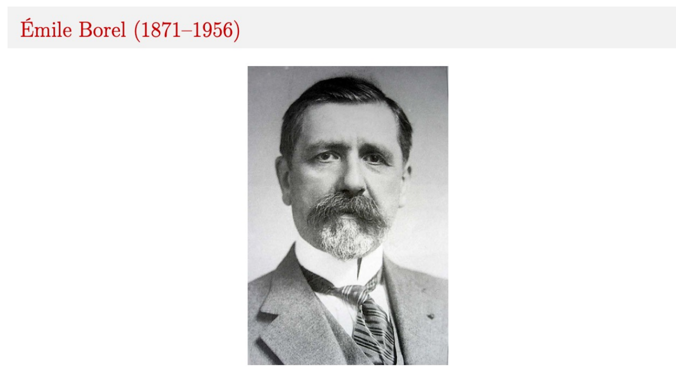
0 Loi de Gauss

Vous savez bien ce qu'est une loi de Gauss. C'est une loi de probabilité dont la densité est la fameuse courbe en cloche. Cela n'a pas toujours été le cas. Il fut un temps où la loi de Gauss était une véritable loi de la nature.

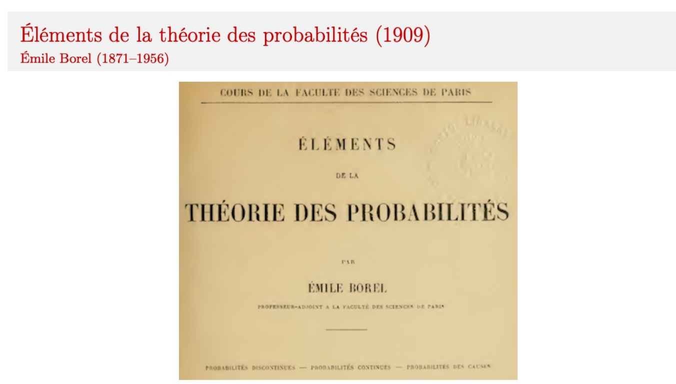
1 Émile Borel (1871–1956)

Ce temps n'est pas si éloigné : c'était le temps d'Émile Borel, il y a un siècle seulement.



2 Éléments de la théorie des probabilités (1909)

Voici comment Borel, dans les « Éléments de la théorie des probabilités », enseignait la loi de Gauss.



3 Énoncé de la loi de Gauss

« La loi de Gauss consiste en ce que la probabilité pour que cette erreur soit comprise entre x et $x + \mathrm{d}x$ est égale à :

$$\frac{k}{\sqrt{\pi}} e^{-k^2x^2}\,\mathrm{d}x\ ,$$

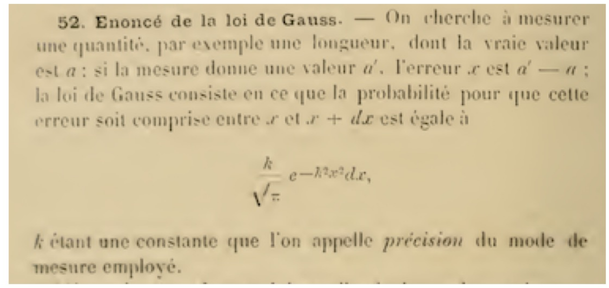
k étant une constante que l'on appelle *précision* du mode de mesure employé. »

Je trouve assez cocasse que ce soit le Borel des boréliens qui parle de la probabilité d'une erreur comprise entre x et $x+\mathrm{d}x$.

Une autre remarque est que la précision k de Borel est l'inverse de notre écart-type multiplié par racine de deux. Enfin à ce stade, on ne voit pas bien à quel type d'erreur cette loi de Gauss s'applique. Mais Borel explique.

Énoncé de la loi de Gauss

Borel, Éléments de la théorie des probabilités (1909)



52. Enoncé de la loi de Gauss. — On cherche à mesurer une quantité, par exemple une longueur, dont la vraie valeur est a ; si la mesure donne une valeur a', l'erreur x est $a' - a$; la loi de Gauss consiste en ce que la probabilité pour que cette erreur soit comprise entre x et $x + dx$ est égale à

$$\frac{k}{\sqrt{\pi}} e^{-k^2x^2}dx,$$

k étant une constante que l'on appelle *précision* du mode de mesure employé.

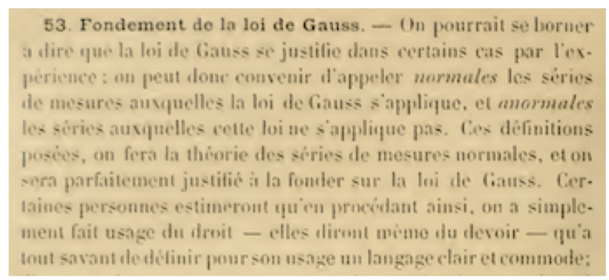
4 Fondement de la loi de Gauss

« La loi de Gauss se justifie dans certains cas par l'expérience ; on peut donc convenir d'appeler *normales* les séries de mesures auxquelles la loi de Gauss s'applique, et *anormales* celles auxquelles elles ne s'applique pas. Ces définitions posées, on fera la théorie des séries de mesures normales, et on sera parfaitement justifié à la fonder sur la loi de Gauss. Certaines personnes estimeront qu'en procédant ainsi, on a simplement fait usage du droit – elles diront même du devoir – qu'a tout savant de définir pour son usage un langage clair et commode. »

D'autres personnes moins bien intentionnées remarqueront sournoisement qu'en définissant la loi de Gauss comme la loi qui s'applique aux séries de mesure auxquelles la loi de Gauss s'applique, on ne fait pas beaucoup avancer le Schmilblick. Ce serait faire injure à Borel. Il est conscient d'un problème de fond. Mettons que la loi de Gauss s'applique à une série de mesures. Si on transforme les mesures, par une fonction donnée, la loi de Gauss n'est plus vraie, sauf si la transformation est affine. . . ou si les erreurs sont petites.

