0 Le neveu de Rameau

Aujourd'hui, il est question de musique. Oh, je ne vais pas détailler les rapports millénaires entre musique et mathématiques : une histoire n'y suffirait pas. Je vais juste vous raconter l'invention des tempéraments, ou des harmonies, ou des gammes, c'est comme vous voudrez. Eh oui, tempéraments égaux est un terme technique. Il ne signifie pas que les protagonistes avaient bon caractère. Ce serait même plutôt le contraire : vous allez voir.

Vous le savez déjà, le mariage entre mathématiques et musique remonte à Platon, qui a déterminé pour une bonne vingtaine de siècles, les quatre voies du « quadrivium » : arithmétique, géométrie, astronomie et musique. Écoutez ce qu'il fait dire à Socrate, dans la République.

histoires de savants

Le neveu de Rameau

des tempéraments égaux

hist-math.fr Bernard Ycart

1 le mouvement harmonique

« Il me semble, [. . .] que comme les yeux ont été formés pour l'astronomie, les oreilles l'ont été pour le mouvement harmonique, et que ces sciences sont sœurs, comme l'affirment les Pythagoriciens et comme nous, Glaucon, nous l'admettons, n'est-ce pas ? »

Pour Platon donc, la musique est héritée de Pythagore. Nous allons faire semblant de le croire, même si notre bon sens nous dit que la musique est certainement plus ancienne que les mathématiques. Les Mésopotamiens comme les Égyptiens avaient leur propre théorie de l'harmonie, longtemps avant Pythagore.

le mouvement harmonique
Platon, la République, Livre VII (ca. 380 av. J.C.)

Il me semble, [. . .] que comme les yeux ont été formés pour l'astronomie, les oreilles l'ont été pour le mouvement harmonique, et que ces sciences sont sœurs, comme l'affirment les Pythagoriciens et comme nous, Glaucon, nous l'admettons, n'est-ce pas ?

2 Theorica Musicae (1492)

Selon la légende, Pythagore aurait découvert les propriétés des rapports de fréquence, en écoutant des forgerons marteler du fer (c'est l'image en haut à gauche). À moins que ce ne soit en tapant sur des cloches ou des verres plus ou moins pleins, en haut à droite, ou bien des flûtes plus ou moins longues, en bas à droite, ou des cordes plus ou moins tendues par des poids.

Si vous regardez bien, vous verrez que les cloches en haut, les flûtes et les poids en bas portent les numéros 6, 8, 9 et 12. Une corde deux fois plus tendue ou bien deux fois plus courte, vibre à l'octave supérieure. C'est le rapport douze sur six. Les proportions 8/6 soit quatre tiers, 9/6 soit trois demis correspondent à la quarte et à la quinte. En prenant pour unité la fréquence de Do par exemple, celle du Fa au-dessus est quatre tiers, celle du Sol trois demis. C'est le premier découpage de l'octave, et c'est le seul qui soit physiquement naturel. Il n'existe aucune preuve directe que Pythagore lui-même soit allé au-delà. On ignore qui a compris le premier que ajouter des intervalles revenait à multiplier des rapports de fréquences, et les retrancher revenait à diviser des rapports. Ainsi, la différence entre une quinte et une quarte vaut un ton, soit un rapport de neuf huitièmes, trois demis divisé par quatre tiers. C'est à partir de là que les ennuis commencent.

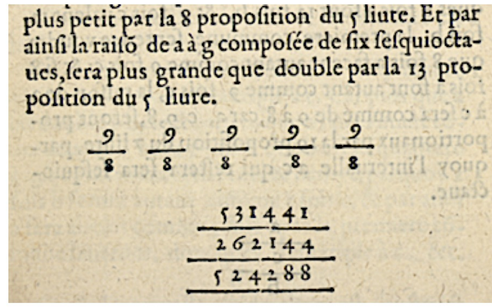
Theorica Musicae (1492)
Franchini Gaffurio (1451–1522)

3 La raison composée de six sesquioctaves

« La raison de a à g composée de six sesquioctaves, sera plus grande que double, par la treizième proposition du cinquième livre. »

... du cinquième livre des Éléments d'Euclide bien sûr, puisque vous avez sous les yeux le livre de la musique d'Euclide. Enfin d'Euclide ou d'un autre, parce que le livre est probablement apocryphe. Une preuve est que le théorème invoqué, ne démontre pas le résultat annoncé. Mais bref, de quoi s'agit-il ? Tout simplement de se rendre compte que l'octave ne peut pas contenir exactement six tons. Vous le voyez, neuf huitièmes puissance six, dépasse deux. Une autre conséquence est l'imperfection de la gamme dite « pythagoricienne ».

La raison composée de six sesquioctaves
Le livre de la musique d'Euclide (1566)


plus petit par la 8 propoſition du 5 liure. Et par ainſi la raiſõ de a à g compoſée de ſix ſeſquioctaues, ſera plus grande que double par la 13 propoſition du 5 liure.

$\frac{9}{8}$ $\frac{9}{8}$ $\frac{9}{8}$ $\frac{9}{8}$ $\frac{9}{8}$

531441
262144
524288

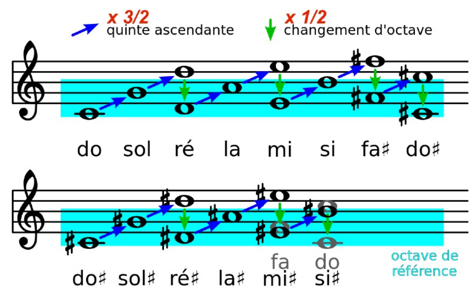
4 la gamme pythagoricienne

C'est la manière la plus naturelle de découper une octave. Partez de Do, et montez à la quinte Sol, en multipliant la fréquence par 3/2. Montez encore à la quinte Ré en multipliant par 3/2. Comme vous êtes sur l'octave suivante, ramenez-vous à l'octave courante en multipliant par 1/2. Puis itérez. En multipliant les fréquences par 3/2 ou 3/4 de manière à rester dans l'octave, vous allez parcourir les douze degrés de la gamme chromatique.

