Une histoire de mathématiques à écouter sur

hist-math.fr

0 Lettres à une princesse d'Allemagne

Je vais vous raconter les diagrammes de Venn. Oh, vous imaginez déjà comment l'histoire va se dérouler. Ces diagrammes ont été baptisés du nom de Venn, longtemps après sa mort. Venn lui-même savait bien qu'ils n'étaient pas vraiment nouveaux. Vous vous en doutez, Euler les avait déjà publiés ; et tout était caché depuis longtemps dans les manuscrits de Leibniz. Comme d'habitude, quoi !

Reste la princesse d'Allemagne : que vient-elle faire là-dedans ?

histoires de logique

Lettres à une princesse d'Allemagne

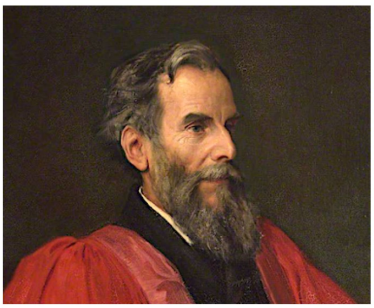
diagrammes de Venn

hist-math.fr Bernard Ycart

1 John Venn (1834–1923)

John Venn, le voici. C'était un professeur de l'université de Cambridge aux multiples activités, membre de plusieurs associations de charité, militant pour le vote des femmes, et reconnu pour ses qualités de jardinier.

John Venn (1834–1923)

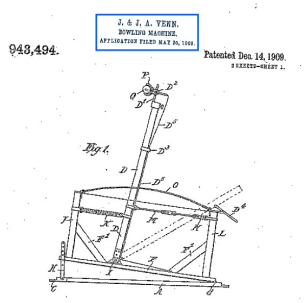


2 Patent for a bowling machine (1909)

En 1909, il a déposé un brevet, avec son fils, pour une machine à lancer les balles de cricket. Mais ce n'est pas exactement ce qui a assuré sa place dans l'histoire des mathématiques.

Patent for a bowling machine (1909)

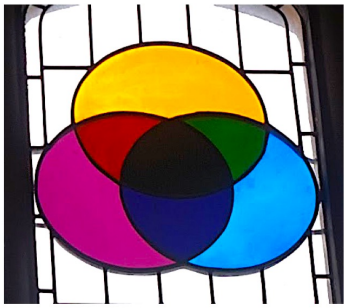
John Venn (1834–1923)



3 Diagramme de Venn

Ce serait plutôt son diagramme, dont le college où il a été professeur a fait un vitrail en son honneur. Ses figures, il les a expliquées dans un livre de logique symbolique, en 1881. Il sait bien que l'idée de représenter des propositions par des cercles n'a rien de nouveau. Voici ce qu'il en dit, dans une note de bas de page.

Diagramme de Venn
Gonville and Caius College, Cambridge



4 making use of the Eulerian scheme

« Jusqu'à ce que j'y regarde de plus près, je n'avais aucune idée de la fréquence avec laquelle ces schémas étaient utilisés. Ainsi, parmi les 60 premiers traités de logique publiés depuis un siècle que j'ai consultés, 34 utilisaient des diagrammes, pratiquement tous selon le schéma eulérien. »

À dire vrai, il y a bien une différence entre ce qu'il appelle le schéma eulérien, et ses propres diagrammes. Il l'explique sur un exemple de syllogisme.

making use of the Eulerian scheme
Venn, Symbolic logic (1881)

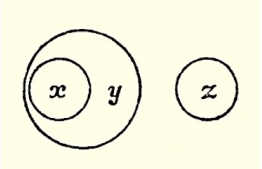
[1] Until I came to look somewhat closely into the matter I had no idea how prevalent such an appeal as this had become. Thus of the first sixty logical treatises, published during the last century or so, which were consulted for this purpose:—somewhat at random, as they happened to be most accessible:—it appeared that thirty-four appealed to the aid of diagrams, nearly all of these making use of the Eulerian Scheme.