Fondement de la loi de Gauss

Borel, Éléments de la théorie des probabilités (1909)



53. Fondement de la loi de Gauss. — On pourrait se borner à dire que la loi de Gauss se justifie dans certains cas par l'expérience ; on peut donc convenir d'appeler *normales* les séries de mesures auxquelles la loi de Gauss s'applique, et *anormales* les séries auxquelles cette loi ne s'applique pas. Ces définitions posées, on fera la théorie des séries de mesures normales, et on sera parfaitement justifié à la fonder sur la loi de Gauss. Certaines personnes estimeront qu'en procédant ainsi, on a simplement fait usage du droit — elles diront même du devoir — qu'a tout savant de définir pour son usage un langage clair et commode;

5 invariances

« Observons enfin que si l'on remplace x par une fonction de x la forme analytique de la loi se trouve modifiée ; [. . .] D'ailleurs, lorsque les erreurs sont petites, la formule de Gauss conserve sa forme *à la première approximation*.

On peut trouver une confirmation *a posteriori* de la loi de Gauss dans une propriété d'invariance que l'on peut énoncer comme suit : *Lorsque les erreurs commises sur les mesures de plusieurs quantités satisfont à la loi de Gauss, il en est de même de l'erreur commise sur la somme, si l'on prend pour valeur de la somme la somme des valeurs des mesures.* »

Ah ben en voilà une justification : c'est l'invariance par somme de variables indépendantes. Même si la notion d'indépendance reste implicite.

invariances

Borel, Éléments de la théorie des probabilités (1909)

Observons enfin que si l'on remplace x par une fonction de x la forme analytique de la loi se trouve modifiée ; [. . .] D'ailleurs, lorsque les erreurs sont petites, la formule de Gauss conserve sa forme *à la première approximation*.

[. . .]

On peut trouver une confirmation *a posteriori* de la loi de Gauss dans une propriété d'invariance que l'on peut énoncer comme suit : *Lorsque les erreurs commises sur les mesures de plusieurs quantités satisfont à la loi de Gauss, il en est de même de l'erreur commise sur la somme, si l'on prend pour valeur de la somme la somme des valeurs des mesures.*

6 nombreuses erreurs possibles

nombreuses erreurs possibles
Borel, Éléments de la théorie des probabilités (1909)

« En résumé, la loi de Gauss se trouve justifiée par le fait que les erreurs possibles étant nombreuses, leurs combinaisons sont soumises aux lois que nous avons obtenues par l'analyse combinatoire dans le cas où on étudie un grand nombre d'épreuves répétées. »

En résumé, la loi de Gauss se trouve justifiée par le fait que les erreurs possibles étant nombreuses, leurs combinaisons sont soumises aux lois que nous avons obtenues par l'analyse combinatoire dans le cas où on étudie un grand nombre d'épreuves répétées.

Ah voici une nouvelle justification : le théorème central limite, dont Borel, par l'analyse combinatoire précise-t-il, n'a donné qu'un cas particulier.

7 la pureté de la race

« *le caractère biométrique intrinsèque des séries normales est la pureté de la race*. Je laisse de côté les commentaires nombreux dont aurait besoin un énoncé général : bien des idées auraient à être précisées, ce qui est l'affaire du biologiste encore plus que du mathématicien ; néanmoins, telle qu'elle est, cette théorie a prouvé sa valeur scientifique en se rendant utile par des applications pratiques. »

la pureté de la race
Borel, Éléments de la théorie des probabilités (1909)

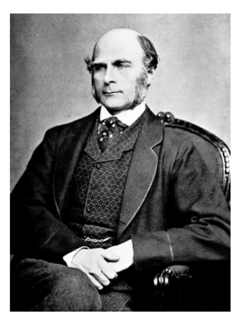
le caractère biométrique intrinsèque des séries normales est la pureté de la race. Je laisse de côté les commentaires nombreux dont aurait besoin un énoncé général : bien des idées auraient à être précisées, ce qui est l'affaire du biologiste encore plus que du mathématicien ; néanmoins, telle qu'elle est, cette théorie a prouvé sa valeur scientifique en se rendant utile par des applications pratiques.

Borel a raison, des commentaires nombreux et des idées précises ne sont pas de reste. Jamais on n'oserait écrire de nos jours un tel énoncé. La formulation choquante cache en fait une remarque toute simple. Si on mélange deux séries de mesures normales, la série concaténée ne peut pas être normale en général : si les deux moyennes sont assez éloignées, la distribution peut même être bimodale. D'ailleurs les exemples que prend Borel sont des espèces de céréales, et pas des races humaines.

C'est égal, on aurait quand même aimé qu'il utilise un autre vocabulaire. D'autant que Borel montre bien qu'il a lu et assimilé les travaux de l'école anglaise, en particulier de Galton, et que chez Galton, la pureté de la race aurait eu une toute autre signification.

8 Francis Galton (1822–1911)

Francis Galton (1822–1911)



Francis Galton est non seulement le père fondateur de la biométrie, mais c'est aussi le père fondateur de l'eugénisme, et dans sa pensée les deux sont intimement liés.

9 delicately handled by the higher methods

« Certains haïssent le mot même de statistiques, mais je les trouve pleines de beauté et d'intérêt. Quand on ne les brutalise pas, qu'on les manipule à l'aide des méthodes les plus élevées, et qu'on les interprète avec prudence, leur puissance pour traiter des phénomènes compliqués est extraordinaire.

Elles sont le seul outil par lequel une ouverture peut être taillée dans le buisson de difficultés formidable qui barre le passage de ceux qui étudient la science de l'homme. »

Galton a une admiration sans borne pour la loi de Gauss, qu'il appelle « loi de fréquence des erreurs ».

delicately handled by the higher methods
Galton, Natural Inheritance (1889)

Some people hate the very name of statistics, but I find them full of beauty and interest. Whenever they are not brutalised, but delicately handled by the higher methods, and are warily interpreted, their power of dealing with complicated phenomena is extraordinary. They are the only tool by which an opening can be cut through the formidable thicket of difficulties that bars the path of those who pursue the Science of man.

