0 Les axiomes de Peano

Nouvel épisode dans l'émergence de la rigueur mathématique au dix-neuvième : aujourd'hui, les fondements de l'arithmétique. Vous n'allez pas être surpris : comme d'habitude les axiomes de Peano ne sont pas vraiment de Peano et il ne l'a jamais prétendu. Quant au rêve de Leibniz, il n'a pas été vraiment réalisé, et pourtant Peano a fait tout ce qu'il a pu. Et ce chat en chute libre ? eh bien il finira bien par arriver. Comme d'habitude vous dis-je !

histoires de logique

Les axiomes de Peano

au bout du rêve de Leibniz

hist-math.fr Bernard YCART

1 Hermann Grassmann (1809–1877)

Je vous ai déjà fait part de ma conviction que l'apparition de la rigueur était liée en grande partie à la massification de l'enseignement. Aiguillonnés par des jeunes exigeants, certains enseignants ont trouvé légitime de répondre aux questions qui leur étaient posées, mieux que par des arguments d'autorité.

Hermann Grassmann est un de ces professeurs. Il enseigne au collège de Stettin, sa ville natale. En 1844, il a écrit sa théorie de l'extension, pour nous l'algèbre linéaire. C'était beaucoup trop tôt. Dix-sept ans plus tard, elle n'avait toujours pas été lue, ou si peu. Il s'apprête à la republier, après l'avoir mise au goût du jour.

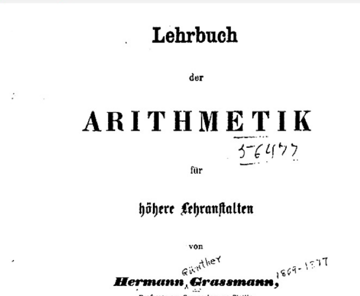
Hermann Grassmann (1809–1877)

2 Lehrbuch der Arithmetik (1861)

Mais auparavant, il écrit ce « Manuel d'arithmétique ». Le sous-titre annonce qu'il est destiné aux établissements d'enseignement supérieur. C'est la traduction littérale, et je n'ai pas réussi à savoir exactement à quels âges de formation cela correspondait dans la Prusse de l'époque ; mais cela n'allait certainement pas au-delà du niveau du lycée où Grassmann enseignait.

Voyons comment Grassmann introduit les entiers pour ses élèves.

Lehrbuch der Arithmetik (1861)
Hermann Grassmann (1809–1877)


Lehrbuch

der

ARITHMETIK

5-6477

für

höhere Lehranstalten

von

Günther

Hermann Grassmann, 1809-1877

Professor am Gymnasium zu Stettin.

3 Construction d'une double suite

Construction d'une double suite
Grassmann, Lehrbuch der Arithmetik (1861)

Son approche n'est pas axiomatique, mais contructive. Il fabrique comme vous le voyez une double suite, à partir d'une unité qu'il nomme e, répétée vers la droite et vers la gauche. Il donne les règles qui font de e le successeur de zéro, et de zéro le successeur de $-e$. Le signe plus ne traduit pour l'instant rien d'autre que la fonction de succession.

10. Bezeichnung. Die Summe einer poſitiven und einer negativen Einheit wird mit 0 (Null) bezeichnet d. h.

$$e + -e = 0.$$

11. Bezeichnung. Statt $0 + -e$ schreibt man $-e$.

$$0 + -e = -e.$$

12. Die aus der Einheit e erzeugte Grundreihe ist demnach folgende:

$$\cdots -e+-e+-e,\ -e+-e,\ -e, 0, e, e+e, e+e+e \cdots$$

4 Addition par récurrence

Addition par récurrence
Grassmann, Lehrbuch der Arithmetik (1861)

La nouveauté est qu'à partir de cette collection d'unités répétées, les opérations sont définies par récurrence. Ici, pour l'addition, la somme de a et du successeur de b est par définition le successeur de la somme $a + b$.

15. Erklärung. Wenn a und b beliebige Glieder der Grundreihe ſind, ſo versteht man unter der Summe a + b dasjenige Glied der Grundreihe, für welches die Formel

$$a + (b + e) = a + b + e$$

gilt. Man nennt a und b die Summanden oder Stücke der Summe a + b, a den ersten Summand, b den zweiten. Die Verknüpfung heisst Addition. Die Formel, in Worte gefasst, giebt den Satz

5 Multiplication par récurrence

Multiplication par récurrence
Grassmann, Lehrbuch der Arithmetik (1861)

Après avoir identifié l'opération de succession avec l'addition du nombre 1, Grassmann définit la multiplication, toujours par récurrence. Le produit de a par le successeur de b est le produit de a par b, ajouté à a.

Ce n'était pas encore une axiomatisation complète de l'arithmétique ; mais tout de même une construction beaucoup plus rigoureuse que toutes celles qui avaient précédé.

61. Zusatz. Für Produkte gelten daher alle Gesetze der Addition und Subtraktion.

62. Es ist allgemein (auch wenn β negativ oder null ist)

$$a(\beta + 1) = a\beta + a.$$

„Statt zum Multiplikator eine 1 zu addiren, kann man zum Produkte den Multiplikand addiren" oder „statt zu einem Produkte den Multiplikand zu addiren, kann man zum Multiplikator eine 1 addiren."