Mais il y a un hic : la dernière quinte, de Fa à Do, ne tombe pas juste. Parce que 3 puissance 12 est un peu plus grand que 2 puissance 18. En découpant en quintes plusieurs octaves au lieu d'une seule, on pourrait réduire l'erreur, mais pas la supprimer : 3^n ne sera jamais égal à 2^m. L'un est impair, l'autre pair, c'est ainsi.

À partir de ce constat, deux écoles de pensée se sont opposées.

la gamme pythagoricienne
Pythagore (ca. 569–475 av. J.C.)

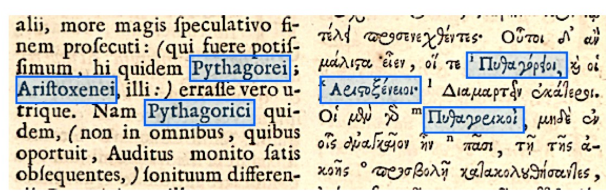


5 Pythagorei ; Aristoxenei

« Certains harmonistes se sont consacrés aux applications pratiques seulement et à la simple perception non rationnelle, tandis que d'autres procédaient par la théorie seule. Ces harmonistes étaient les pythagoriciens et les aristoxéniens, et les deux étaient dans l'erreur. Les pythagoriciens, en ne tenant aucun compte des impressions de leur oreille, ce que chacun devrait faire, se concentrèrent sur les différences dans les rapports de sons, inadaptées aux mélodies. La conséquence est que leurs critères prêtaient le flanc à la critique des écoles de pensée qui leur étaient opposées. »

Vous voyez de qui est ce passage ? Ptolémée une fois de plus ! Il oppose les pythagoriciens partisans de la théorie, aux empiristes disciples d'Aristoxène. Aristoxène était un élève d'Aristote, et vivait donc plus de quatre siècles avant Ptolémée. Il connaissait la théorie mathématique des rapports de fréquence, mais refusait de leur subordonner la sensation auditive. Nous allons le voir, ce débat entre théoriciens et empiristes devait durer encore très longtemps.

Pythagorei ; Aristoxenei
Ptolémée (ca. 85–165) Harmonicorum (1682)

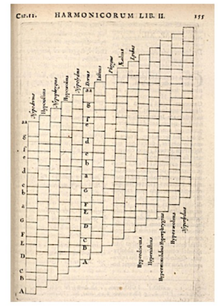

alii, more magis ſpeculativo finem proſecuti : (qui fuere potiſſimum, hi quidem Pythagorei ; Ariſtoxenei, illi :) erraſſe vero utrique. Nam Pythagorici quidem, (non in omnibus, quibus oportuit, Auditus monito ſatis obſequentes,) ſonituum differen-

6 Modes musicaux

Déjà du temps d'Aristote, il existait de nombreux modes musicaux. Sur ce schéma, Ptolémée en figure quinze. Dans le livre deux de ses Harmoniques, j'ai compté environ deux cent modes, donc deux cent découpages d'une octave en sept intervalles, ou encore autant de manières d'écrire le nombre 2 comme un produit de sept rapports d'entiers.

Tenez, voici un exemple. Les rapports successifs d'une note à la suivante sont (28/27), (9/8), (8/7), (10/9), (21/20), (9/8), (8/7). Le produit de ces sept fractions est bien égal à deux. Il s'agit du mode « Hypophrygien avec une diatonique douce et une tonique diatonique ». Ne ne demandez pas pourquoi, et ne me demandez pas non plus comment celui qui voulait jouer cette gamme faisait pour accorder son intrument. Euh, à propos d'accorder, savez-vous comment les Grecs désignaient l'octave ? Diapason : étymologiquement, c'est l'intervalle qui contient tous les tons.

Modes musicaux
Ptolémée (ca. 85–165) Harmonicorum (1682)



7 Claudii Ptolemæi harmonicorum

Ptolémée fait de fréquentes apparitions dans ces histoires : il a fixé pour quinze siècles les règles de l'astronomie, de l'astrologie, de la géographie, et son traité d'harmonique a lui aussi fait date.

Les deux images précédentes étaient issues de cette édition, datée de 1682, des Harmoniques. Regardez qui a traduit Ptolémée du grec au latin : c'est John Wallis en personne. Sur le frontispice, vous voyez une représentation fantaisiste de Ptolémée avec divers instruments grecs à ses pieds. Le plus important est celui qu'il tient dans ses mains : une simple corde.

Claudii Ptolemæi harmonicorum
Ptolémée (ca. 85–165) Harmonicorum (1682)

8 Monochordon

La voici montée en un instrument, le monocorde, chez l'ineffable Athanase Kircher. Je vous raconte ailleurs ses trouvailles musicales. Cet instrument n'est pas une de ses inventions : c'est le dispositif expérimental qui a été le plus utilisé pour l'étude des sons. Un chevalet mobile le long de la corde permettait de la raccourcir à volonté. Un passage à l'inverse traduisait les longueurs en fréquences.

Quelles conséquences concrètes, le choix d'une division de l'octave pouvait-il avoir ?

Monochordon
Athanasius Kircher (1602–1680) Musurgia universalis (1650)

9 Joueuse de pipa

Cette dame joue de la pipa, un luth chinois. Regardez ces barrettes perpendiculaires aux cordes. On les appelle des frettes. Elles marquent des divisions de la gamme. Un instrument à frettes fixes est dit « tempéré », au sens où il joue sur un seul tempérament, une seule gamme. Les Chinois avaient développé il y a très longtemps un découpage de l'octave à base de quintes, analogue à la gamme pythagoricienne. Par contre il ne semble pas qu'ils aient multiplié les modes différents, comme les Grecs.