10 the supreme law of Unreason

« Je ne connais pratiquement rien de plus apte à impressionner l'imagination que la forme merveilleuse d'ordre cosmique qu'exprime la « loi de fréquence des erreurs ». Si les Grecs l'avaient connue, ils en auraient fait une déesse. Elle règne avec sérénité et humilité au milieu de la plus grande confusion. Plus nombreuse est la foule, plus grande est l'anarchie apparente, plus parfaite est son influence. C'est la loi suprême de la déraison. »

the supreme law of Unreason
Galton, Natural Inheritance (1889)

I know of scarcely anything so apt to impress the imagination as the wonderful form of cosmic order expressed by the "Law of Frequency of Error." The law would have been personified by the Greek and deified, if they had known of it. It reigns with serenity and in complete self-effacement amidst the wildest confusion. The huger the mob, and the greater the apparent anarchy, the more perfect is its sway. It is the supreme law of Unreason.

11 The normal law of errors

Il n'y a pas eu que Galton pour y croire. William Youden est un chimiste du vingtième siècle, qui a beaucoup milité pour l'application de la statistique dans les sciences expérimentales.

Il s'est fait faire une carte de visite avec un calligramme en forme de courbe en cloche. Il dit :

« La loi normale de l'erreur se dresse dans l'expérience de l'humanité comme l'une des généralisations les plus larges de la philosophie naturelle. »

The normal law of errors
William John Youden (1900–1971)

THE
NORMAL
LAW OF ERROR
STANDS OUT IN THE
EXPERIENCE OF MANKIND
AS ONE OF THE BROADEST
GENERALIZATIONS OF NATURAL
PHILOSOPHY ● IT SERVES AS THE
GUIDING INSTRUMENT IN RESEARCHES
IN THE PHYSICAL AND SOCIAL SCIENCES AND
IN MEDICINE AGRICULTURE AND ENGINEERING ●
IT IS AN INDISPENSABLE TOOL FOR THE ANALYSIS AND THE
INTERPRETATION OF THE BASIC DATA OBTAINED BY OBSERVATION AND EXPERIMENT

12 Karl Friedrich Gauss (1777–1855)

Vous l'avez remarqué, Galton et Youden parlent de loi normale des erreurs, mais ne font pas référence à Gauss. Alors qu'est ce que Gauss vient faire là-dedans ? Vous connaissez certainement ce portrait. Gauss n'a pas toujours eu 63 ans.

Karl Friedrich Gauss (1777–1855)
à 63 ans

13 Karl Friedrich Gauss (1777–1855)

Karl Friedrich Gauss (1777–1855)
à 51 ans

Il a eu été plus jeune.

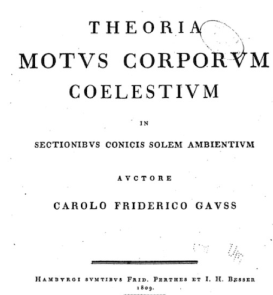
14 Karl Friedrich Gauss (1777–1855)

Karl Friedrich Gauss (1777–1855)
à 26 ans

Et même beaucoup plus jeune. C'est de cette époque-là dont nous parlons.

15 Theoria motus corporum coelestium (1809)

Theoria motus corporum coelestium (1809)
Karl Friedrich Gauss (1777–1855)



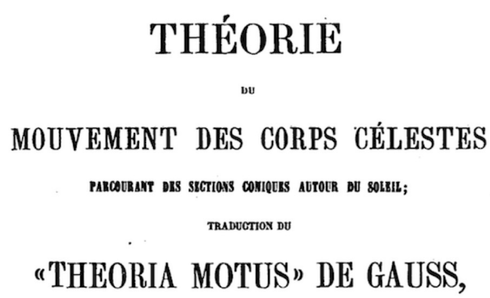
THEORIA
MOTVS CORPORVM
COELESTIVM
IN
SECTIONIBVS CONICIS SOLEM AMBIENTIVM
AVCTORE
CAROLO FRIDERICO GAVSS

HAMBVRGI SVMTIBVS FRID. PERTHES ET I. H. BESSER
1809.

En 1809, à 32 ans, il publie cette Théorie du Mouvement des Corps Célestes. Voyez, quand on s'appelle Gauss et même si on est très jeune, on peut se permettre d'écrire ses mathématiques en latin...

16 Theoria motus corporum coelestium (1809)

Theoria motus corporum coelestium (1809)
Karl Friedrich Gauss (1777–1855)



THÉORIE
DU
MOUVEMENT DES CORPS CÉLESTES
PARCOURANT DES SECTIONS CONIQUES AUTOUR DU SOLEIL;
TRADUCTION DU
«THEORIA MOTUS» DE GAUSS,

Il y aura toujours quelqu'un pour les traduire.

Voici ce qu'explique Gauss sur la distribution des erreurs.

17 la valeur la plus probable

« On regarde en effet comme un axiome, l'hypothèse que si une quantité a été déterminée par plusieurs observations immédiates, effectuées dans les mêmes circonstances et avec un même soin, la moyenne arithmétique entre toutes les valeurs observées donne la valeur la plus probable de cette quantité, sinon en toute rigueur, au moins cependant d'une manière très approchée, de telle sorte que le plus sûr est toujours de s'y tenir. »

L'idée de Gauss est la suivante, si on la traduit en termes modernes. On veut définir une loi de probabilité pour les erreurs de mesure. Supposons que l'on en ait un échantillon. La probabilité de cette observation s'écrit comme le produit de la fonction cherchée, évaluée en chacune des observations. C'est ce que nous appelons maintenant la vraisemblance de l'échantillon. Gauss dit : la moyenne empirique des observations doit maximiser la vraisemblance, ou plus simplement son logarithme.

la valeur la plus probable
Gauss, Theoria motus corporum (1809)

On regarde en effet comme un axiome, l'hypothèse que si une quantité a été déterminée par plusieurs observations immédiates, effectuées dans les mêmes circonstances et avec un même soin, la moyenne arithmétique entre toutes les valeurs observées donne la valeur la plus probable de cette quantité, sinon en toute rigueur, au moins cependant d'une manière très-approchée, de telle sorte que le plus sûr est toujours de s'y tenir.

18 en désignant par e la base des logarithmes hyperboliques

Qui dit maximum dit multiplicateurs de Lagrange. Gauss raisonne par condition nécessaire, il fait son calcul, et il arrive au résultat.