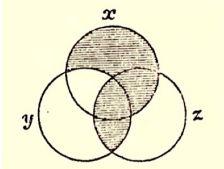
5 No Y is Z, All X is Y, hence No X is Z

C'est le second mode de la première figure des syllogismes aristotéliciens, baptisé Celarent par la logique scolastique. « Aucun animal n'est une pierre, tout homme est un animal, donc aucun homme n'est une pierre » (ne vous inquiétez pas pour ma santé mentale, l'exemple vient des Premiers Analytiques d'Aristote). Dans le schéma eulérien à gauche, les trois propositions sont représentées par trois cercles. Aucun Y n'est Z, donc les cercles y et z sont disjoints. Tout X est Y donc le cercle x est inclus dans le cercle y.

Dans un diagramme de Venn, les cercles sont toujours dessinés de la même façon. Les énoncés se traduisent en hachurant certaines parties de la figure. Tout X est Y donc on hachure les parties de x hors de y. Aucun Y n'est Z, donc l'intersection de y et z est hachurée. Les parties non hachurées indiquent ce qui reste possible.

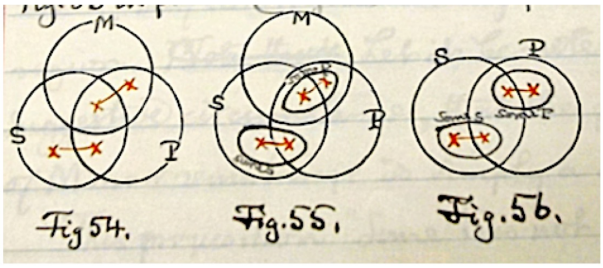
No Y is Z, All X is Y, hence No X is Z
Venn, Symbolic logic (1881)





6 On logical graphs (Ms 479, 1903)

On logical graphs (Ms 479, 1903)
Charles Peirce (1839–1914)

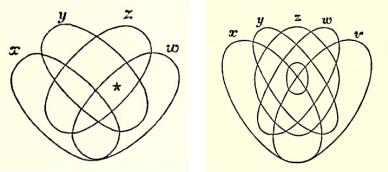


L'inconvénient des schémas eulériens est l'ambiguïté : il n'existe pas assez de positions relatives de trois cercles pour couvrir tous les cas de syllogismes. Il faut donc rajouter de l'information, soit en hachurant certaines parties comme Venn, soit en ajoutant des indications à l'intérieur des domaines. C'est ce qu'a fait Peirce dans plusieurs de ses manuscrits de logique.

Mais il existe un autre obstacle que ni Venn ni Peirce ne pouvaient contourner.

7 quatre ou cinq propositions

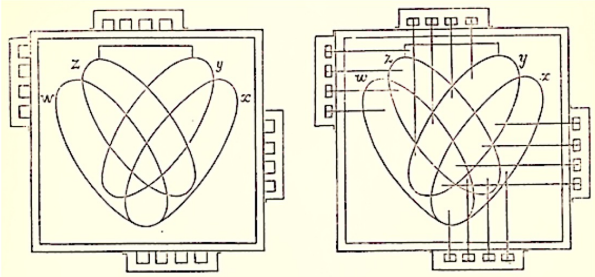
quatre ou cinq propositions
Venn, Symbolic logic (1881)



Les diagrammes deviennent beaucoup moins lisibles pour quatre ou cinq propositions, et quasiment impossibles à dessiner pour plus de cinq.

8 Machine logique

Machine logique
Venn, Symbolic logic (1881)



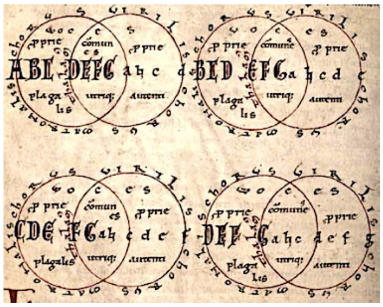
Venn en était parfaitement conscient, et il s'est d'ailleurs limité à quatre propositions dans son plan pour une machine logique. Ce plan était destiné à répondre au piano de Jevons, mais Venn ne croyait pas beaucoup aux machines logiques telles qu'elles étaient conçues à l'époque.