Joueuse de pipa

10 Joueuse de sitar

Joueuse de sitar

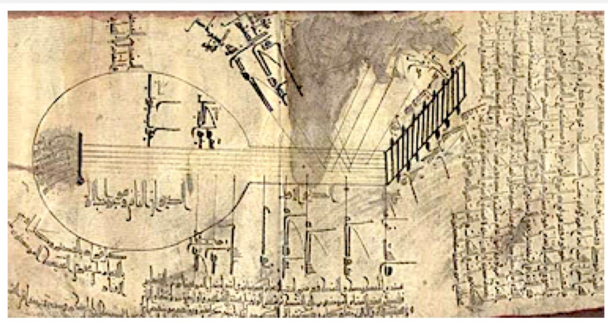
Les Indiens ont aussi développé leur théorie de la musique. Les modes dans la musique indienne sont très nombreux, comme chez les Grecs. Regardez cette joueuse de sitar. Les frettes sont des arcs métalliques sur le manche. Traditionnellement, elles sont mobiles, et non pas insérées dans le manche.

11 Oud

Le luth arabe s'appelle « oud ». Cette illustration est tirée du « grand livre de la musique » d'al-Farabi. En plus d'être le logicien que vous connaissez, il était aussi un excellent instrumentiste et un théoricien de la musique. D'autres grands penseurs arabes ont écrit sur la musique, commme al-Kindi avant al-Farabi et Ibn Sina après lui. Comme dans les autres domaines de pensée, ils ont assimilé l'héritage musical des Grecs et l'ont fait fructifier. Ce qui fait que les modes musicaux de la musique arabe sont encore plus complexes que les modes grecs.

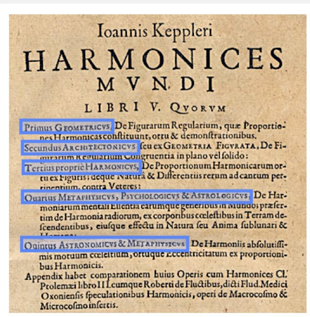
Du coup, le problème du frettage du luth est devenu un classique de la littérature musicale arabe. Mais comme en Inde, les frettes ne pouvaient pas être fixes. Et en Europe, comment les luths étaient-ils construits ?

Oud
Al-Fārābī (ca 872–950) Kitāb al-Mūsīqā al-Kabīr



12 Harmonices Mundi (1619)

Harmonices Mundi (1619)
Johannes Kepler (1571–1630)



Ioannis Keppleri
HARMONICES
MVNDI
LIBRI V. QVORVM

Primus GEOMETRICVS, De Figurarum Regularium, quæ Proportiones Harmonicas constituunt, ortu & demonstrationibus.
Secundus ARCHITECTONICVS, seu ex GEOMETRIA FIGVRATA, De Figurarum Regularium Congruentia in plano vel solido:
Tertius propriè HARMONICVS, De Proportionum Harmonicarum ortu ex Figuris; deque Natura & Differentiis rerum ad cantum pertinentium, contra Veteres:
Quartus METAPHYSICVS, PSYCHOLOGICVS & ASTROLOGICVS, De Harmoniarum mentali Essentia earumque generibus in Mundo; præsertim de Harmonia radiorum, ex corporibus cœlestibus in Terram descendentibus, eiusque effectu in Natura seu Anima sublunari & Humana:
Quintus ASTRONOMICVS & METAPHYSICVS, De Harmoniis absolutissimis motuum cœlestium, ortuque Eccentricitatum ex proportionibus Harmonicis.
Appendix habet comparationem huius Operis cum Harmonices Cl. Ptolemæi libro III. cumque Roberti de Fluctibus, dicti Flud. Medici Oxoniensis speculationibus Harmonicis, operi de Macrocosmo & Microcosmo insertis.

Voici la page de titre des Harmonies du Monde de Kepler. Un chef-d'œuvre foisonnant où on trouve les polyèdres de Kepler, la troisième loi de Kepler sur les orbites des planètes, mélangés à des considérations plus ou moins ésotériques ou astrologiques. Il fallait bien aussi qu'il y soit question des harmonies musicales. C'est l'objet du troisième livre.

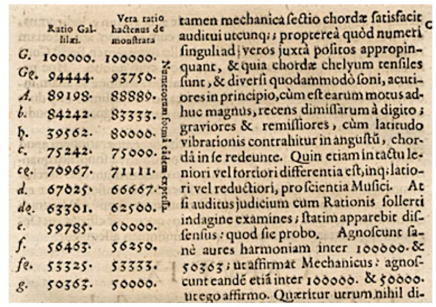
13 Tempérament de Vincenzo Galilei

Kepler y critique entre autres les ouvrages de Vincenzo Galilei, qui avait écrit sur la théorie musicale dans les années 1580. Oui, il s'agit bien du père de son fils. Vous voyez à gauche de l'image deux colonnes de chiffres, qui sont des rapports de fréquences des degrés de la gamme, par demi-tons. Celle de gauche indique les rapports de Galilée. Celle de droite, les « véritables rapports démontrés », selon Kepler donc.

Dans le texte qui est à droite de l'image, Kepler explique que la colonne de gauche provient d'une pratique empirique des luthiers. Ils divisent la partie libre des cordes en 18 parties égales et ils placent la première frette au premier dix-huitième. Puis ils itèrent le procédé, en divisant en 18 l'espace après chaque frette pour placer la suivante au dix-huitième de cet espace. À quelques erreurs de calcul près, la colonne de gauche donne bien les douze premiers termes de la série géométrique de raison 17/18. Cela signifie que tous les demi-tons étaient les mêmes : leurs rapports de fréquences valaient 18/17. C'est ce qu'on appelle un tempérament égal. Kepler a beau jeu de critiquer : aucune puissance de 18/17 ne donnera des notes justes. Regardez la longueur de corde censée donner l'octave : elle vaut 50 363 au lieu de 50 000. Ces instruments sonnent tout simplement faux ! Et selon Kepler, la différence est bien perceptible à l'oreille.