« De là nous avons $\log(\varphi\Delta) = \frac{1}{2}k\Delta^2+$ constante. »

On prend l'exponentielle, k doit être négatif, et hop, le tour est joué. En plus, par un élégant théorème découvert par l'illustre Laplace, on connaît la constante qui s'exprime en fonction de h et racine de π.

Et voilà la loi de Gauss : sous certaines hypothèses de régularité dont Gauss ne s'embarrasse pas, c'est la loi de probabilité des erreurs qui fait que la moyenne arithmétique est le maximum de vraisemblance de la quantité mesurée.

Et ce n'est pas tout : Gauss enchaîne aussitôt sur une constatation au moins aussi importante.

en désignant par e la base des logarithmes hyperboliques
Gauss, Theoria motus corporum (1809)

d'où l'on déduit facilement que $\frac{\varphi'\Delta}{\Delta}$ doit être une quantité constante, que nous désignerons par k. De là nous avons

$$\log \varphi\Delta = \frac{1}{2} k\Delta^2 + \text{constante},$$

ou

$$\boxed{\varphi\Delta = \varkappa e^{\frac{1}{2}k\Delta^2}}$$

en désignant par e la base des logarithmes hyperboliques, et en supposant la constante égale à $\log \varkappa$.

De plus, on voit facilement que k doit nécessairement être négatif pour que Ω puisse réellement devenir maximum ; posons donc

$$\frac{1}{2} k = -h^2;$$

et puisque, par un élégant théorème découvert par l'illustre Laplace, l'intégrale

$$\int e^{-h^2\Delta^2} d\Delta$$

prise depuis $\Delta = -\infty$ jusqu'à $\Delta = +\infty$, est $\frac{\sqrt{\pi}}{h}$, (en désignant par π la demi-circonférence du cercle dont le rayon est l'unité), notre fonction devient

$$\boxed{\varphi\Delta = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\Delta^2}.}$$

19 la somme des carrés des différences est un minimum

Puisqu'on a maintenant l'expression explicite de la vraisemblance, on voit qu'elle s'écrit comme exponentielle de moins une somme de carrés. Donc pour que l'exponentielle soit maximum, il faut que la somme de carrés soit minimum.

« C'est pourquoi, le système le plus probable des valeurs des inconnues sera celui dans lequel la somme des carrés des différences entre les valeurs observées et calculées des fonctions est un minimum. »

C'est le principe des moindres carrés.

« Ce principe, qui promet d'être d'un usage très fréquent dans toutes les applications des mathématiques à la philosophie naturelle, doit être considéré comme un axiome, du même droit que la moyenne arithmétique entre plusieurs valeurs observées d'une même quantité est adoptée comme la valeur la plus probable. »

En quelques pages, Gauss a obtenu par condition nécessaire la loi normale et le principe des moindres carrés. Il n'y a qu'une chose à ajouter : chapeau l'artiste ! Et encore il n'a pas tout dit.

la somme des carrés des différences est un minimum
Gauss, Theoria motus corporum (1809)

Nous développerons maintenant les conséquences de cette loi. Il est évident que pour que le produit

$$\Omega = h^\mu \pi^{-\frac{1}{2}\mu} e^{-h^2(v^2+v'^2+v''^2+\ldots..)}$$

devienne maximum, la somme $v^2+v'^2+v''^2 \ldots$ doit devenir minimum. *C'est pourquoi, le système le plus probable des valeurs des inconnues* p, q, r, s... *sera celui dans lequel la somme des carrés des différences entre les valeurs observées et calculées des fonctions* V, V′, V″ *est un minimum*, pourvu qu'on suppose dans toutes les observations le même degré de précision. Ce principe, qui promet d'être d'un usage très-fréquent dans toutes les applications des mathématiques à la philosophie naturelle, doit être considéré comme un axiome, du même droit que la moyenne arithmétique entre plusieurs valeurs observées d'une même quantité est adoptée comme la valeur la plus probable.

20 l'algorithme le plus expéditif

« Le sujet traité jusqu'ici pourrait donner lieu à plusieurs élégantes recherches analytiques, auxquelles cependant nous ne nous arrêterons pas, pour ne pas trop nous écarter de notre but. Par la même raison, nous devons réserver pour une autre occasion l'exposition des moyens par lesquels le calcul numérique peut être réduit à l'algorithme le plus expéditif.

[. . .] Le principe que les carrés des différences entre les quantités observées et calculées doivent produire une somme minimum, pourra du reste être aussi considéré, indépendamment du calcul des probabilités [. . .]. »

Mais au fait, qu'est ce que la loi de Gauss et les moindres carrés viennent faire dans un livre sur le mouvement des corps célestes ? Eh bien une orbite par exemple elliptique, est déterminée par des paramètres en relativement petit nombre. Disons au maximum trois paramètres pour le plan dans lequel se trouve l'ellipse, et six pour l'ellipse. Pour déterminer ces 9 paramètres, on peut faire des observations, en beaucoup plus grand nombre que 9. Chaque observation fournit une équation en les 9 paramètres. Et on a donc un système avec 9 inconnues, et beaucoup plus de 9 équations. Que faire ? Evidemment une idée serait de se limiter à 9 équations et trouver la solution unique. Mais comment les choisir ? Prendre plusieurs systèmes de 9 équations et moyenner des solutions ? Trop coûteux. Il est plus raisonnable de chercher l'ensemble de 9 paramètres qui minimise un certain critère de proximité aux observations. Gauss n'est pas le premier à proposer cela, et il en est bien conscient.

l'algorithme le plus expéditif
Gauss, Theoria motus corporum (1809)

Le sujet traité jusqu'ici pourrait donner lieu à plusieurs élégantes recherches analytiques, auxquelles cependant nous ne nous arrêterons pas, pour ne pas trop nous écarter de notre but. Par la même raison, nous devons réserver pour une autre occasion l'exposition des moyens par lesquels le calcul numérique peut être réduit à l'algorithme le plus expéditif.

[. . .] Le principe que les carrés des différences entre les quantités observées et calculées doivent produire une somme minimum, pourra du reste être aussi considéré, indépendamment du calcul des probabilités [. . .].

