui vote contre le droit d'un autre, quels que soient sa religion, sa couleur ou son sexe, a dès lors abjuré les siens. »

Vous vous doutez bien que des prises de position aussi affirmées, ne pouvaient pas le mener bien loin. Après s'être caché pendant quelques mois sous la Terreur. Il finit par quitter sa cachette, il est arrêté, et il meurt en prison, on ne sait pas trop comment. On suppose qu'un de ses amis avait pu lui amener de quoi se suicider pour échapper au procès.

Sur l'admission des femmes au droit de cité (1789)
Nicolas de Condorcet (1743–1794)

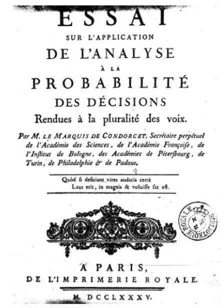
Ou aucun individu de l'espèce humaine n'a de véritables droits, ou tous ont les mêmes ; et celui qui vote contre le droit d'un autre, quelque soit sa religion, sa couleur ou son sexe, a dès-lors abjuré les siens.

29 Essai sur l'application de l'analyse... (1785)

Il avait écrit en 1785 un Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix. Au fond rien de moins qu'une théorie mathématique de la décision démocratique. C'est dans ce livre que l'on trouve ce qui s'appelle depuis le paradoxe de Condorcet : une même population peut préférer A à B, B à C et C à A.

Essai sur l'application de l'analyse... (1785)

Nicolas de Condorcet (1743–1794)



ESSAI
SUR L'APPLICATION
DE L'ANALYSE
À LA
PROBABILITÉ
DES DÉCISIONS
Rendues à la pluralité des voix.

Par M. LE MARQUIS DE CONDORCET, Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, de l'Académie Françoise, de l'Institut de Bologne, des Académies de Pétersbourg, de Turin, de Philadelphie & de Padoue.

Quod si deficiant vires audacia certè
Laus erit, in magnis & voluisse sat est.

À PARIS,
DE L'IMPRIMERIE ROYALE.
M. DCCLXXXV.

30 Siméon Denis Poisson (1781–1840)

Parmi les successeurs de Laplace et de Condorcet, Poisson écrit en 1837 ses ...

Siméon Denis Poisson (1781–1840)

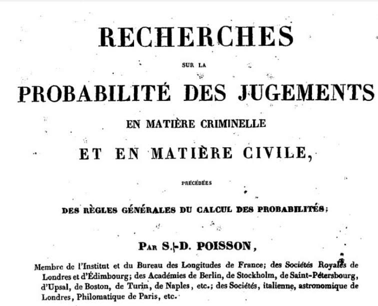
31 Recherches sur la probabilité des jugements (1837)

« Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile ». Comme vous le voyez écrit en petit, ces recherches sont précédées des règles générales du calcul des probabilités.

En fait il s'agit essentiellement d'un cours de probabilités, mais le titre, et ses quelques réflexions sur la probabilité des jugements vont lui valoir pas mal de critiques. Pourtant, on n'y trouve pas grand-chose d'autre que des réflexions de bon sens.

Recherches sur la probabilité des jugements (1837)

Siméon Denis Poisson (1781–1840)



RECHERCHES
SUR LA
PROBABILITÉ DES JUGEMENTS
EN MATIÈRE CRIMINELLE
ET EN MATIÈRE CIVILE,
PRÉCÉDÉES
DES RÈGLES GÉNÉRALES DU CALCUL DES PROBABILITÉS;

PAR S.-D. POISSON,

Membre de l'Institut et du Bureau des Longitudes de France; des Sociétés Royales de Londres et d'Édimbourg; des Académies de Berlin, de Stockholm, de Saint-Pétersbourg, d'Upsal, de Boston, de Turin, de Naples, etc.; des Sociétés, italienne, astronomique de Londres, Philomatique de Paris, etc.

32 ne point admettre la formule

« La formule de Laplace, pour exprimer la probabilité de l'erreur d'un jugement, ne dépend que de la majorité à laquelle il a été prononcé, et du nombre total des juges ; elle ne renferme rien qui soit relatif à leurs connaissances plus ou moins étendues dans la matière qui leur a été soumise. Il s'ensuivrait donc que la probabilité de l'erreur d'une décision rendue par un jury, à la majorité de sept voix contre cinq, par exemple, serait la même, quelle que fût la classe de personnes où les douze jurés auraient été choisis ; conséquence qui me paraîtrait déjà suffisante pour qu'on fût fondé à ne point admettre la formule dont elle est déduite. »

ne point admettre la formule

Poisson, Recherches sur la probabilité des jugements (1837)

La formule de Laplace, pour exprimer la probabilité de l'erreur d'un jugement, ne dépend que de la majorité à laquelle il a été prononcé, et du nombre total des juges ; elle ne renferme rien qui soit relatif à leurs connaissances plus ou moins étendues dans la matière qui leur a été soumise. Il s'ensuivrait donc que la probabilité de l'erreur d'une décision rendue par un jury, à la majorité de sept voix contre cinq, par exemple, serait la même, quelle que fût la classe de personnes où les douze jurés auraient été choisis ; conséquence qui me paraîtrait déjà suffisante pour qu'on fût fondé à ne point admettre la formule dont elle est déduite.