Tempérament de Vincenzo Galilei

Kepler, Harmonices Mundi (1619)



	Ratio Galilæi.	Vera ratio hactenus demonstrata
G.	100000.	100000.
Ge.	94444.	93750.
A.	89198.	88889.
b.	84242.	83333.
♮.	79562.	80000.
c.	75242.	75000.
ce.	70967.	71111.
d.	67025.	66667.
de.	63301.	62500.
e.	59785.	60000.
f.	56463.	56250.
fe.	53325.	53333.
g.	50363.	50000.

Numerorum formâ eâdem expreſſa

tamen mechanica ſectio chordæ ſatisfacit auditui utcunq; ; propterea quòd numeri ſinguli ad veros juxtà poſitos appropinquant, & quia chordæ chelyum tenſiles ſunt, & diverſi quodammodò ſoni, acutiores in principio, cùm eſt earum motus adhuc magnus, recens dimiſſarum à digito; graviores & remiſſiores, cùm latitudo vibrationis contrahitur in anguſtū, chordâ in ſe redeunte. Quin etiam in tactu leniori vel fortiori differentia eſt, inq; latiori vel reductiori, pro ſcientia Muſici. At ſi auditus judicium cum Rationis ſollerti indagine examines; ſtatim apparebit diſſenſus: quod ſic probo. Agnoſcunt ſanè aures harmoniam inter 100000. & 50363; ut affirmat Mechanicus: agnoſcunt eandē etiā inter 100000. & 50000. ut ego affirmo. Quæritur utrum nihil di-

14 Simon Stevin (1548-1620)

Mais s'il ne s'agit que de diviser en douze l'intervalle de fréquence de un à deux, la solution est simple, il suffit de définir un demi-ton comme la racine douzième de deux ; soit deux à la puissance un douzième. Ce n'est pas très loin de dix-huit sur dix-sept, mais l'avantage est que l'octave est juste.

C'est Simon Stevin qui en a eu l'idée. Cela ne vous surprendra pas : c'est le même Stevin qui a proposé l'écriture décimale des nombres, et qui a compris aussi que tous les nombres, rationnels ou pas, sont de même nature. C'est aussi lui qui a fait rouler un char à voile sur les plages de la mer du Nord, mais ça a moins de rapport avec la musique.

Vers 1605, Stevin rédige un mémoire en hollandais, « Sur la théorie de l'art de chanter ». Mais comme son innovation ne soulève pas l'enthousiasme des musiciens, il ne le publie pas.

Pourtant son idée a diffusé. On en a une preuve dans une lettre de Descartes à Constantin Huygens.

Simon Stevin (1548-1620)

Van de Spiegheling der Singconst (ca 1605)

15 Lettre à Constantijn Huygens (1^er novembre 1635)

« Et certes je m'en étonnerais, si ie n'avais vu de même de bons musiciens qui ne veulent pas encore croire que les consonances doivent s'expliquer par des nombres rationnels. Cela a été, si je m'en souviens, l'erreur de Stevin, qui était pourtant habile en d'autres domaines. Ainsi on voit bien plus de gens capables d'introduire dans les mathématiques les conjectures des philosophes, que de ceux qui peuvent introduire la certitude et l'évidence des démonstrations mathématiques dans les matières de philosophie, telles que sont les sons et la lumière. »

Constantin Huygens était, lui aussi, le père de son fils ; grand amateur de musique, compositeur et théoricien à ses heures. On a retrouvé dans sa bibliothèque une copie du manuscrit de Stevin. Il est donc probable que son fils Christian y a eu accès. Écoutez ce qu'il écrit en 1661 à Robert Moray, un scientifique écossais.

Lettre à Constantijn Huygens (1^er novembre 1635)
René Descartes (1596–1650)

Et certes je m'en estonnerois, si ie n'auois vû tout de mesme de bons musiciens qui ne veulent pas encore croire que les consonances se doivent expliquer par des nombres rationaux, ce qui a esté, si ie m'en souviens, l'erreur de Steuin, qui ne laissoit pas d'estre habile en autre chose. Ainsy on voit bien plus de gens capables d'introduire dans les mathematiques les coniectures des philosophes, que de ceux qui peuuent introduire la certitude & l'euidence des demonstrations mathematiques dans les matieres de philosophie, telles que sont les sons & la lumiere.

16 Lettre à Robert Moray (1^er août 1661)

« Je me suis occupé pendant quelques jours à étudier la musique, et la division du monocorde à laquelle j'ai appliqué l'algèbre avec succès. J'ai aussi trouvé que les logarithmes y sont d'un grand usage, et de là je me suis mis à considérer ces merveilleux nombres et admirer l'industrie et la patience de ceux qui nous les ont donnés. »

Qu'avait-il fait ? L'inconvénient de la gamme de Stevin était de donner des valeurs trop éloignées de la physique, pour certains intervalles. Huygens avait donc imaginé de découper l'octave non pas en douze intervalles égaux, mais en 31. Sauf qu'extraire la racine douzième de deux est possible sans logarithmes, en calculant une racine cubique et deux racines carrées. Ce n'est plus possible pour 31. Seuls les « merveilleux logarithmes » peuvent donner la réponse.