Mais revenons à ses diagrammes : même différents des schémas eulériens, étaient-ils vraiment nouveaux ? L'idée de cercles qui se coupent pour figurer des intersections, ne l'était certainement pas.

9 communes utrique

Regardez ces figures, extraites d'un manuscrit de musique du onzième siècle. Les couples de cercles figurent les deux voix d'un chant grégorien : le mode plagal et le mode authentique. Ils correspondent aux voix de femmes (chorus matronalis à gauche) et aux voix d'hommes (chorus virilis à droite). Les unes chantent à la quinte au dessus des autres. Chaque diagramme porte les sept notes d'une octave, de A à G plus trois notes de l'octave suivante. Dans la partie gauche figurent les notes propres au mode plagal, dans la partie droite les notes propres au mode authentique, et dans l'intersection les notes communes aux deux (communes utrique comme il est écrit).

communes utrique
Aribo, De musica (ca 1068)

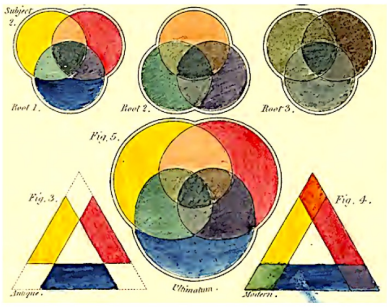


Le texte dit : « les huit tonalités s'étendent sur le même nombre d'octaves de sorte que les notes se groupent par deux comme le maître et l'élève, et leurs octaves sont reliées, de telle sorte que l'on observe facilement quelles notes sont exclusivement du mode plagal, quelles sont du mode authentique, et lesquelles sont communes aux deux. Le diagramme en huit cercles que nous donnons rend ceci parfaitement clair si on l'étudie de près. »

En effet, cette figure ne laisse aucune ambiguïté sur le concept d'intersection.

10 The three primitives and their descendants

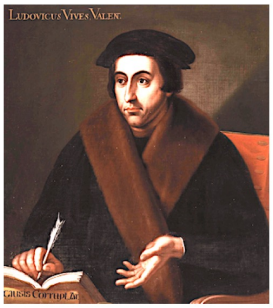
The three primitives and their descendants
Hayter, A new practical treatise on the three primitive colours (1826)



Tout comme ces représentations des trois couleurs primitives avec leurs mélanges, leurs descendants comme dit le texte. L'ouvrage date de 1826. C'est la même chose que le vitrail de Cambridge ; mais ce ne sont pas véritablement des diagrammes de Venn, ni même des diagrammes logiques à proprement parler.

11 Juan Luis Vives (1492–1540)

Juan Luis Vives (1492–1540)
De censura veri (1531)



Il m'est impossible de vous faire une liste exhaustive de tous ceux qui ont utilisé des représentations graphiques pour traduire des propositions logiques, ou même des syllogismes. Je vous montre ce Jean-Louis Vivès parce qu'il a eu une destinée particulière. Né à Valence dans une famille d'origine juive convertie de force en 1492, son père a été condamné par l'Inquisition et les restes de sa mère qui était déjà décédée, ont été déterrés pour être brûlés.

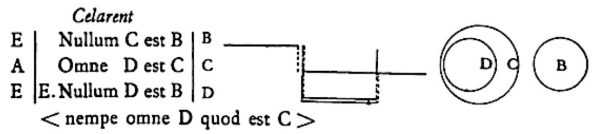
Le fils a fui l'Espagne pour étudier d'abord en France, puis se fixer à l'université de Louvain où il a été élève d'Érasme. Il est considéré comme un des premiers grands philosophes de la Renaissance, un de ceux qui ont initié le mouvement anti-scolastique.

12 Celarent (segments et cercles)

Quand on considère l'ampleur du travail de Leibniz en logique, travail dont je vous parle ailleurs, on peut sans injustice omettre ses quelques prédécesseurs.