6 Charles Sanders Peirce (1839–1914)

Charles Sanders Peirce (1839–1914)
On the Logic of Number (1881)

Charles Peirce est américain, et n'a pas d'expérience de l'enseignement secondaire. Son approche des fondements de l'arithmétique est celle de la logique formelle. Dans son article de 1881, « Sur la logique des nombres », il retrouve en gros la démarche de Grassmann, qu'il ignorait probablement. Lui aussi, définit l'addition et la multiplication par récurrence. Il en démontre les principales propriétés. Il y ajoute une discussion de la notion de cardinal. Son article se termine en démontrant qu'une application injective d'un ensemble sur lui-même est bijective (dans la terminologie actuelle et non dans celle qu'il emploie). Son exemple est parfaitement raccord avec la culture du Nouveau Monde.

7 Every Texan kills a Texan

« Chaque Texan tue un Texan. Chacun est tué par une seule personne. Donc, chaque Texan est tué par un Texan. » Après avoir donné une démonstration soignée de cette observation sociologique, Peirce conclut : ce mode de raisonnement est fréquent en théorie des nombres.

Every Texan kills a Texan

Peirce, On the Logic of Number (1881)

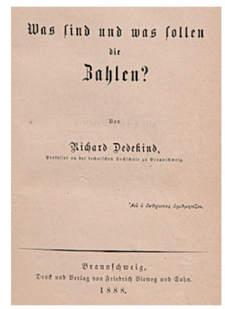
Every Texan kills a Texan,
Nobody is killed by but one person,
Hence, every Texan is killed by a Texan,
supposing Texans to be a finite lot. For, by the first premise, every Texan killed by a Texan is a Texan killer of a Texan. By the second premise, the Texans killed by Texans are as many as the Texan killers of Texans. Whence we conclude that every Texan killer of a Texan is a Texan killed by a Texan, or, by the first premise, every Texan is killed by a Texan. This mode of reasoning is frequent in the theory of numbers.

8 Richard Dedekind (1831–1916)

Richard Dedekind n'est pas Texan et n'a jamais tué personne. Il enseigne à Zürich et c'est pour son enseignement qu'il en est venu à définir les nombres réels par ce que nous appelons les « coupures de Dedekind ». Il s'attaque ensuite aux nombres entiers, dans ce mémoire, daté de 1888 : « Ce que sont les nombres et ce qu'ils doivent être ». Il avait commencé à l'écrire dès 1872, et des versions préliminaires circulaient depuis une dizaine d'années. Voici les premières phrases.

Richard Dedekind (1831–1916)

Was sind und was sollen die Zahlen ? (1888)



Was sind und was sollen
die
Zahlen?

Von

Richard Dedekind,
Professor an der technischen Hochschule zu Braunschweig.

Braunschweig,
Druck und Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn.
1888.

9 Vorwort

« En science, rien de ce qui peut être prouvé ne devrait être accepté sans preuve. Bien que cette demande semble très raisonnable, je ne la considère pas comme satisfaite, même dans les méthodes les plus récentes pour établir les bases de la plus simple des sciences ; à savoir cette partie de la logique qui traite de la théorie des nombres. »

Dans cet ouvrage, Dedekind va décrire la première caractérisation de l'ensemble des entiers, en donnant en particulier toute son importance à l'axiome d'induction.

Vorwort

Dedekind, Was sind und was sollen die Zahlen ? (1888)

Was beweisbar ist, soll in der Wissenschaft nicht ohne Beweis geglaubt werden. So einleuchtend diese Forderung erscheint, so ist sie doch, wie ich glaube, selbst bei der Begründung der einfachsten Wissenschaft, nämlich desjenigen Theiles der Logik, welcher die Lehre von den Zahlen behandelt, auch nach den neuesten Darstellungen *) noch keineswegs als erfüllt anzusehen. Indem ich die Arithmetik

10 vollständigen Induction

Dedekind définit ce qu'il appelle des « chaînes », munies de l'opération de succession. Le résultat clé de sa construction est ce « Théorème d'induction complète ». Dans ses notations, n' est le successeur de n et le théorème décrit l'inférence de n à n'. Voici la traduction.

« Pour montrer qu'un théorème est vrai pour tout nombre n d'une chaîne m_0, il est suffisant de montrer d'abord qu'il est vrai pour $n = m$, ensuite que de la validité du théorème pour un nombre n de la chaîne m_0, sa validité pour le successeur n' s'ensuit. »

vollständigen Induction

Dedekind, Was sind und was sollen die Zahlen ? (1888)

80. Satz der vollständigen Induction (Schluß von n auf n'). Um zu beweisen, daß ein Satz für alle Zahlen n einer Kette m_o gilt, genügt es zu zeigen,

ϱ. daß er für $n = m$ gilt, und

σ. daß aus der Gültigkeit des Satzes für eine Zahl n der Kette m_o stets seine Gültigkeit auch für die folgende Zahl n' folgt.

11 Addition

Addition
Dedekind, Was sind und was sollen die Zahlen ? (1888)

II. $m + 1 = m'$

III. $m + n' = (m + n)'$.

136. Satz. Es ist $m' + n = m + n'$.

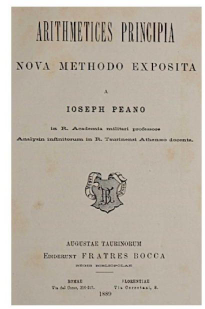
Beweis durch vollständige Induction (80). Denn

ϱ. der Satz ist wahr für $n = 1$, weil (nach 135. II)

Il utilise ensuite l'induction complète pour définir les opérations, comme Grassmann. Ici l'addition : $m + 1$ est le successeur de m, et m plus le successeur de n, c'est le successeur de $m + n$. Il procède de même pour l'ordre et la multiplication. C'est la première définition rigoureuse de l'ensemble des entiers, et des opérations de base de l'arithmétique.