21 notre principe

« Mais de tous ces principes, le nôtre est le plus simple, tandis que dans les autres on est conduit à des calculs très compliqués. Au reste notre principe, dont nous nous servons déjà depuis l'année 1795, a été récemment donné par le célèbre LEGENDRE dans l'ouvrage *Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes*, Paris, 1805, ouvrage dans lequel sont exposées plusieurs autres propriétés de ce principe, que nous supprimons pour être plus bref. »

notre principe
Gauss, Theoria motus corporum (1809)

[. . .] Mais de tous ces principes, le nôtre est le plus simple, tandis que dans les autres on est conduit à des calculs très-compliqués. Au reste notre principe, dont nous nous servons déjà depuis l'année 1795, a été récemment donné par le célèbre LEGENDRE dans l'ouvrage *Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes*, Paris, 1805, ouvrage dans lequel sont exposées plusieurs autres propriétés de ce principe, que nous supprimons pour être plus bref.

22 Adrien Marie Legendre (1752–1833)

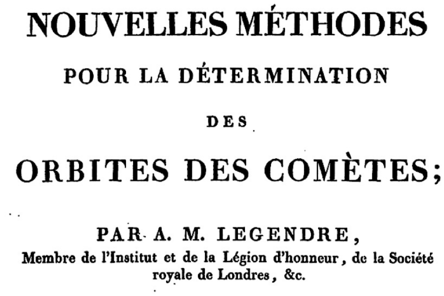
Un qui n'est pas content du tout, c'est le célèbre Legendre. Cette caricature a l'air d'avoir été faite pour illustrer la querelle avec Gauss, mais non : il se trouve que c'est la seule représentation de Legendre que l'on connaisse.

Adrien Marie Legendre (1752–1833)
Julien Léopold Boilly (1820)

23 Nouvelles méthodes pour la détermination. . . (1805)

Effectivement, Legendre a publié en 1805 ce livre, Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes, avec un. . .

Nouvelles méthodes pour la détermination. . . (1805)
Adrien Marie Legendre (1752–1833)


NOUVELLES MÉTHODES
POUR LA DÉTERMINATION
DES
ORBITES DES COMÈTES;
PAR A. M. LEGENDRE,
Membre de l'Institut et de la Légion d'honneur, de la Société royale de Londres, &c.

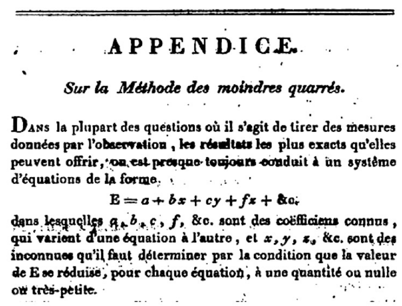
24 Appendice sur la Méthode des moindres quarrés

Appendice sur la Méthode des moindres carrés. Il y explique que quand on a à résoudre un système avec plus d'équations que d'inconnues, il faut retourner la solution qui minimise la somme des carrés des erreurs. Legendre explique que c'est la méthode la plus facile, mais il ne la déduit pas d'un principe plus général comme Gauss.

Ce qui le rend furieux, c'est que Gauss affirme négligemment que lui-même l'utilise depuis 1795 (Gauss avait 18 ans en 1795), et implicitement qu'il n'a pas jugé qu'elle mérite d'être publiée. Legendre estimait être le véritable inventeur de la méthode des moindres carrés. C'était un mathématicien reconnu. Gauss avait vingt cinq ans de moins.

En plus ce n'était pas la première fois, Gauss lui avait fait pratiquement le même coup sur un autre résultat, dans ses recherches arithmétiques. Legendre ne décolère pas, pendant plus de 10 ans. Voici ce qu'il écrit en 1820.

Appendice sur la Méthode des moindres quarrés
Legendre, Nouvelles méthodes pour la détermination. . . (1805)


APPENDICE.

Sur la Méthode des moindres quarrés.

Dans la plupart des questions où il s'agit de tirer des mesures données par l'observation, les résultats les plus exacts qu'elles peuvent offrir, on est presque toujours conduit à un système d'équations de la forme

$$E = a + bx + cy + fz + \&c.$$

dans lesquelles a, b, c, f, &c. sont des coëfficiens connus, qui varient d'une équation à l'autre, et x, y, z, &c. sont des inconnues qu'il faut déterminer par la condition que la valeur de E se réduise, pour chaque équation, à une quantité ou nulle ou très-petite.

25 qualifier du nom qu'il jugera convenable

« Au commencement de la dissertation précédente, page 4, l'auteur parlant de sa *Méthode des moindres carrés*, s'est borné à rappeler qu'il l'avait publiée, pour la première fois, en 1805, à la fin d'un mémoire sur les comètes, qui porte la date du mois de mars de cette année. Cependant, comme un géomètre fort célèbre n'a pas hésité à s'approprier cette méthode, dans un ouvrage imprimé en 1809, nous croyons devoir nous arrêter un instant sur cette prétention que tout lecteur impartial pourra qualifier ensuite du nom qu'il jugera convenable. »

qualifier du nom qu'il jugera convenable
Legendre, Note de M. ***, 10 Août 1820

Au commencement de la dissertation précédente, page 4, l'auteur parlant de sa *Méthode des moindres carrés*, s'est borné à rappeler qu'il l'avait publiée, pour la première fois, en 1805, à la fin d'un mémoire sur les comètes, qui porte la date du mois de mars de cette année. Cependant, comme un géomètre fort célèbre n'a pas hésité à s'approprier cette méthode, dans un ouvrage imprimé en 1809, nous croyons devoir nous arrêter un instant sur cette prétention que tout lecteur impartial pourra qualifier ensuite du nom qu'il jugera convenable.