Poisson fait d'autres propositions de calculs, mais le fond de l'affaire est que parmi les scientifiques, la plupart pensent que les applications des probabilités aux jugements, en particulier dans les procès criminels, ne sont tout simplement pas fondées.

33 Alfred Dreyfus (1859–1935)

Alfred Dreyfus (1859–1935)

Affaire Dreyfus (1894–1906)

Une occasion particulière va étaler au grand jour l'échec des probabilités en matière juridique, l'Affaire Dreyfus.

34 Zola, J'accuse (1898)

Zola, J'accuse (1898)

Affaire Dreyfus (1894–1906)

L'AURORE

J'Accuse...!

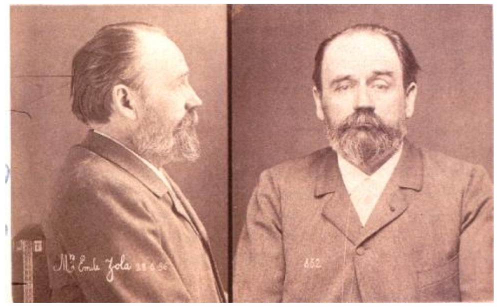
LETTRE AU PRÉSIDENT DE LA RÉPUBLIQUE

Par ÉMILE ZOLA

Vous avez certainement en tête le « J'accuse » de Zola, qui date de 1898, soit quatre ans après la première condamnation de Dreyfus.

35 procès Zola (1898)

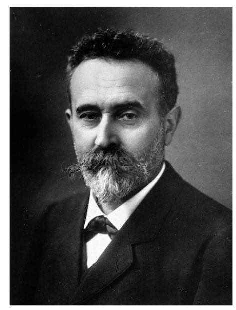
procès Zola (1898)
Affaire Dreyfus (1894–1906)



Zola lui-même est passé en procès après son « J'accuse », procès pour diffamation. Ceci est son cliché anthropométrique avant le procès. L'ironie de ce cliché est que l'invention de l'anthropométrie policière est due à . . .

36 Alphonse Bertillon (1853–1914)

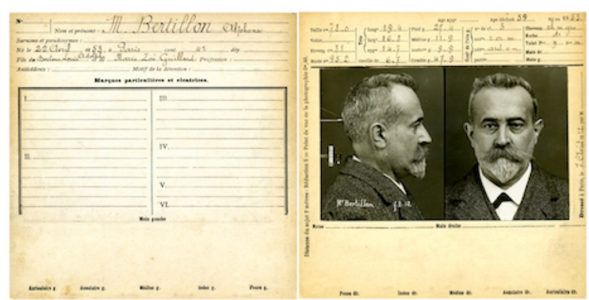
Alphonse Bertillon (1853–1914)



Alphonse Bertillon. Ce Bertillon, considéré comme spécialiste de police scientifique depuis son invention, va devenir l'accusateur scientifique principal de Dreyfus.

37 Fiche anthropométrique

Fiche anthropométrique
Alphonse Bertillon (1853–1914)



On le voit ici sur sa propre fiche anthropométrique.

38 procès de Rennes (1899)

procès de Rennes (1899)
Affaire Dreyfus (1894–1906)

Suite au « J'accuse » de Zola, le véritable coupable avait été démasqué, les faussaires qui avaient fait condamner Dreyfus au premier procès avaient été découverts. Quand un nouveau procès a lieu à Rennes en 1899, tout le monde s'attend à ce que Dreyfus soit acquitté.

C'était oublier l'entêtement de Bertillon. Vous voyez sur cette carte postale le Transport du Dossier Bertillon. Une masse de documents qu'il va asséner aux jurés pendant deux jours, plus de 10 heures de déposition, pendant lesquelles il « démontre » (entre guillemets), « scientifiquement » (reguillemets), la culpabilité de Dreyfus.

Certains journaux s'indignent.