Leibniz a anticipé de pratiquement deux siècles la logique mathématique. Il a inventé plusieurs systèmes de représentations schématiques. Vous en voyez deux ici, toujours sur l'exemple du syllogisme Celarent. Celui de droite est le schéma, dit (à tort) eulérien. Celui de gauche est à base de segments, pleins et pointillés. Il répond au problème d'ambiguïté de la représentation à base de cercles.

Celarent (segments et cercles)
Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716)

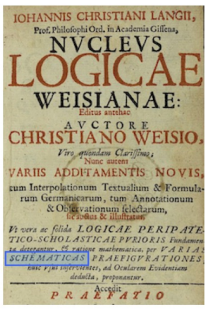


13 Nucleus logicæ weisianæ (1712)

Les manuscrits de Leibniz ont beau n'avoir pas été publiés, leur influence sur les contemporains est avérée. Le livre dont vous voyez la page de titre a été publié en 1712, soit quatre ans avant la mort de Leibniz, qui y est cité.

Dans le sous-titre, l'auteur annonce une « logique péripatético-scolastique, agrémentée de différentes représentations schématiques dont on déduit l'évidence visuelle ».

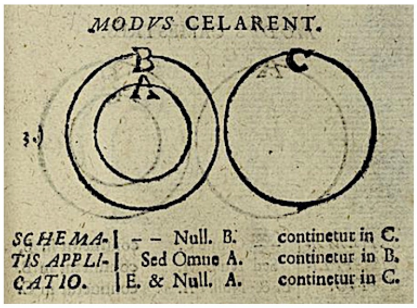
Nucleus logicæ weisianæ (1712)
Johann Christian Lange (1669–1756)



14 Modus Celarent (cercles)

On trouve dans ce livre la représentation à base de cercles, qualifiée par Venn de schéma eulérien.

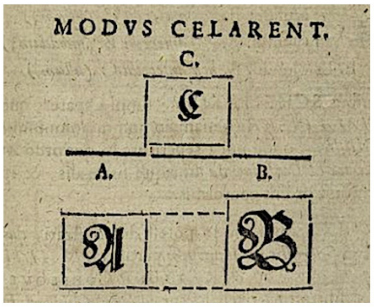
Modus celarent (cercles)
Lange, Nucleus logicæ weisianæ (1712)



15 Modus Celarent (segments)

On y trouve aussi des diagrammes combinant des traits pleins et pointillés, rappelant également ceux de Leibniz.

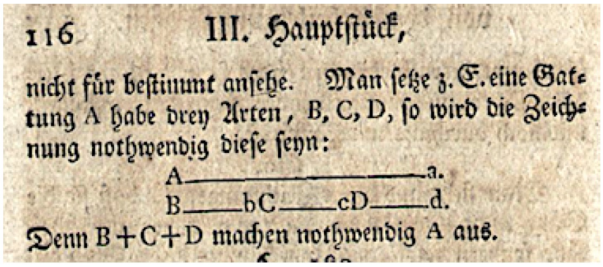
Modus celarent (segments)
Lange, Nucleus logicæ weisianæ (1712)



16 Réunion (segments)

Réunion (segments)
J. H. Lambert, Neues Organon (1764)

Les représentations par des segments ont été utilisées plus tard par Jean-Henri Lambert. C'est cet Alsacien qui a démontré l'irrationalité de π. Avant cela, il avait écrit les quelque mille pages de ce « Nouvel Organon », qui lui avait valu la recommandation d'Euler pour être recruté à l'Académie de Berlin, au grand dam de Frédéric II. Il y utilise les segments, comme ici pour symboliser une réunion.


116 III. Hauptstück,

nicht für bestimmt ansehe. Man setze z. E. eine Gattung A habe drey Arten, B, C, D, so wird die Zeichnung nothwendig diese seyn:

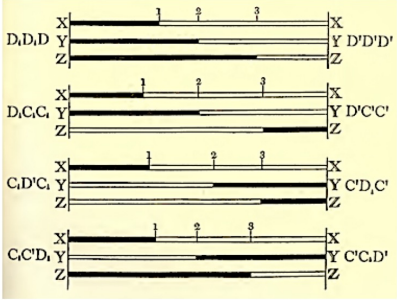
A——————a.
B——bC——cD——d.