Lettre à Robert Moray (1^er août 1661)
Christian Huygens (1629–1695)

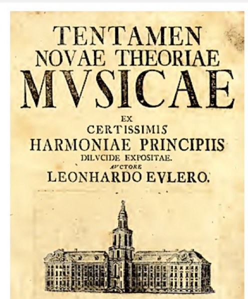
Je me suis occupè pendant quelques jours a estudier la musique, et la division du monochorde à laquelle j'ay appliquè heureusement l'algebre. J'ay aussi trouuè que les logarithmes y sont de grand usage, et de la je me suis mis a considerer ces merveilleux nombres et admirer l'industrie et la patience de ceux qui nous les ont donnez.

17 Leonhard Euler (1707–1783)

Au siècle suivant, Euler a une approche radicalement opposée. Il la décrit, à seulement vingt-quatre ans, dans cet « Essai d'une nouvelle théorie de la musique, exposée en toute clarté selon les principes d'harmonie les mieux fondés ». Le livre ne sera publié que huit ans plus tard.

En voici le principe, dans les propres termes d'Euler. « Plus une proportion est simple ou exprimée par de petits nombres, plus elle se présente distinctement à l'entendement, et y excite un sentiment de plaisir ». En clair, les intervalles sont d'autant plus harmonieux que les rapports s'expriment avec des puissances de deux, de trois ou de cinq. Déterminer les degrés de la gamme est donc un problème d'arithmétique, et plus exactement de congruences, portant sur les nombres qui n'ont que deux, trois et cinq comme diviseurs premiers.

Leonhard Euler (1707–1783)
Tentamen novae theoriæ musicæ (1739)



18 Gamme en puissances de 2, 3, 5

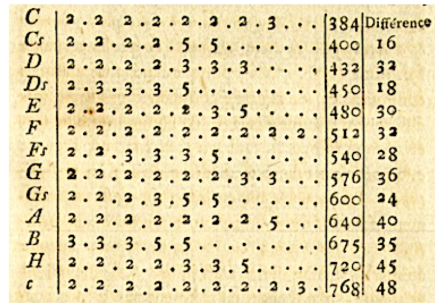
Voici la gamme chromatique que propose Euler. Ceci est extrait de sa septième lettre à une princesse d'Allemagne. Il reconnaît que sa gamme, contrairement à celles de Galilée et Stevin n'est pas d'un tempérament égal. Il dit :

« Tous les demi-tons ne sont pas effectivement égaux, quoique les musiciens s'efforcent de les rendre tels, parce que la véritable harmonie s'oppose à l'exécution de ce dessein qui lui est contraire. »

Et plus loin : « Si l'on voulait encore introduire le nombre 7, le nombre des tons d'une octave deviendrait plus grand, et toute la musique en serait portée à un plus haut degré. Mais c'est ici que la mathématique abandonne l'harmonie à la musique ».

Gamme en puissances de 2, 3, 5

Euler, Lettres à une princesse d'Allemagne (Lettre VII, 3 mai 1760)



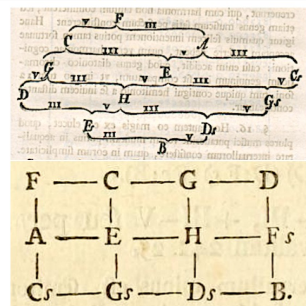
C	2 . 2 2 . 2 . 2 . 2 . 2 . 3 . . .	384	Différence
Cs	2 . 2 . 2 . 2 . 5 . 5	400	16
D	2 . 2 . 2 . 2 . 3 . 3 . 3	432	32
Ds	2 . 3 . 3 . 3 . 5	450	18
E	2 . . 2 . 2 . 2 . 2 . 3 . 5	480	30
F	2 . 2 . 2 . 2 . 2 . 2 . 2 . 2 . 2 .	512	32
Fs	2 . 2 . 3 . 3 . 3 . 5	540	28
G	2 . 2 . 2 . 2 . 2 . 2 . 3 . 3 . . .	576	36
Gs	2 . 2 . 2 . 3 . 5 . 5	600	24
A	2 . 2 . 2 . 2 . 2 . 2 . 2 . 5 . . .	640	40
B	3 . 3 . 3 . 5 . 5	675	35
H	2 . 2 . 2 . 2 . 3 . 3 . 5	720	45
c	2 . 2 . 2 . 2 . 2 . 2 . 2 . 2 . 3 .	768	48

19 Graphe des tierces et des quintes (Tonnetz)

Euler sait bien que, modulo l'octave, un facteur trois correspond à une quinte, un facteur cinq à une tierce. Cela définit deux relations cycliques entre les douze degrés de la gamme. Comparez les représentations qu'il donne de ces deux relations dans son premier ouvrage de musique écrit en 1731, et dans le dernier, écrit plus de quarante ans après. Dans l'image du bas, la notion de graphe apparaît clairement. Il n'y manque que les arêtes du bord droit au bord gauche, et du bord inférieur au bord supérieur, qui en font un graphe torique. Ce graphe porte le nom allemand de « Tonnetz ».

Graphe des tierces et des quintes (Tonnetz)

Euler, Tentamen (1739) De harmoniæ veris principiis (1773)

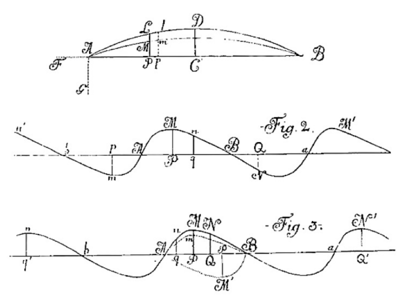


20 Sur la vibration des cordes (1748)

La vision d'Euler est d'autant plus intéressante qu'il est un des deux acteurs majeurs, avec d'Alembert, de la théorie des cordes vibrantes, qui a joué un si grand rôle dans le développement de l'analyse. Euler sait donc parfaitement que n'importe quel son peut se décomposer en une série de vibrations dont les fréquences sont des multiples entiers de la fréquence de base. Sa théorie de la musique est un compromis entre mathématiques et esthétique. Dans les années 1740, c'était la vision dominante. Écoutez Diderot.