12 Giuseppe Peano (1858–1932)

Giuseppe Peano (1858–1932)
Arithmetices Principia nova methodo exposita (1889)



Cela veut-il dire que Peano n'est pas l'auteur des axiomes de Peano ? Pas tout à fait. L'année suivant la parution du mémoire de Dedekind, Peano publie ces « Principes de l'Arithmétique exposés par une méthode nouvelle ».

13 Citations de Grassmann et Dedekind

Citations de Grassmann et Dedekind
Peano, Arithmetices principia (1889)

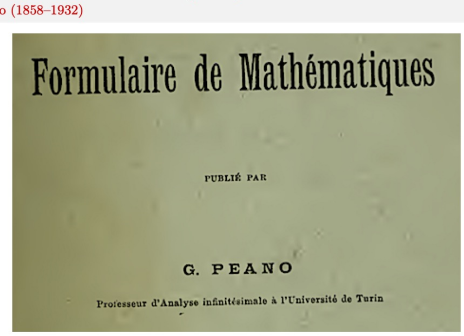
In arithmeticae demonstrationibus usus sum libro : H. Grassmann, *Lehrbuch der Arithmetik*, Berlin 1861.

Utilius quoque mihi fuit recens scriptum : R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen*; Braunschweig, 1888, in quo quaestiones, quae ad numerorum fundamenta pertinent, acute examinantur.

Peano ne prétend pas avoir inventé les principes de l'arithmétique. Il prend soin de citer Grassmann et Dedekind, et reconnaîtra ailleurs l'antériorité de Dedekind. Ce qu'il revendique, c'est une méthode nouvelle : l'écriture symbolique des formules logiques. Environ la moitié de son mémoire est consacrée à la description et à l'interprétation des équations symboliques. Quand les Principes proprement dit commencent, ce ne sont qu'une suite ininterrompue d'équations numérotées. Il est bien difficile d'y reconnaître les axiomes dits de Peano.

14 Formulaire de Mathématiques (1901)

Formulaire de Mathématiques (1901)
Giuseppe Peano (1858–1932)



J'ai choisi de vous les présenter dans une édition ultérieure du Formulaire de Mathématiques : c'est un projet grandiose d'écriture de l'ensemble des mathématiques en symboles logiques. Cette version est écrite en français, et il utilise justement ses axiomes pour illustrer son projet.

15 Axiomes de Peano

Les propositions primitives, ce sont les axiomes. Voici son conseil. « Dans la lecture des propositions, il convient de se rapprocher autant que possible du langage ordinaire. On lira les propositions 4 par exemple comme il suit : »

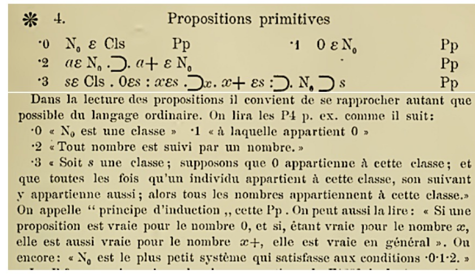
N_0 est une classe à laquelle appartient 0. (Pour nous une classe est un ensemble). Tout nombre est suivi par un nombre. Enfin l'axiome 3, que l'on appelle « Principe d'induction ».

Si vous regardez l'équation 3 qui traduit le principe d'induction, elle n'est pas facile à lire. Remarquez le ε qui est un 3 retourné. Pour nous, c'est le signe d'appartenance. L'inclusion renversée serait notre implication.

Peano était très conscient des problèmes techniques que son formulaire posait aux typographes, et il n'hésitait pas à mettre lui-même la main à la patte dans l'édition de ses ouvrages. Une de ses astuces consistait à utiliser comme signe non alphabétique, des caractères déjà existants, mais retournés, comme le 3 ci-dessus.

Axiomes de Peano

Peano, Formulaire de Mathématiques (1901)



✻ 4. Propositions primitives

·0 $N_0 \; \varepsilon \; \mathrm{Cls}$ Pp ·1 $0 \, \varepsilon \, N_0$ Pp

·2 $a \varepsilon N_0 . \supset . a+ \varepsilon N_0$ Pp

·3 $s \varepsilon \mathrm{Cls} . 0 \varepsilon s : x \varepsilon s . \supset_x . x+ \varepsilon s : \supset . N_0 \supset s$ Pp

Dans la lecture des propositions il convient de se rapprocher autant que possible du langage ordinaire. On lira les P4 p. ex. comme il suit:

·0 « N_0 est une classe » ·1 « à laquelle appartient 0 »

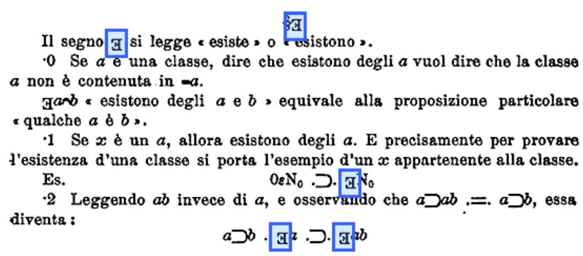
·2 « Tout nombre est suivi par un nombre. »