26 l'histoire des sciences s'écrira beaucoup plus aisément

« Si cela n'est pas très décisif, c'est du moins fort clair, et surtout fort commode. Dans ce système, l'histoire des sciences s'écrira beaucoup plus aisément ; une découverte pourra bien ne plus appartenir à celui qui l'aura faite ; mais qu'importe ! Elle appartiendra toujours à quelqu'un, à celui qui aura trouvé bon de la revendiquer sans titre, à partir de l'époque la plus reculée. De bonne foi, un pareil système est-il admissible ? »

Il est possible que Gauss n'ait pas pensé à mal. Après tout, entre ses moindres carrés et ceux de Legendre, il n'y avait pas photo. En plus en 1809, il perd coup sur coup sa femme, un de ses fils, et son père. Il plonge dans une dépression, et même s'il a continué à travailler, il ne s'en est jamais vraiment remis. Est-il vrai comme il le dit qu'il utilisait la méthode des moindres carrés depuis 1795 ? C'est probable, mais il n'existe aucune trace écrite qui le prouve.

l'histoire des sciences s'écrira beaucoup plus aisément
Legendre, Note de M. ***, 10 Août 1820

Si cela n'est pas très décisif, c'est du moins fort clair, et surtout fort commode. Dans ce système, l'histoire des sciences s'écrira beaucoup plus aisément ; une découverte pourra bien ne plus appartenir à celui qui l'aura faite ; mais qu'importe ! Elle appartiendra toujours à quelqu'un, à celui qui aura trouvé bon de la revendiquer sans titre, à partir de l'époque la plus reculée. De bonne foi, un pareil système est-il admissible ?

27 Robert Adrain (1775–1843)

Pour compliquer l'histoire, il y avait un troisième larron. Robert Adrain était né en Irlande. Il avait eu la mauvaise idée d'émigrer dans un pays très peu développé scientifiquement, où il était extrêmement difficile de voir sa recherche reconnue. D'ailleurs, pour pouvoir être publié, Adrain avait fondé son propre journal. Ce pays, c'était les États-Unis d'Amérique.

Dans un article publié en 1808 dans son journal, il expose à la fois la loi de Gauss et la méthode des moindres carrés, un an avant Gauss donc.

Robert Adrain (1775–1843)

28 Research concerning the probabilities . . . (1808)

« De cette recherche, il ressort que les règles données jusque là par les auteurs pour corriger une levée de terrain sont erronées, et doivent être complètement rejetées. La vraie méthode donnée ici est utilisée par M. Bowditch dans sa solution à la question de M. Patterson sur comment corriger un relevé topographique ; sa règle pratique et la mienne sont les mêmes.

J'ai appliqué le principe de cet essai à la détermination de la valeur la plus probable de l'ellipticité de la terre, et cetera, mais le manque de place ne me permet pas d'en donner les recherches ici. »

Ah bon ? l'ellipticité de la terre ? Oui, c'était un des grands problèmes du dix-huitième siècle, que nous allons retrouver bientôt. Parmi les citations un peu négligentes de Gauss, se trouve celle-ci.

Research concerning the probabilities . . . (1808)
Robert Adrain (1775–1843)

From this investigation it appears, that the rules hitherto given by authors for correcting a survey, are altogether erroneous, aud ought to be entirely rejected. The true method here given is exemplified by Mr. Bowditch, in his solution of Mr. Patterson's question of correcting a survey ; his practical rule and mine being precisely the same. I have applied the principle of this essay to the determination of the most probable value of the earth's ellipticity, &c. but want of room will not permit me to give the investigations at this time.

29 un principe proposé par le célèbre Boscovich

« Laplace fait usage, pour la solution des équations linéaires, dont le nombre est plus grand que le nombre des inconnues, d'un autre principe qui avait déjà été proposé par le célèbre Boscovich, et qui est que les différences mêmes, mais toutes prises positivement, donnent une somme minimum. »

Eh bien oui, choisir de minimiser la somme des carrés des différences n'était pas la seule possibilité. L'autre principe, proposé par Laplace après Boscovitch consistait à minimiser la somme des valeurs absolues des différences.

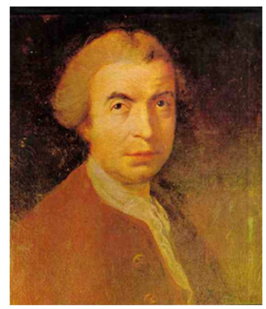
un principe proposé par le célèbre Boscovich
Gauss, Theoria motus corporum (1809)

Laplace fait usage, pour la solution des équations linéaires, dont le nombre est plus grand que le nombre des inconnues, d'un autre principe qui avait déjà été proposé par le célèbre BOSCOVICH, et qui est que les différences mêmes, mais toutes prises positivement, donnent une somme minimum.

30 Roger Joseph Boscovich (1711–1787)

Allons bon, Boscovich ? Qui c'est celui-là encore ? Le nom est francisé. Il était originaire de Raguse, qu'on appelle maintenant Dubrovnik en Croatie. Clairaut en pensait beaucoup de bien.

Roger Joseph Boscovich (1711–1787)



31 un des plus aimables hommes que j'aye connu

« Il y a bien longtemps, mon très cher et respectable ami, que je vous dois des remerciements pour le plaisir que vous m'avez fait en m'adressant le père Boscovich. C'est un des plus aimables hommes que j'aie connu, et je ne puis le comparer qu'à vous pour la réunion du savoir et des qualités sociales. Nous nous sommes vus très souvent, et je l'ai lié avec tous mes amis qui en ont tous pensé comme moi. »

Euh les amis de Clairaut peut-être, mais pas tout le monde.

un des plus aimables hommes que j'aye connu
Alexis Clairaut, le 6 mai 1760

Il y a bien longtemps, mon très cher et respectable ami, que je vous dois des remerciemens pour le plaisir que vous m'avés fait en m'adressant le P. Boscovich. C'est un des plus aimables hommes que j'aye connu, et je ne puis le comparer qu'à vous pour la réunion du savoir et des qualités sociales. Nous nous sommes vus très souvent, et je l'ai lié avec tous mes amis qui en ont tous pensé comme moi.

32 le plus grand visionnaire du monde

« Nous avons envoyé à Paris le père Boscovich, Jésuite ragusain, mathématicien assez célèbre, mais le plus grand visionnaire du monde : un homme qui parle pour dix, bavarde, ennuie et assomme tout le monde par son babil éternel et ses discours inutiles. Je suis curieux de savoir comment il sera reçu par vos savants. Il est ami de La Condamine ; ce sont deux cerveaux hétérogènes qui s'accordent parfaitement pour penser des extravagances et pour parler beaucoup. »

le plus grand visionnaire du monde
Père Paolo Mario Paciaudi, 1759

Nous avons envoyé à Paris le P. Boscovich, jésuite ragusain, mathématicien assez célèbre, mais le plus grand visionnaire du monde : un homme qui parle pour dix, bavarde, ennuie et assomme tout le monde par son babil éternel et ses discours inutiles. Je suis curieux de savoir comment il sera reçu par vos savants. Il est ami de La Condamine ; ce sont deux cerveaux hétérogènes qui s'accordent parfaitement pour penser des extravagances et pour parler beaucoup.