Sur la vibration des cordes (1748)

Leonhard Euler (1707–1783)



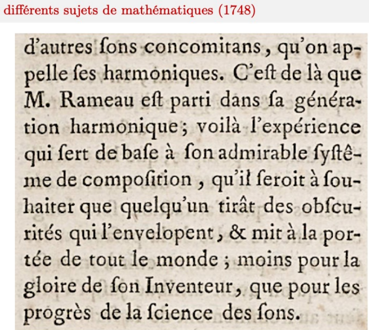
21 son admirable système de composition

Cet extrait se trouve dans un de ses « mémoires sur différents sujets de mathématiques », en fait un article sur la musique. Il y décrit les fréquences multiples d'un son, qu'on appelle ses harmoniques. « C'est de là, » dit-il, « que Monsieur Rameau est parti dans sa génération harmonique : voilà l'expérience qui sert de base à son admirable système de composition, qu'il serait à souhaiter que quelqu'un tirât des obscurités qui l'enveloppent, et mît à la portée de tout le monde ; moins pour la gloire de son inventeur, que pour les progrès de la science des sons. »

Une invention géniale donc, mais que Rameau n'a pas su expliquer.

son admirable système de composition

Diderot, Mémoires sur différents sujets de mathématiques (1748)

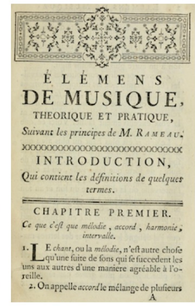


d'autres ſons concomitans, qu'on appelle ſes harmoniques. C'eſt de là que M. Rameau eſt parti dans ſa génération harmonique ; voilà l'expérience qui ſert de baſe à ſon admirable ſyſtême de compoſition, qu'il ſeroit à ſouhaiter que quelqu'un tirât des obſcurités qui l'envelopent, & mit à la portée de tout le monde ; moins pour la gloire de ſon Inventeur, que pour les progrès de la ſcience des ſons.

22 Jean le Rond d'Alembert (1717–1783)

Qu'à cela ne tienne, d'Alembert va s'en charger : cela donne ces « Éléments de musique théorique et pratique suivant les principes de monsieur Rameau », dont la première édition date de 1752, soit cinq ans après son propre mémoire sur la théorie des cordes vibrantes, trois ans après un rapport louangeux qu'il avait écrit sur les théories de Rameau et un an après le Discours Préliminaire de l'Encyclopédie, qui comporte un paragraphe dithyrambique sur Rameau. Donc, à part une légère carence au niveau du style, tout allait bien pour Rameau et sa théorie musicale.

Jean le Rond d'Alembert (1717–1783)
Élémens de musique theorique et pratique (1752)



ÉLÉMENS
DE MUSIQUE,
THEORIQUE ET PRATIQUE,
Suivant les principes de M. Rameau.

INTRODUCTION,
Qui contient les définitions de quelques termes.

CHAPITRE PREMIER.
Ce que c'est que mélodie, accord, harmonie, intervalle.

1. Le chant, ou la mélodie, n'est autre chose qu'une suite de sons qui se succedent les uns aux autres d'une maniere agréable à l'oreille.
2. On appelle accord le mélange de plusieurs

23 Rameau contre Rousseau

Mmhh, pas si vite ! Nonobstant son style déplorable, Rameau se considère comme l'inventeur de la musique théorique, le compositeur le plus génial de son siècle. Il a trente ans de plus que Diderot, trente-quatre de plus que d'Alembert, et ces jeunes freluquets se mêlent de lui donner des leçons. Pire que ça, quand il s'agit d'écrire des articles de musique pour l'Encyclopédie, ils les confient à un autre blanc-bec : Jean-Jacques Rousseau. Non seulement Rousseau écrit mieux que Rameau, mais en plus il garde un souvenir cuisant de l'accueil hautain et méprisant que Rameau a réservé à sa composition d'un ballet héroïque, le traitant d'apprenti ou de plagiaire, c'est selon.

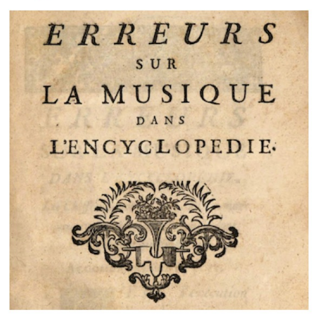
Du coup les articles de musique dans l'Encyclopédie, ne sont pas vraiment au niveau de flagornerie que Rameau estime mériter.

Rameau contre Rousseau
Jean-Philippe Rameau (1683–1764) Jean-Jacques Rousseau (1712–1778)

24 Erreurs sur la musique dans l'Encyclopédie (1755)

Quand il réalise l'ampleur des dégâts, Rameau riposte, du haut de ses soixante-douze ans. Cela donne cette très longue liste des « Erreurs sur la musique dans l'Encyclopédie ».

Erreurs sur la musique dans l'Encyclopédie (1755)
Jean-Philippe Rameau (1683–1764)



ERREURS
SUR
LA MUSIQUE
DANS
L'ENCYCLOPEDIE.

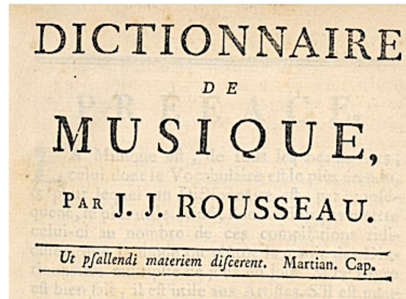
25 Dictionnaire de musique (1768)

Comme il fallait s'y attendre, Rousseau ne s'avoue pas vaincu. Il transforme en « Dictionnaire de musique » les articles de l'Encyclopédie, qu'il avait écrits un peu à la va vite, il le reconnaît.