Denn B+C+D machen nothwendig A aus.

17 Diagrammes par segments

Diagrammes par segments
De Morgan, Formal logic : or the calculus of inference (1847)

Les représentations par segments ont perduré jusqu'au dix-neuvième siècle, comme vous le voyez dans cette figure extraite de la « logique formelle » d'Augustus De Morgan.



18 Leonhard Euler (1707–1783)

Leonhard Euler (1707–1783)
Lettres à une princesse d'Allemagne (1760–1762)

Mais alors pourquoi donc est-il question de schémas eulériens depuis le début de cette histoire ? pourquoi ceux qui veulent faire snob parlent-ils encore de « diagrammes de Venn-Euler ou Euler-Venn » ?

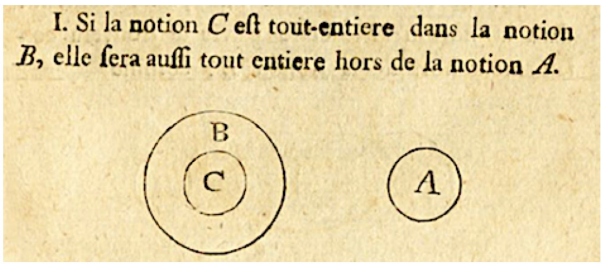
Cela vient de l'ouvrage le plus populaire d'Euler, ses « Lettres à une princesse d'Allemagne. »

19 Si la notion C est tout-entiere dans la notion B

Si la notion C est tout-entiere dans la notion B
Euler, Lettre CIII (17 février 1761)

Le titre complet est « Lettres écrites à une princesse d'Allemagne sur divers sujets de physique et de philosophie. » Sept lettres sont dédiées à la logique. Elles ont été écrites du 14 février au 7 mars 1761.

Comme toutes les autres lettres, elles sont particulièrement simples et claires. Elles font un usage abondant de ces fameux schémas, dont Euler ne prétend jamais qu'il les a inventés. Voyez ici l'exemple qui nous a servi depuis le début. Euler n'utilise pas les dénominations scolastiques, donc il n'est pas question de Celarent. Si aucun B n'est A, si la notion C est tout entière dans la notion B, elle sera aussi tout entière hors de la notion A. Euler ne juge pas utile d'ajouter un exemple. Il en donne à d'autres occasions :

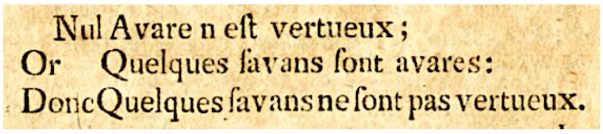

I. Si la notion *C* eſt tout-entiere dans la notion *B*, elle ſera auſſi tout entiere hors de la notion *A*.

20 Quelques savans ne sont pas vertueux

Quelques savans ne sont pas vertueux
Euler, Lettre CVI (28 février 1761)

« Nul avare n'est vertueux, or quelques savants sont avares, donc quelques savants ne sont pas vertueux. »

On se demande s'il avait un cas particulier en tête. Mais au fait, pourquoi à 53 ans, au sommet de sa carrière, Euler a-t-il écrit ce chef-d'œuvre de vulgarisation ? Il ne s'agit pas d'un artifice de style : ce sont de véritables lettres, adressées à une vraie princesse. Voici le début de la toute première, datée de Berlin le 19 avril 1760.

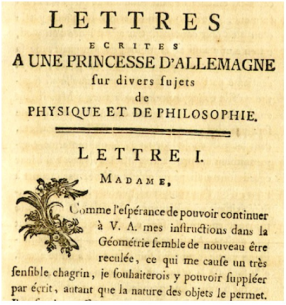

Nul Avare n eſt vertueux ;
Or Quelques ſavans ſont avares :
Donc Quelques ſavans ne ſont pas vertueux.