·3 « Soit s une classe ; supposons que 0 appartienne à cette classe ; et que toutes les fois qu'un individu appartient à cette classe, son suivant y appartienne aussi ; alors tous les nombres appartiennent à cette classe. » On appelle " principe d'induction ,, cette Pp . On peut aussi la lire : « Si une proposition est vraie pour le nombre 0, et si, étant vraie pour le nombre x, elle est aussi vraie pour le nombre $x+$, elle est vraie en général ». Ou encore : « N_0 est le plus petit système qui satisfasse aux conditions ·0·1·2. »

16 ∃ si legge « esiste »

∃ si legge « esiste »

Peano, Aritmetica generale e algebra elementare (1902)



Il segno ∃ si legge « esiste » o « esistono ».

·0 Se a è una classe, dire che esistono degli a vuol dire che la classe a non è contenuta in $-a$.

$\exists a \frown b$ « esistono degli a e b » equivale alla proposizione particolare « qualche a è b ».

·1 Se x è un a, allora esistono degli a. E precisamente per provare l'esistenza d'una classe si porta l'esempio d'un x appartenente alla classe.

Es. $0 \varepsilon N_0 . \supset . \exists N_0$

·2 Leggendo ab invece di a, e osservando che $a \supset ab . = . a \supset b$, essa diventa :

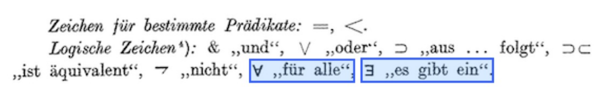
$$a \supset b . \exists a . \supset . \exists ab$$

Par exemple, c'est lui qui a introduit en logique le signe « Il existe », comme un E majuscule renversé. Ce signe a été diffusé ensuite par Bertrand Russell et il nous est resté.

17 ∀ für alle

∀ für alle

G. Gentzen, Untersuchungen über das logische Schließen (1935)



Zeichen für bestimmte Prädikate: $=$, $<$.

Logische Zeichen[4]): & „und", $\vee$ „oder", $\supset$ „aus … folgt", $\supset\subset$ „ist äquivalent", $\neg$ „nicht", $\forall$ „für alle", $\exists$ „es gibt ein".

Plus tard, c'est par analogie avec « Il existe » que le signe « quel que soit » a été défini comme un A majuscule renversé, par Gentzen dans ses « Études sur la déduction logique ».

18 Formules « élémentaires »

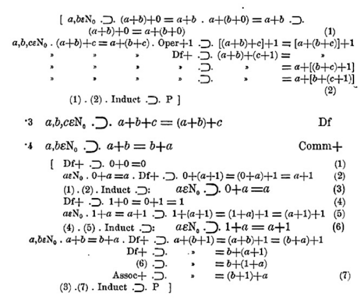
Mais revenons à Peano. La liste indigeste que vous avez sous les yeux, contient encore les bases de l'arithmétique. Elle est extraite d'un livre destiné aux élèves de collège et de lycée. Il n'y a pas de doute possible, car Peano débute le livre en donnant des extraits des programmes officiels, avec la liste des formules correspondantes. En équivalent français, les programmes vont de la quatrième à la terminale.

Oser infliger à des élèves de quatrième ce que vous voyez, paraît totalement insensé, n'est-ce pas ? Peano était-il donc fou, ou bien n'avait-il aucune idée de ce qui se passait avant l'université ?

Ni l'un ni l'autre. Pendant toute sa carrière, il est resté constamment en contact avec l'association des professeurs de mathématiques, il a écrit régulièrement des articles pour leur revue, et a participé à la formation de nombreux enseignants. À 62 ans, il a même écrit un recueil d'exercices arithmétiques, à la manière des Récréations mathématiques de Lucas.

Formules « élémentaires »

Peano, Aritmetica (1902)



$[\; a,b\varepsilon N_0 \,.\supset.\, (a+b)+0 = a+b \,.\, a+(b+0) = a+b \,.\supset.$

$(a+b)+0 = a+(b+0) \qquad (1)$

$a,b,c\varepsilon N_0 \,.\, (a+b)+c = a+(b+c) \,.\, \mathrm{Oper}+1 \,.\supset.\, [(a+b)+c]+1 = [a+(b+c)]+1$

$\text{» » » } \mathrm{Df}+ \,.\supset.\, (a+b)+(c+1) = \text{ »}$

$\text{» » » » } .\supset. \text{ » } = a+[(b+c)+1]$

$\text{» » » » } .\supset. \text{ » } = a+[b+(c+1)] \qquad (2)$

$(1)\,.\,(2)\,.\,\mathrm{Induct} \,.\supset.\, \mathrm{P} \;]$

$\cdot 3 \quad a,b,c\varepsilon N_0 \,.\supset.\, a+b+c = (a+b)+c \qquad \mathrm{Df}$

$\cdot 4 \quad a,b\varepsilon N_0 \,.\supset.\, a+b = b+a \qquad \mathrm{Comm}+$

$[\; \mathrm{Df}+ \,.\supset.\, 0+0=0 \qquad (1)$

$a\varepsilon N_0 \,.\, 0+a=a \,.\, \mathrm{Df}+ \,.\supset.\, 0+(a+1) = (0+a)+1 = a+1 \qquad (2)$