39 Le Siècle, 25 août 1899

« Le génial fonctionnaire de police est venu pendant plus de trois heures distiller cruellement l'ennui pour tous ceux qui l'écoutaient et faire constater, une fois de plus, les ressources de sa fantaisie. Mais la fantaisie a ses bornes ; quand elle ne fait que dépasser celles du ridicule ou du grotesque, elle peut, à la rigueur, trouver excuse dans l'hilarité qu'elle produit, mais, quand en même temps elle est odieuse, il ne suffit plus de rire et de se moquer, de traiter le fantaisiste de fou, il faut aussi prendre des mesures contre ce fou qui peut être dangereux et le mettre dans l'impossibilité de nuire. La fantaisie de M. Alphonse Bertillon, si l'on peut appeler ainsi la démonstration folle de ce singulier expert, n'est pas seulement grotesque et ridicule, elle est en même temps odieuse. »

Grotesque, ridicule, odieuse, oui bien sûr c'est vrai. Mais ce n'est pas avec des invectives qu'on gagne un procès. Et malheureusement les conclusions de Bertillon sont sans appel.

Le Siècle, 25 août 1899

Affaire Dreyfus (1894–1906)

Le génial fonctionnaire de police est venu pendant plus de trois heures distiller cruellement l'ennui pour tous ceux qui l'écoutaient et faire constater, une fois de plus, les ressources de sa fantaisie. Mais la fantaisie a ses bornes ; quand elle ne fait que dépasser celles du ridicule ou du grotesque, elle peut, à la rigueur, trouver excuse dans l'hilarité qu'elle produit, mais, quand en même temps elle est odieuse, il ne suffit plus de rire et de se moquer, de traiter le fantaisiste de fou, il faut aussi prendre des mesures contre ce fou qui peut être dangereux et le mettre dans l'impossibilité de nuire. La fantaisie de M. Alphonse Bertillon, si l'on peut appeler ainsi la démonstration folle de ce singulier expert, n'est pas seulement grotesque et ridicule, elle est en même temps odieuse.

40 Conclusion de Bertillon

« c'est fort d'une certitude non seulement théorique mais matérielle, qu'avec le sentiment de la responsabilité qu'entraîne une conviction aussi absolue, en mon âme et conscience j'affirme aujourd'hui comme en 1894, sous la foi du serment, que le bordereau est l'œuvre de l'accusé. »

Et l'accusé est condamné à nouveau. Sur des faits matériels, positifs et scientifiques comme on disait en cette époque de scientisme triomphant. Le seul moyen de répondre à Bertillon, c'était de se placer sur son propre terrain.

Conclusion de Bertillon

Procès de Rennes, août 1899

c'est fort d'une certitude non seulement théorique mais matérielle, qu'avec le sentiment de la responsabilité qu'entraîne une conviction aussi absolue, en mon âme et conscience j'affirme aujourd'hui comme en 1894, sous la foi du serment, que le bordereau est l'œuvre de l'accusé.

41 Rapport Darboux, Appell, Poincaré (1904)

On va donc faire appel à une commission d'experts scientifiques, pour évaluer l'expertise scientifique de Bertillon. Pas n'importe qui : les trois sont des mathématiciens reconnus. Darboux est secrétaire perpétuel de l'Académie des sciences, Appell est le doyen de la faculté des sciences de Paris.

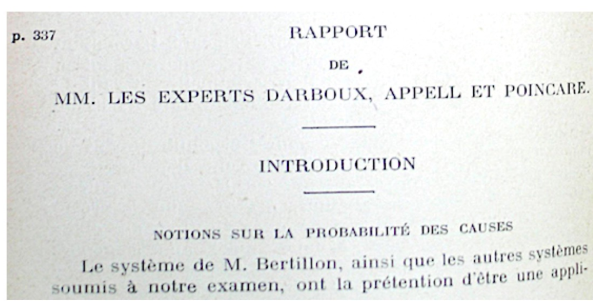
Voici ce qu'il dit dans ses mémoires.

« Je ne reviens pas ici sur notre rapport, qui a été publié et dont les conclusions ont été rédigées par Poincaré. Je dirai seulement que Bertillon nous fit l'effet d'un illuminé, que l'écriture d'Esterhazy se reconnaissait, du premier coup d'œil, identique à celle du bordereau, que le calcul des probabilités ne permettait aucune conclusion, enfin que les encoches furent expliquées de la façon la plus simple. »

Vous le voyez, le rapport commence par des « notions sur la probabilité des causes », parce que le système de Bertillon a la prétention d'être une application de la théorie des probabilités.

Rapport Darboux, Appell, Poincaré (1904)

Affaire Dreyfus (1894–1906)



p. 337

RAPPORT

DE

MM. LES EXPERTS DARBOUX, APPELL ET POINCARÉ.

INTRODUCTION

NOTIONS SUR LA PROBABILITÉ DES CAUSES

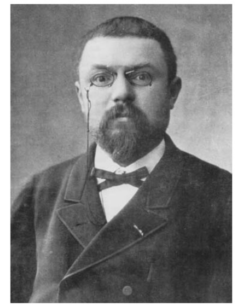
Le système de M. Bertillon, ainsi que les autres systèmes soumis à notre examen, ont la prétention d'être une appli-

42 Henri Poincaré (1854–1912)

Comme le dit Appell, le rapport est rédigé par Poincaré. Poincaré est considéré comme le meilleur mathématicien français du moment. Il est non seulement président de la société mathématique mais aussi de la société de physique. Il est venu aux probabilités par la physique, et même si les probabilités sont marginales dans son œuvre, il en est l'un des meilleurs spécialistes.