21 Première lettre (19 avril 1760)

Première lettre (19 avril 1760)
Euler, Lettres à une princesse d'Allemagne (1768)

« Madame, Comme l'espérance de pouvoir continuer à votre Altesse mes instructions dans la Géométrie semble de nouveau être reculée, ce qui me cause un très sensible chagrin, je souhaiterais pouvoir y suppléer par écrit, autant que la nature des objets le permet. »

Ce qui reculait l'espérance d'Euler, c'était la guerre de sept ans. La Prusse de Frédéric II était opposée à l'Autriche et à la Russie, et il s'en est fallu de peu qu'elle soit vaincue.


LETTRES
ECRITES
A UNE PRINCESSE D'ALLEMAGNE
sur divers sujets
de
PHYSIQUE ET DE PHILOSOPHIE.

LETTRE I.

MADAME,

Comme l'espérance de pouvoir continuer à V. A. mes instructions dans la Géométrie semble de nouveau être reculée, ce qui me cause un très sensible chagrin, je souhaiterois y pouvoir suppléer par écrit, autant que la nature des objets le permet.

22 Occupation de Berlin (octobre 1760)

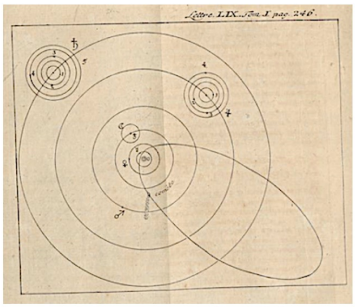
Occupation de Berlin (octobre 1760)
Kotzbue, Einnahme von Berlin (1848)

Jusqu'en 1762 au moins, la situation des Prussiens était plutôt précaire. Berlin a même été occupée par les troupes russes pendant quelques jours en octobre 1760. Tandis qu'Euler était resté dans la capitale, la princesse avait suivi la cour de la reine, exilée à Magdebourg.

23 Système solaire

Système solaire
Euler, Lettre LIX (17 septembre 1760)

Et c'est une grande chance. Pendant environ deux ans, Euler a écrit plusieurs lettres par semaine sur à peu près tous les sujets qui formaient la culture scientifique de l'époque. En plus de la logique, il y est question de philosophie, de théologie, de musique, ou d'astronomie, comme dans cette illustration du système solaire selon la théorie de Newton.



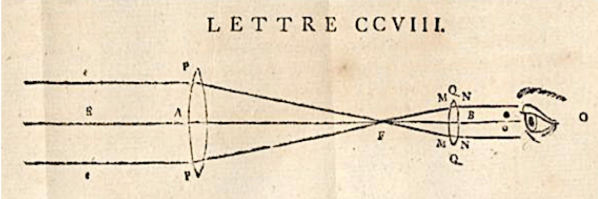
24 télescope

Plus de lettres sont consacrées à l'optique, qu'à la logique. Euler y décrit les propriétés de la lumière, la théorie de la vision, l'usage des différentes lentilles, jusqu'à la construction d'un télescope.

Les 234 lettres ont été rassemblées après l'arrivée d'Euler à Saint-Pétersbourg. Écrites originellement en français, qui était la langue officielle de la cour de Prusse, elles ont été traduites dans toutes les langues de l'Europe. Les éditions se sont succédées rapidement pendant au moins un siècle.

Je vous raconte ailleurs comment Condorcet, chargé en 1786 des cours de science au tout premier lycée parisien, délègue la corvée au jeune Lacroix, avec mission d'utiliser l'Algèbre d'Euler pour les mathématiques, et ses Lettres à une princesse d'Allemagne pour les autres sciences. Condorcet en profite pour préparer une nouvelle édition des Lettres, à laquelle il ajoute son éloge d'Euler.

télescope
Euler, Lettre CCVIII (23 février 1762)



25 ces lettres si simples, si faciles

« Le nom d'Euler, si grand dans les sciences, l'idée imposante que l'on se forme de ses ouvrages, destinés à développer ce que l'analyse a de plus épineux et de plus abstrait, donnent à ces lettres si simples, si faciles, un charme singulier. Ceux qui n'ont pas étudié les mathématiques, étonnés, flattés peut-être de pouvoir entendre un ouvrage d'Euler, lui savent gré de s'être mis à leur portée ; et ces détails élémentaires des sciences acquièrent une sorte de grandeur par le rapprochement qu'on en fait avec la gloire et le génie de l'homme illustre qui les a tracés. »