Plus que cette bataille d'ego, au fond assez anecdotique, c'est la vision du rôle des mathématiques en musique qui nous intéresse. Dès son premier Traité de l'Harmonie en 1722, Rameau avait affirmé la prééminence d'une vision théorique rationnelle.

Dictionnaire de musique (1768)

Jean-Jacques Rousseau (1712–1778)


DICTIONNAIRE

DE

MUSIQUE,

PAR J. J. ROUSSEAU.

Ut psallendi materiem discerent. Martian. Cap.

26 ce que la raison autorise

« L'expérience nous offre un grand nombre d'accords susceptibles d'une diversité à l'infini [. . .]. La raison au contraire ne nous met sous les yeux qu'un seul accord, dont il lui est facile de déterminer toutes les propriétés, pour peu qu'elle soit aidée de l'expérience. Ainsi dès que cette expérience ne dément point ce que la raison autorise, celle-ci doit prendre le dessus. [. . .] Ne nous réglons donc que sur elle, si cela se peut, et n'appelons l'expérience à son secours, que pour affermir davantage ses preuves. »

On aurait pu s'attendre à ce que ce discours rationaliste soit approuvé sans réserve par les Encyclopédistes, d'Alembert en tête. C'était le cas avant l'Encyclopédie. Mais après la polémique lancée par Rameau contre Jean-Jacques Rousseau, d'Alembert tourne casaque. Les éditions de ses Éléments de musique postérieurs à 1755 deviennent plus critiques.

ce que la raison autorise

Rameau, Traité de l'Harmonie réduite à ses principes naturels (1722)

L'expérience nous offre un grand nombre d'Accords susceptibles d'une diversité à l'infini [. . .]. La raison au contraire ne nous met sous les yeux qu'un seul Accord, dont il luy est facile de déterminer toutes les proprietez, pour peu qu'elle soit aidée de l'experience : Ainsi dès que cette experience ne dément point ce que la raison autorise, celle-cy doit prendre le dessus. [. . .] Ne nous reglons donc que sur elle, si cela se peut, & n'appellons l'experience à son secours, que pour affermir davantage ses preuves.

27 M. Rameau auroit pu se dispenser

« Nous avons banni de cette édition, comme nous l'avions fait de la première, toutes considérations sur les proportions et progressions géométriques, arithmétiques et harmoniques, qu'on voudrait chercher dans la résonance du corps sonore ; persuadés comme nous sommes, que Monsieur Rameau aurait pu se dispenser d'avoir aucun égard à ces proportions, dont nous croyons l'usage tout à fait inutile, et même, si nous l'osons dire, tout à fait illusoire dans la théorie de la musique. »

M. Rameau auroit pu se dispenser

d'Alembert, Élémens de musique theorique et pratique (1762)

Nous avons banni de cette édition, comme nous l'avions fait de la premiere, toutes considérations sur les proportions & progressions géométriques, arithmétiques & harmoniques, qu'on voudroit chercher dans la résonnance du corps sonore ; persuadés comme nous sommes, que M. Rameau auroit pu se dispenser d'avoir aucun égard à ces propportions, dont nous croyons l'usage tout-à-fait inutile, & même, si nous l'osons dire, tout-à-fait illusoire dans la théorie de la Musique.

28 je crois avoir quelque droit de protester ici

« N'imitons pas ces musiciens qui se croyant géomètres, ou ces géomètres qui se croyant musiciens, entassent dans leurs écrits chiffres sur chiffres, imaginant peut-être que cet appareil est nécessaire à l'art. L'envie de donner à leurs productions un faux air scientifique, n'en impose qu'aux ignorants, et ne sert qu'à rendre leurs traités plus obscurs, et moins instructifs. En qualité de géomètre, je crois avoir quelque droit de protester ici (s'il m'est permis de m'exprimer de la sorte) contre cet abus ridicule de la géométrie dans la musique. »

En effet, c'est tout de même un comble que d'Alembert se pose en adversaire de la géométrie. Diderot avait moins de titres mathématiques à faire valoir. Mais excédé par la polémique, et sur le coup de la colère après la représentation d'une pièce de théâtre intitulée « Les Philosophes » qui tourne les encyclopédistes en ridicule, il écrit une satire mordante, « Le neveu de Rameau », qu'il ne publie pas.

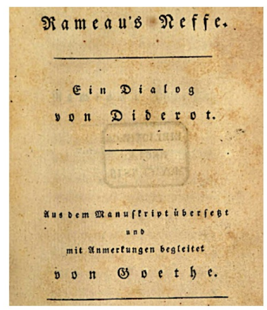
je crois avoir quelque droit de protester ici
d'Alembert, Élémens de musique theorique et pratique (1762)

N'imitons pas ces Musiciens qui se croyant Géometres, ou ces Géometres qui se croyant Musiciens, entassent dans leurs écrits chiffres sur chiffres, imaginant peut-être que cet appareil est nécessaire à l'Art. L'envie de donner à leurs productions un faux air scientifique, n'en impose qu'aux ignorans, & ne sert qu'à rendre leurs traités plus obscurs, & moins instructifs. En qualité de Géometre, je crois avoir quelque droit de protester ici (s'il m'est permis de m'exprimer de la sorte) contre cet abus ridicule de la Géométrie dans la Musique.

29 Rameau's Neffe (1805)

Arrivée, on ne sait comment, dans les papiers de Schiller, une copie du manuscrit est transmise à Goethe. Il en fait une traduction commentée, qui assure le succès du pamphlet. La traduction de Goethe est à son tour retraduite en français. Finalement, un siècle après la mort de Diderot, on retrouve un manuscrit original en français. Voici un tout petit échantillon des méchancetés que Diderot accumule sur l'oncle sous prétexte de s'intéresser au neveu.