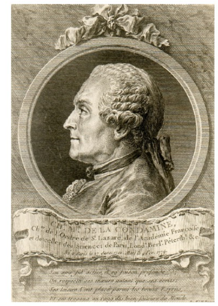
33 Charles-Marie de la Condamine (1701–1774)

Charles-Marie de la Condamine doit sa célébrité à son expédition au Pérou. Ce qu'on appelait le Pérou à l'époque recouvrait l'Équateur, le Pérou et la Bolivie actuels. A l'époque, c'était encore une colonie espagnole.

Quel était l'enjeu ? Dans les Principia à la fin du siècle dernier, Newton en se basant sur ses calculs de mécanique, avait prédit que la terre devait être non pas sphérique, mais en forme d'ellipse aplatie aux pôles. Au dix-huitième siècle le monde savant s'était passionné pour la vérification de cette prédiction de Newton, et pour le calcul de l'ellipticité de la Terre. Le principe était simple. Si Newton a raison, un degré de méridien à l'équateur doit être plus court qu'un degré de méridien au pôle. Sauf que c'est beaucoup plus facile à dire qu'à faire.

Dans les années 1730, l'Académie royale des sciences avait envoyé deux expéditions une en Laponie, une au Pérou.

Charles-Marie de la Condamine (1701–1774)



34 Journal du voyage à l'équateur (1751)

L'expédition à l'équateur a duré dix ans. Vous voyez la carte qui a été relevée de la province de Quito. Cette carte couvre plusieurs centaines de kilomètres de régions montagneuses. C'est difficilement distinguable au milieu, mais il y a une triangulation représentée. Cette triangulation a duré plusieurs années. Le relevé des repères par rapport aux étoiles aux deux extrémités de la triangulation a duré encore plus longtemps. Entre temps il y a eu des meurtres, du trafic d'or, des procès, de quoi fournir la matière d'un roman entier.

Mais bref, on était quand même revenu avec un résultat, moyennant une querelle scientifique retentissante qui avait opposé le mathématicien de l'expédition, Bouguer, à la Condamine qui n'était pas mathématicien, mais qui avait su s'attribuer le mérite de la réussite.

Journal du voyage à l'équateur (1751)
Charles-Marie de la Condamine (1701–1774)

35 Pierre Louis Moreau de Maupertuis (1698–1759)

Pour Maupertuis, qui était allé en Laponie, l'expédition avait été beaucoup plus facile. Il faut dire qu'il avait été fortement aidé par l'astuce et la puissance de calcul de Clairaut. Et puis la Laponie, c'est beaucoup plus plat que l'Équateur. En plus il y avait une rivière gelée qui facilitait, et les déplacements, et la triangulation.

Voici Maupertuis représenté avec son bonnet de fourrure ramené de l'expédition. Au-dessous du portrait il est écrit : le Globe mal connu qu'il a su mesurer, devient un monument où sa gloire se fonde, son sort est de fixer la mesure du monde, de lui plaire et de l'éclairer.

Pierre Louis Moreau de Maupertuis (1698–1759)

36 Pierre Louis Moreau de Maupertuis (1698–1759)

La gravure ne suffisant pas, le voici représenté la main négligemment posée sur un globe terrestre exagérément aplati.

Pierre Louis Moreau de Maupertuis (1698–1759)

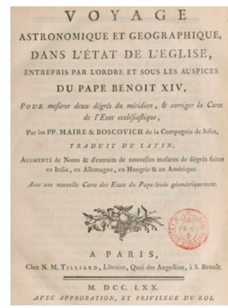
37 Voyage astronomique et géographique (1755)

C'est d'une expédition de ce type dont Boscovich avait été chargé. Mais plus modestement, il s'agissait des États du pape. Vous voyez le titre du livre :

« Voyage astronomique et géographique dans l'état de l'église, entrepris par l'ordre et sous les auspices de Benoît XIV, pour mesurer deux degrés du méridien et corriger la carte de l'état ecclésiastique. »

Benoît XIV c'est celui qu'on a appelé le Pape des Lumières, et l'ordre c'était l'ordre des Jésuites auquel Boscovich appartenait, plus pour longtemps parce qu'il a été supprimé en 1767, peu avant cette traduction française.

Voyage astronomique et géographique (1755)
Roger Joseph Boscovich (1711–1787)



VOYAGE
ASTRONOMIQUE ET GEOGRAPHIQUE,
DANS L'ÉTAT DE L'EGLISE,
ENTREPRIS PAR L'ORDRE ET SOUS LES AUSPICES
DU PAPE BENOIT XIV,
POUR mesurer deux dégrés du méridien, & corriger la Carte de l'Etat ecclésiastique,
Par les PP. MAIRE & BOSCOVICH de la Compagnie de Jesus,
TRADUIT DU LATIN,
AUGMENTÉ de Notes & d'extraits de nouvelles mesures de dégrés faites en Italie, en Allemagne, en Hongrie & en Amérique.
Avec une nouvelle Carte des Etats du Pape levée géométriquement.

A PARIS,
Chez N. M. TILLIARD, Libraire, Quai des Augustins, à S. Benoît.
M. DCC. LXX.
AVEC APPROBATION, ET PRIVILEGE DU ROI.

38 Voyage astronomique et géographique (1755)

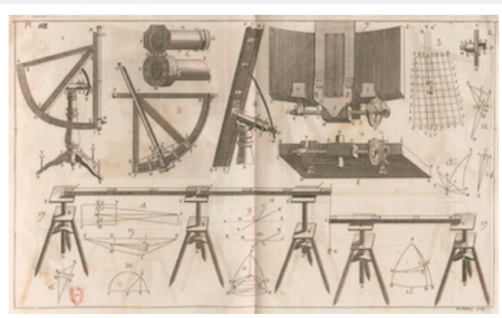
Boscovitch avait donc relevé une carte et fait une triangulation. C'était peut être moins spectaculaire que pour le Pérou ou la Laponie, mais ça avait été quand même une épopée.