$(1)\,.\,(2)\,.\,\mathrm{Induct} \,.\supset:\; a\varepsilon N_0 \,.\supset.\, 0+a=a \qquad (3)$

$\mathrm{Df}+ \,.\supset.\, 1+0 = 0+1 = 1 \qquad (4)$

$a\varepsilon N_0 \,.\, 1+a = a+1 \,.\supset.\, 1+(a+1) = (1+a)+1 = (a+1)+1 \qquad (5)$

$(4)\,.\,(5)\,.\,\mathrm{Induct} \,.\supset:\; a\varepsilon N_0 \,.\supset.\, 1+a = a+1 \qquad (6)$

$a,b\varepsilon N_0 \,.\, a+b=b+a \,.\, \mathrm{Df}+ \,.\supset.\, a+(b+1) = (a+b)+1 = (b+a)+1$

$\mathrm{Df}+ \,.\supset. \text{ » } = b+(a+1)$

$(6) \,.\supset. \text{ » } = b+(1+a)$

$\mathrm{Assoc}+ \,.\supset. \text{ » } = (b+1)+a \qquad (7)$

$(3)\,.(7)\,.\,\mathrm{Induct} \,.\supset.\, \mathrm{P} \;]$

19 Se gli allievi non capiscono

Le livre s'intitule « Jeux d'arithmétique et problèmes intéressants ». La conclusion contient ce paragraphe splendide.

« Si les élèves ne comprennent pas, c'est la faute de l'enseignant qui ne sait pas expliquer. Cela ne sert à rien de rejeter la faute sur les classes précédentes. Nous devons prendre les élèves comme ils sont, rappeler ce qu'ils ont oublié, ou étudié sous une autre forme. Si l'enseignant tourmente ses élèves, et si, au lieu de gagner leur amour, il excite leur haine contre lui-même et la matière qu'il enseigne, non seulement son enseignement sera négatif, mais devoir vivre avec autant de petits ennemis sera pour lui un tourment continuel. »

Se gli allievi non capiscono

Peano, Giochi di aritmetica e problemi interessanti (1924)

Se gli allievi non capiscono, il torto è dell'insegnante che non sa spiegare. Nè vale addossare la responsabilità alle scuole inferiori. Dobbiamo prendere gli allievi come sono, e richiamare ciò che essi hanno dimenticato, o studiato sotto altra nomenclatura. Se l'insegnante tormenta i suoi alunni, e invece di cattivarsi il loro amore, eccita odio contro sè e la scienza che insegna, non solo il suo insegnamento sarà negativo, ma, il dover convivere con tanti piccoli nemici sarà per lui un continuo tormento.

20 È un vero delitto contro l'umanità

Douloureusement conscient du drame de la condition estudiantine, Peano va même jusqu'à dénoncer les examens avec la dernière vigueur, dans le journal de Turin.

« C'est un véritable délit contre l'humanité de tourmenter les pauvres élèves avec des examens pour s'assurer qu'ils savent des choses que la plupart du public instruit ignore.

Le professeur qui réunit la double qualité d'enseignant et d'examinateur, ses étudiants ne reconnaissent pas bien s'il est un ami ou un ennemi. Père et juge disait un de mes anciens professeurs ; et l'élève ne sait pas s'il doit l'aimer comme un père, ou bien le détester comme un juge. »

Bien évidemment, il mettait ses actes en accord avec ses principes, ce qui lui valait une popularité certaine auprès des moins vaillants.

Alors une question se pose : comment Peano pouvait-il être à ce point en décalage avec la réalité ? Quels pouvaient être ses rapports avec ses collègues ? Au début de sa carrière, ils étaient tout à fait normaux, c'est-à-dire passablement conflictuels. Il avait fondé un journal, la Revue de Mathématiques, qui lui permettait non seulement de publier à sa guise son Formulaire de Mathématiques, mais encore d'avoir le dernier mot face à ceux qui osaient le contredire.

È un vero delitto contro l'umanità

Peano, Contro gli esami, Torino Nuova (17 agosto 1912)

È un vero delitto contro l'umanità il tormentare i poveri alunni con esami per assicurarsi che essi sappiano cose che la generalità del pubblico istruito ignora.

[. . .]Il professore che riunisce la duplice qualità di insegnante e di esaminatore, non è riconosciuto bene dagli studenti se sia un amico o un nemico. *Pater et judex*, diceva un mio antico professore ; e l'allievo non sa se amarlo come pater, o detestarlo come judex.

21 Risposta a una dichiarazione de C. Segre

« Je crois nouveau dans l'histoire des mathématiques que des auteurs utilisent dans leurs recherches des propositions auxquelles ils connaissent des exceptions ou bien qu'ils savent non démontrées ; et qui, au lieu de suivre les mathématiciens du passé sur les points innombrables qu'ils ont bien traités, prennent pour modèle les rares points sur lesquels ils se trouvent en défaut. »

Ou bien encore, face à un auteur de manuel qui avait eu le tort d'émettre quelques doutes sur l'efficacité pédagogique de ses méthodes :

Risposta a una dichiarazione de C. Segre
Peano, Rivista di Matematica I (1891)

E credo nuovo nella storia della matematica il fatto di autori che nelle loro ricerche, scientemente usano proposizioni a cui essi conoscono delle eccezioni, o che sanno non dimostrate; e che invece di seguire i matematici passati negli innumerevoli punti in cui fecero bene, prendano per modello i rari punti in cui trovansi in difetto.