Rameau's Neffe (1805)
Denis Diderot (1713–1784), Wolfgang von Goethe (1749–1832)



30 un auteur menacé de survivre à sa reputation

« C'est le neveu de ce musicien célèbre [...] qui a tant écrit de visions inintelligibles et de vérités apocalyptiques sur la théorie de la musique, où ni lui ni personne n'entendit jamais rien, et de qui nous avons un certain nombre d'opéras où il y a de l'harmonie, des bouts de chants, des idées décousues, du fracas [...] et qui [...] sera enterré par les virtuoses italiens, ce qu'il pressentait et le rendait sombre, triste, hargneux ; car personne n'a autant d'humeur, pas même une jolie femme qui se lève avec un bouton sur le nez, qu'un auteur menacé de survivre à sa réputation. »

Ça, c'est dit. Je vous propose de revenir aux échelles chromatiques pour un bilan de celles qui ont été fondées sur des bases plus ou moins mathématiques par les personnages de cette histoire.

un auteur menacé de survivre à sa reputation
Diderot, Le neveu de Rameau (ca 1764)

C'est le neveu de ce musicien célèbre [...] qui a tant écrit de visions inintelligibles et de vérités apocalptiques sur la theorie de la musique, ou ni lui ni personne n'entendit jamais rien, et de qui nous avons un certain nombre d'opéras où il y a de l'harmonie, des bouts de chants, des idées decousues, du fracas [...] et qui [...] sera enterré par les virtuoses italiens, ce qu'il pressentoit et le rendoit sombre, triste, hargnieux ; car personne n'a autant d'humeur, pas meme une jolie femme qui se leve avec un bouton sur le nez, qu'un auteur menacé de survivre a sa reputation.

31 Échelles chromatiques de Pythagore à Rameau

Dans ce tableau, j'ai traduit les différentes gammes de douze demi-tons, en fréquences relatives, par rapport à la fréquence du Do, mise à 1, et jusqu'au Do de l'octave supérieure qui doit donc être à 2. Nous l'avons déjà vu, ce n'est pas le cas pour la gamme attribuée à Pythagore. Apparaissent en bleu, des fréquences qui coïncident avec leur valeur physique : 9/8 pour le ton, 5/4 pour la tierce, 4/3 pour la quarte, et 3/2 pour la quinte. Vous le voyez, le sol est à trois demis pour les gammes de Pythagore, Kepler, Euler et Rameau, mais pas pour les deux basées sur des tempéraments égaux, celles de Stevin et Huygens. Le fa qui théoriquement doit être à quatre tiers, n'y est que pour Kepler et Euler.

Échelles chromatiques de Pythagore à Rameau

	Pythagore	Stevin	Kepler	Huygens	Euler	Rameau
do	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
do#	1,068	1,059	1,055	1,045	1,042	1,055
re	1,125	1,122	1,125	1,118	1,125	1,125
re#	1,201	1,189	1,200	1,196	1,172	1,172
mi	1,266	1,260	1,250	1,250	1,250	1,250
fa	1,352	1,335	1,333	1,337	1,333	1,318
fa#	1,424	1,414	1,406	1,398	1,406	1,387
sol	1,500	1,498	1,500	1,495	1,500	1,500
sol#	1,602	1,587	1,600	1,562	1,562	1,562
la	1,688	1,682	1,667	1,672	1,667	1,688
la#	1,802	1,782	1,778	1,789	1,758	1,758
si	1,898	1,888	1,875	1,869	1,875	1,875
do	2,027	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000

32 Joueuse de guitare (1897)

Alors, qui a gagné ? Les frettes de cette guitare peinte par Renoir, à quelle distance sont-elles placées ? quelle gamme jouent-elles ? Eh bien elles jouent le tempérament égal, celui de Stevin, celui dont les demi-tons valent tous racine douzième de deux. Vous pouvez vérifier : il y a bien une guitare à mesurer chez vous non ? Sinon il est très facile de trouver en ligne un plan de touche de guitare avec le gabarit des frettes.

Et les pianos, les flûtes, les trompettes ? Même chose. Tous les instruments tempérés modernes occidentaux jouent sur un tempérament égal. Les instruments non tempérés comme le violon sont bien obligés de jouer sur la même gamme quand ils jouent avec des instruments tempérés.

Joueuse de guitare (1897)
Auguste Renoir (1841–1919)

33 références

Pour une fois ce n'est pas Euler qui a eu raison avant tout le monde. Pour les tempéraments comme pour les nombres, c'est Stevin.

Et Rameau alors ? « le cher oncle Rameau qu'on aura appelé pendant une dizaine d'années le grand Rameau, et dont bientôt on ne parlera plus. [. . .] C'est un homme dur ; c'est un brutal ; il est sans humanité ; il est avare ; il est mauvais père, mauvais époux ; mauvais oncle ; mais il n'est pas assez décidé que ce soit un homme de génie. »

Signé Diderot,. . . en toute objectivité encyclopédique bien sûr !

références

- H. F. Cohen (1984) *Quantifying music, the science of music at the first stage of the scientific revolution 1580-1650*, Dordrecht : Reidel
- G. Cohen (2005) *Maths et musique, des destinées parallèles, Tangente Hors Série n°11*, Paris : Pole
- F. Escal (1984) D'Alembert et la théorie harmonique de Rameau, *Dix-huitième siècle*, 16, 151–162
- C. Kintzler (2011) *Jean-Philippe Rameau. Splendeur et naufrage de l'esthétique du plaisir à l'âge classique*, Paris : Minerve
- M. O'Dea (2003) Consonances et dissonances : Rousseau et D'Alembert face à l'œuvre théorique de Jean-Philippe Rameau, *Recherches sur Diderot et sur l'Encyclopédie*, 35(7), 105–130