Il ne cache pas ce qu'il pense de la probabilité des jugements.

Henri Poincaré (1854–1912)



43 le scandale des mathématiques

« Aussi Auguste Comte a-t-il dit avec juste raison que l'application du calcul des probabilités aux sciences morales était le scandale des mathématiques.
Vouloir éliminer les éléments moraux et y substituer des chiffres est aussi dangereux que vain.
En un mot, le calcul des probabilités n'est pas, comme on paraît le croire, une science merveilleuse qui dispense le savant d'avoir du bon sens.
C'est pourquoi *il faudrait s'abstenir absolument d'appliquer le calcul aux choses morales* ; si nous le faisons ici, c'est que nous y sommes contraints. »

Quant à l'appréciation des théories de Bertillon, les conclusions sont claires.

le scandale des mathématiques
Poincaré, rapport sur l'expertise Bertillon (1904)

Aussi Auguste Comte a-t-il dit avec juste raison que l'application du calcul des probabilités aux sciences morales était le scandale des mathématiques.
Vouloir éliminer les éléments moraux et y substituer des chiffres est aussi dangereux que vain.
En un mot, le calcul des probabilités n'est pas, comme on paraît le croire, une science merveilleuse qui dispense le savant d'avoir du bon sens.
C'est pourquoi *il faudrait s'abstenir absolument d'appliquer le calcul aux choses morales* ; si nous le faisons ici, c'est que nous y sommes contraints.

44 le goût de l'absurde

« En résumé, les encoches du bordereau et de la lettre des obligations ont été faites toutes deux après la saisie de ces pièces ; les théories développées à ce sujet par M. Bertillon et ses disciples non seulement n'ont aucun fondement, mais elles montrent, sur un exemple qui peut être compris de tout le monde, le parti pris, le manque absolu de critique et d'esprit scientifique, le goût de l'absurde que nous avons constatés dans toutes les parties du système soumis à notre examen. »

le goût de l'absurde
Poincaré, rapport sur l'expertise Bertillon (1904)

En résumé, les encoches du bordereau et de la lettre des obligations ont été faites toutes deux après la saisie de ces pièces ; les théories développées à ce sujet par M. Bertillon et ses disciples non seulement n'ont aucun fondement, mais elles montrent, sur un exemple qui peut être compris de tout le monde, le parti pris, le manque absolu de critique et d'esprit scientifique, le goût de l'absurde que nous avons constatés dans toutes les parties du système soumis à notre examen.

45 les auteurs ont raisonné mal sur des documents faux

« En résumé, tous ces systèmes sont absolument dépourvus de toute valeur scientifique :
Primo : Parce que l'application du calcul des probabilités à ces matières n'est pas légitime ;
Secundo : Parce que la reconstitution du bordereau est fausse ;
Tercio : Parce que les règles du calcul des probabilités n'ont pas été correctement appliquées ;

En un mot, parce que les auteurs ont raisonné mal sur des documents faux. »

Dreyfus a été réhabilité en 1906, deux ans plus tard. Plus d'un siècle après, le débat sur la validité juridique des probabilités est toujours ouvert.

les auteurs ont raisonné mal sur des documents faux
Poincaré, rapport sur les expertises des procès Dreyfus (1904)

En résumé, tous ces systèmes sont absolument dépourvus de toute valeur scientifique :
1º Parce que l'application du calcul des probabilités à ces matières n'est pas légitime ;
2º Parce que la reconstitution du bordereau est fausse ;
3º Parce que les règles du calcul des probabilités n'ont pas été correctement appliquées ;

En un mot, parce que les auteurs ont raisonné mal sur des documents faux.

46 références

Bon c'est le dernier slide. Voyons, quelles sont les chances que je vous sorte une vanne en rapport avec cette histoire ?

références

- D. R. Bellhouse (2004) The reverend Thomas Bayes, FRS : a biography to celebrate the tercentenary of his birth, *Statistical Science*, 19(1) 3–43
- E. Coumet (1970) La théorie du hasard est-elle née par hasard ? *Annales. Économies, Sociétés, Civilisations*, 25(3) 574–598
- D. A. Gillies (1987) Was Bayes a Bayesian ? *Historia Mathematica*, 14, 325–346
- L. Mazliak (2012) Poincaré et le hasard, *Séminaire Poincaré XVI* 135–171
- L. Rollet (2013) Des mathématiciens dans l'affaire Dreyfus ? *Images des Mathématiques*, CNRS