G. PEANO.

22 Recensione di G. Veronese, Fondamenti di geometria

« Les conséquences de ce principe absurde sont évidentes. Ainsi, hors de tout nombre il y a encore des nombres, et c'est ainsi que l'on engendre l'infini ; et hors de tout point il y a encore des points et ainsi on engendre les espaces multidimensionnels. Et l'on pourrait continuer longuement l'énumération des absurdités que l'auteur a empilées. Mais ces erreurs, le manque de précision et de rigueur dans tout le livre, lui ôtent toute valeur. »

L'auteur s'appelait Veronese : à mon avis, il a dû être vert. Je sais, j'aurais dû l'éviter celle là, mais je n'ai pas pu m'en empêcher.

Recensione di G. Veronese, Fondamenti di geometria
Peano, Rivista di Matematica II (1892)

Le conseguenze di questo principio assurdo sono evidenti.

Così (pag. 85), fuori di tutti i numeri sonvi ancora dei numeri, e in tal modo si generano gli infiniti; e (pag. 211) fuori di tutti i punti sonvi ancora dei punti, e per tal via si generano gli spazii a più dimensioni!

E si potrebbe lungamente continuare l'enumerazione degli assurdi che l'A. ha accatastato. Ma questi errori, la mancanza di precisione e rigore in tutto il libro tolgono ad esso ogni valore.

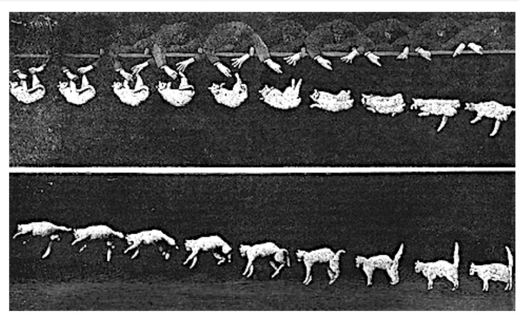
G. PEANO.

23 Peano, La storia di un gatto (1895)

Le 29 octobre 1894, Étienne-Jules Marey, l'inventeur de la chronophotographie, présentait à l'Académie des sciences de Paris cette série de clichés d'un chat qui se retourne pour tomber sur ses pattes. La constatation n'avait rien de vraiment nouveau, mais l'explication divise les savants. Comment le chat fait-il pour se retourner sans point d'appui ? Plus généralement, en quoi les mouvements internes à un corps modifient sa trajectoire externe. Et comme application, quel est l'effet des courants marins ou atmosphériques sur le mouvement des pôles de la Terre ?

Peano publie dans sa Revue, sa propre version de « l'histoire d'un chat », comme il dit. C'est parce qu'il fait tourner sa queue en l'air que par réaction, le chat tourne dans l'autre sens ! Il suffit de regarder les images pour constater que c'est faux, mais Peano s'obstine. Il utilise les calculs de son collègue Vito Volterra, qu'il habille du langage des vecteurs, sans citer la source. La polémique dure une bonne année. Peano refuse de reconnaître qu'il a eu tort, et il se permet en plus de critiquer les calculs de Volterra, qui eux, étaient exacts.

Peano, La storia di un gatto (1895)
É.-J. Marey, Retournement d'un chat (1894)



24 Replica ad una nota del prof. Peano (5 janvier 1896)

À la fin, Volterra exaspéré envoie une note au président de l'Académie à Rome. Elle se conclut par : « Ayant ainsi montré que tous les points de critique de Peano contre moi sont vides et infondés, et que ses affirmations ne sont ni originales ni exactes, ce qu'il a lui-même reconnu, je tiens pour ma part cette polémique définitivement close. »

Il faut peut-être chercher dans des certitudes qu'il ne remettait jamais en cause, l'explication des paradoxes de la personnalité de Peano. Au premier rang de ces certitudes, la fierté d'être celui qui réalisait enfin le rêve de Leibniz. Mais si, vous savez bien ! la « Caractéristique Universelle », ce langage symbolique censé pouvoir exprimer n'importe quel raisonnement humain, quel que soit le domaine !

Voici ce que Peano en dit dans l'introduction au Tome II du Formulaire de Mathématiques.

Replica ad una nota del prof. Peano (5 janvier 1896)
Vito Volterra (1860–1940)

25 Introduction au Formulaire de Mathématiques

« Après deux siècles, ce « songe » de l'inventeur du Calcul Infinitésimal est devenu une réalité.

[...] Nous avons donc la solution du problème proposé par Leibniz. Je dis « la solution » et non « une solution », car elle est unique. La Logique mathématique, la nouvelle science composée de ces recherches, a pour objet les propriétés des opérations et des relations de logique. Son objet est donc un ensemble de vérités, et non de conventions. »

La preuve que le rêve de Leibniz est enfin réalisé, c'est le Formulaire de Mathématiques lui-même : voilà l'ensemble des mathématiques du temps, résumé en une liste de tout au plus une dizaine de milliers de formules, sur quelques centaines de pages.

Introduction au Formulaire de Mathématiques
Peano, Revue de Mathématiques VI (1896)

Après deux siècles, ce « songe » de l'inventeur du Calcul Infinitésimal est devenu une réalité.