Voyage astronomique et géographique (1755)
Roger Joseph Boscovich (1711–1787)

39 Voyage astronomique et géographique (1755)

Vous voyez ici les instruments d'époque. Ce qui n'apparaît pas, c'est l'échelle. Le quart de cercle que vous voyez en haut à gauche, pour être précis, devait être très grand et donc très lourd. On l'installait sur un échafaudage fixe, qui parfois s'écroulait. Boscovich raconte qu'il a échappé de peu à la mort lors d'un effondrement.

Voyage astronomique et géographique (1755)
Roger Joseph Boscovich (1711–1787)



40 Mesures de méridien (1770)

Mais Boscovich a quand même ramené un résultat. Cette table extraite de son livre, rassemble des résultats d'expédition entre 1736 et 1768. La seconde colonne porte la latitude de la mesure. La plus au nord est de 66 degrés pour l'expédition en Laponie de Maupertuis. Zéro degré c'est l'expédition en Équateur de La Condamine. Tout en bas vous voyez 33 degrés méridionaux, c'est-à-dire dans l'hémisphère Sud, par l'Abbé de la Caille aux alentours de la ville du Cap. De 1764 à 1768, Mason et Dixon ont effectué une mesure aux États-Unis.

Comme vous le voyez, la mesure la plus longue est celle de Laponie, la plus courte celle de l'Équateur. Donc Newton avait bien raison. Avec toutes ces mesures, on doit pouvoir calculer précisément l'ellipticité de la terre, c'est-à-dire trouver par exemple le grand axe et le petit axe.

Mesures de méridien (1770)

Roger Joseph Boscovich (1711–1787)

Dégrés en toises.	Latitude moyenne.	Année de la mesure.	Auteurs de la mesure.
57422	66°. 20′ sept.	1736 & 1737	M. *de Maupertuis.*
57074	49 . 23	1739 & 1740	MM. *de Maupertuis* & *Cassini.*
57091	47 . 40	1768	Le P. *Liesganig.*
57028	45 . 0	1739 & 1740	M. *Cassini.*
57069	44°. 44	1763	Le P. *Beccaria.*
56979	43 . 0	1752	Les PP. *Boscovich* & *Maire.*
56888	39 . 12	1764 & 1768	MM. *Masson* & *Dixon.*
56750	00 . 00	1736 & 1743	MM. *de la Condamine* & *Bouguer.*
57037	33 . 18 mérid.	1752	M. l'Abbé *de la Caille.*

41 Trouver la correction qu'il faut faire

« Voici le problème : étant donné un certain nombre de degrés, trouver la correction qu'il faut faire à chacun d'eux, en observant ces trois conditions : la première, que leurs différences soient proportionnelles aux différences des sinus verses d'une latitude double : la seconde, que la somme des corrections positives soit égale à la somme des corrections négatives : la troisième, que la somme de toutes les corrections, tant positives que négatives, soit la moindre possible, pour le cas où les deux premières conditions soient remplies. »

Trouver la correction qu'il faut faire

Boscovich, Voyage astronomique et géographique (1770)

Voici le problème : étant donné un certain nombre de degrés, trouver la correction qu'il faut faire à chacun d'eux, en observant ces trois conditions : la première, que leurs différences soient proportionnelles aux différences des sinus verses d'une latitude double : la seconde, que la somme des corrections positives soit égale à la somme des corrections négatives : la troisième, que la somme de toutes les corrections, tant positives que négatives, soit la moindre possible, pour le cas où les deux premières conditions soient remplies.

42 Trois conditions requises

« La première condition est requise par la loi de l'équilibre, qui demande une figure elliptique : la seconde, par un même degré de probabilité, pour les divisions du pendule et les erreurs des observateurs, dans l'augmentation et la diminution des degrés : la troisième est nécessaire pour se rapprocher autant qu'il se pourra des observations ; [. . .]
Ce problème a rapport à la méthode *de maximis et minimis* ; mais on ne peut le résoudre par la méthode ordinaire de l'analyse.[. . .] Mais au moyen de la simple géométrie, secondée par la mécanique, on en vient aisément à bout, comme on va le voir. »

La méthode de maximis et minimis, c'est le calcul de minimum comme vous savez le faire par le calcul différentiel. On ne peut pas l'appliquer ici, parce que la valeur absolue n'est pas dérivable. La simple géométrie qui permet d'en venir aisément à bout selon Boscovich, est passablement compliquée, et n'est pas généralisable.

Il était légitime que ce soient les moindres carrés qui s'imposent à terme.

Trois conditions requises

Boscovich, Voyage astronomique et géographique (1770)

La première condition est requise par la loi de l'équilibre, qui demande une figure elliptique : la seconde, par un même degré de probabilité, pour les divisions du pendule et les erreurs des Observateurs, dans l'augmentation & la diminution des degrés : la troisième est nécessaire pour se rapprocher autant qu'il se pourra des observations ; [. . .]
Ce problème a rapport à la méthode *de maximis & minimis* ; mais on ne peut le résoudre par la méthode ordinaire de l'analyse.[. . .] Mais au moyen de la simple Géométrie, secondée par la méchanique, on en vient aisément à bout, comme on va le voir.

43 références

Si Boscovich avait eu l'idée des moindres carrés, peut-être qu'on parlerait de loi de Boscovich, ou bien peut-être de loi d'Adrain, qui sait ? Bah, gardons Gauss, c'est plus simple !

références

- R. W. Farebrother (1999) *Fitting linear relationships : a history of the calculus of observations 1750–1900*, New York : Springer
- B. Hayes (2002) Science on the farther shore, *American Scientist*, 90(6), 499–502
- S. M. Stigler (1978) Mathematical statistics in the early states, *Ann. Statist*, 6(2), 239–265
- S. M. Stigler (1981) Gauss and the invention of least squares, *Ann. Statist*, 9(3), 465–474
- R. Taton (1996) Les relations entre R. J. Boscovich et Alexis Claude Clairaut (1759–1764), *Revue d'Histoire des Sciences*, 49(4), 415–459