[...] Nous avons donc la solution du problème proposé par Leibniz. Je dis « la solution »et non « une solution », car elle est unique. La Logique mathématique, la nouvelle science composée de ces recherches, a pour objet les propriétés des opérations et des relations de logique. Son objet est donc un ensemble de vérités, et non de conventions.

26 Son enseignement sera réduit

« Il est possible de publier un *Formulaire de Mathématiques* qui contienne toutes les propositions connues dans les sciences mathématiques, toutes les démonstrations, toutes les méthodes. Écrites en symboles, elles occupent beaucoup moins de place qu'on ne pourrait croire.

[...] Chaque professeur pourra adopter pour texte ce Formulaire, car il doit contenir toutes les propositions et toutes les méthodes. Son enseignement sera réduit à montrer à lire ces formules, et à indiquer aux élèves les propositions qu'il désire expliquer dans son cours. »

Son enseignement sera réduit
Peano, Introduction au Formulaire de Mathématiques (1896)

Il est possible de publier un *Formulaire de Mathématiques* qui contienne toutes les propositions connues dans les sciences mathématiques, toutes les démonstrations, toutes les méthodes. Elles, écrites en symboles, occupent beaucoup moins de place qu'on ne pourrait croire.

[...] Chaque professeur pourra adopter pour texte ce Formulaire, car il doit contenir toutes les propositions et toutes les méthodes. Son enseignement sera réduit à montrer à lire ces formules, et à indiquer aux élèves les propositions qu'il désire expliquer dans son cours.

27 Chaque partie publiée sert déjà aux étudiants

« Ce projet est assurément beau. Malheureusement son exécution surpasse les forces, non d'un homme, mais de plusieurs hommes. Seulement une société nombreuse et bien organisée pourrait l'accomplir. En attendant que quelque société savante s'empare de ce projet, nous avons publié, avec la collaboration de plusieurs collègues, le premier tome du Formulaire. Car il n'est pas nécessaire que tout ce travail soit fini pour porter son avantage. Chaque partie publiée sert déjà aux étudiants de ces sujets particuliers. »

Il plaisante là, il n'est pas vraiment sérieux ? Ce serait mal le connaître : dans ses propres cours, l'essentiel de l'année se passe à apprendre à lire les formules, l'autre partie à les énoncer une par une. Heureusement, il est opposé aux examens !

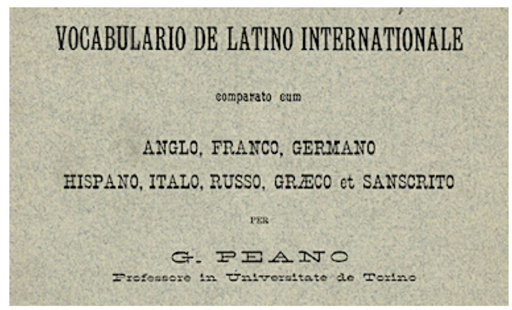
Chaque partie publiée sert déjà aux étudiants
Peano, Introduction au Formulaire de Mathématiques (1896)

Ce projet est assurément beau. Malheureusement son exécution surpasse les forces, non d'un homme, mais de plusieurs hommes. Seulement une société nombreuse et bien organisée pourrait l'accomplir. En attendant que quelque société savante s'empare de ce projet, nous avons publié, avec la collaboration de plusieurs collègues, le I tome du Formulaire. Car il n'est pas nécessaire que tout ce travail soit fini pour porter son avantage. Chaque partie publiée sert déjà aux étudiants de ces sujets particuliers.

28 Vocabulario de latino internationale (1904)

Et ce n'est pas fini ! Pour faire bonne mesure, et parachever la réalisation du rêve de Leibniz, Peano invente une langue de communication internationale, le Latino sin Flexione, ou latin sans déclinaisons. Comme vous l'imaginez, les rares explications du formulaire de mathématiques seront désormais données dans cette langue, que Peano est le seul au monde à pratiquer couramment. Je vous sens impatient d'en voir un exemple.

Vocabulario de latino internationale (1904)
Giuseppe Peano (1858–1932)


VOCABULARIO DE LATINO INTERNATIONALE

comparato cum

ANGLO, FRANCO, GERMANO
HISPANO, ITALO, RUSSO, GRÆCO et SANSCRITO

PER

G. PEANO
Professore in Universitate de Torino

29 declinatione et conjugatione non es necessario

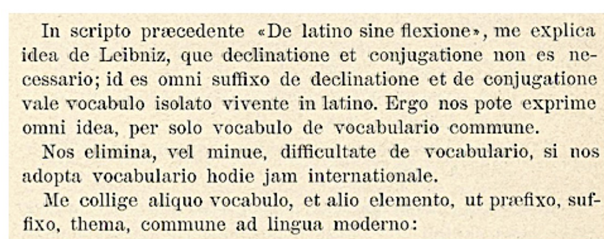
« Dans l'écrit précédent « Sur le latino sine flexione », j'explique l'idée de Leibniz, que les déclinaisons et les conjugaisons ne sont pas nécessaires ; c'est-à-dire que chaque suffixe de déclinaison et de conjugaison peut-être ôté d'un vocable isolé du latin. En conséquence, nous pouvons exprimer toutes les idées, par les seuls mots du vocabulaire commun.

Nous éliminons, ou nous minorons, les difficultés de vocabulaire, si nous adoptons le vocabulaire qui est déjà international actuellement.

J'ai rassemblé quelques mots, et d'autres éléments tels des préfixes, suffixes et radicaux, communs aux langues modernes. »

Reconnaissons que l'idée n'est pas absurde : se débarrasser de toute complication grammaticale et ne conserver que le vocabulaire commun aux principales langues de l'Europe. Le Latino sin Flexione est loin d'être la première tentative. Les langages universels sont dans l'air du temps et les tentatives se sont multipliées à la fin du dix-neuvième : Le Latino sin Flexione est une proposition de plus, après le Volapük et l'Esperanto, qui ont connu un succès plus durable.

declinatione et conjugatione non es necessario
Peano, Vocabulario de latino internationale (1904)


In scripto præcedente «De latino sine flexione», me explica idea de Leibniz, que declinatione et conjugatione non es necessario; id es omni suffixo de declinatione et de conjugatione vale vocabulo isolato vivente in latino. Ergo nos pote exprime omni idea, per solo vocabulo de vocabulario commune.

Nos elimina, vel minue, difficultate de vocabulario, si nos adopta vocabulario hodie jam internationale.

Me collige aliquo vocabulo, et alio elemento, ut præfixo, suffixo, thema, commune ad lingua moderno:

30 Francesco Tricomi (1897–1978)

Vous imaginez bien que les lubies de Peano ne manquaient pas de provoquer quelques tensions au sein de l'université de Turin, où il était titulaire de la chaire d'Analyse Infinitésimale. Il ne faudrait pas croire pour autant qu'il était complètement isolé. Un certain nombre de ses disciples le soutenaient et participaient activement à la rédaction du Formulaire. En face, le parti des anti-Peano, plus conservateurs, et plus attachés à la conception traditionnelle d'un enseignement universitaire, celle où les étudiants sont censés travailler et apprendre. Parmi, eux, j'ai choisi le témoignage de Francesco Tricomi.

Quand il est arrivé à Turin en 1925, il était tout jeune et Peano avait 67 ans. Il n'était plus actif mathématiquement depuis belle lurette, mais conservait, dit Tricomi, une part de son ancien prestige. À la grande surprise de tout le monde, Peano, à l'arrivée de Tricomi, propose de lui céder le cours d'Analyse Infinitésimale, auquel il s'accrochait depuis longtemps, en dépit des pressions plus ou moins amicales de ses collègues.

Francesco Tricomi (1897–1978)

31 la sua azione era meno nociva

« En ce qui concerne Peano, il continua, jusqu'à sa mort en 1932, à développer sous l'étiquette « Mathématiques complémentaires » plus ou moins les mêmes choses qu'il développait auparavant sous l'étiquette d'« Analyse infinitésimale », mais là, son action était moins néfaste. »

À part faire lire son formulaire aux étudiants, à quoi passait-il son temps ?

la sua azione era meno nociva
Tricomi, Ricordi di mezzo secolo di vita matematica Torinese (1972)

Quanto al Peano, egli continuò, fino a che morì nel '32, a svolgere sotto l'etichetta di « Matematiche complementari » su per giù le stesse cose che prima svolgeva sotto l'etichetta di « Analisi infinitesimale », ma lì la sua azione era meno nociva.

32 i giornalucoli di esperantisti

« À propos du Peano des dernières années, cela me surprend un peu que Ludovico Geymonat ait écrit qu'« il n'était pas facile de comprendre quelles étaient les lectures de Peano dans les dernières années de sa vie. » La réponse me paraît pourtant évidente à moi qui l'ai bien connu : *aucune*, ou tout au plus les feuilles de chou des espérantistes, interlinguistes, et autres écrivains du genre. »

i giornalucoli di esperantisti
Tricomi, Ricordi di mezzo secolo di vita matematica Torinese (1972)

A propositio di Peano degli ultimi temps, me sorprende un po' che Ludovico Geymonat [. . .] abbia sritto che : « non era facile capire quali fossero le letture di Peano negli ultimi anni della sua vita. » La risposta pare invece ovvia a me che ben lo conobbi : nulla o, tutt'al più, i giornalucoli di esperantisti, interlinguisti e altri scrittori del genere.

33 références

Francesco Tricomi a été un des grands mathématiciens italiens du vingtième siècle, et certains disent même, le meilleur professeur. En dehors de ses travaux sur les équations aux dérivées partielles, il a écrit des livres de cours d'une grande clarté, qui ont été traduits en anglais, français, allemand et russe. MacTutor donne de lui la citation suivante, que je n'ai pas su localiser : « Je n'ai peut être pas réussi à rendre faciles des choses difficiles, mais au moins je n'ai jamais rendu difficile un sujet facile ».

Vous suivez son regard ? Oh que j'aimerais pouvoir en dire autant !

références

- R. Dedekind (2008) *La création des nombres, H. Benis Sinaceur trad.*, Paris : Vrin
- D. A. Gillies (1982) *Frege, Dedekind, and Peano on the foundations of arithmetic*, Assen : Van Gorcum
- H. Kennedy (2006) *Peano, life and works of Giuseppe Peano*, Concord, CA : Peremptory Publications
- H. J. Petsche, A. C. Lewis, J. Liesen, S. Russ (2001) *Hermann Graßmann ; From past to future : Graßmann's work in context*, Basel : Birkhäuser
- M. Segre (1994) Peano's axioms in their historical context, *Archive for history of exact sciences*, 48(3/4), 201–342
- H. Wang (1957) The axiomatization of arithmetic, *The Journal of Symbolic Logic*, 22(2), 145–158