Tant que nous y sommes dans les éloges, voici celui de Nicolas Fuss, un académicien de Saint-Pétersbourg qui avait épousé une petite-fille d'Euler.

ces lettres si simples, si faciles
Condorcet, Éloge d'Euler (5 avril 1785)

Le nom d'Euler, si grand dans les sciences, l'idée imposante que l'on se forme de ses ouvrages, destinés à développer ce que l'analyse a de plus épineux et de plus abstrait, donnent à ces lettres si simples, si faciles, un charme singulier. Ceux qui n'ont pas étudié les mathématiques, étonnés, flattés peut-être de pouvoir entendre un ouvrage d'Euler, lui savent gré de s'être mis à leur portée ; et ces détails élémentaires des sciences acquièrent une sorte de grandeur par le rapprochement qu'on en fait avec la gloire et le génie de l'homme illustre qui les a tracés.

26 & même à la portée du beau sexe

« Pour ce qui regarde son contenu, il suffit de remarquer que, comme il est à la portée d'un plus grand nombre de lecteurs, et même à la portée du beau sexe, il n'a pas peu contribué à répandre le nom illustre de son auteur, et à le rendre cher à ceux qui ne peuvent le juger que d'après ses Lettres à une princesse d'Allemagne. »

J'espère que vous appréciez l'exploit. Le même Fuss en rapporte un autre, au moins aussi étonnant.

& même à la portée du beau sexe
Fuss, Éloge d'Euler (23 octobre 1783)

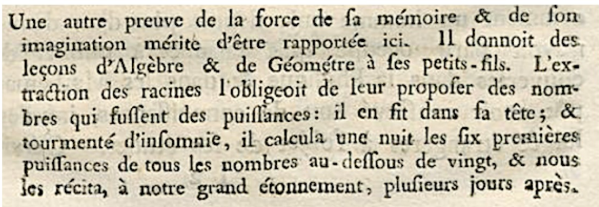
Pour ce qui regarde son contenu, il suffit de remarquer que, comme il est à la portée d'un plus grand nombre de lecteurs, & même à la portée du beau sexe, il n'a pas peu contribué à répandre le nom illustre de son Auteur, & à le rendre cher à ceux qui ne peuvent le juger que d'après ses lettres à une Princesse d'Allemagne.

27 les six premières puissances

« Une autre preuve de la force de sa mémoire et de son imagination mérite d'être rapportée ici. Il donnait des leçons d'algèbre et de géométrie à ses petits-fils. L'extraction des racines l'obligeait à leur en proposer des nombres qui fussent des puissances : il en fit dans sa tête ; et tourmenté d'insomnie, il calcula une nuit les six premières puissances de tous les nombres au-dessous de vingt, et nous les récita, à notre grand étonnement, plusieurs jours après. »

On peut considérer que les Lettres à une princesse d'Allemagne ont fait connaître Euler au grand public. L'épisode suivant vous donnera une idée de sa renommée vers la fin de sa vie.

les six premières puissances
Fuss, Éloge d'Euler (23 octobre 1783)


Une autre preuve de la force de ſa mémoire & de ſon imagination mérite d'être rapportée ici. Il donnoit des leçons d'Algèbre & de Géométre à ſes petits-fils. L'extraction des racines l'obligeoit de leur propoſer des nombres qui fuſſent des puiſſances: il en fit dans ſa tête; & tourmenté d'inſomnie, il calcula une nuit les ſix premières puiſſances de tous les nombres au-deſſous de vingt, & nous les récita, à notre grand étonnement, pluſieurs jours après.

28 Yekaterina Vorontsova Dashkova (1743–1810)

En janvier 1783, la grande Catherine nomme sa favorite, la princesse Dashkova à la tête de l'Académie des arts et des sciences. Vous la voyez ici représentée sur le socle du monument à Catherine II, à Saint-Pétersbourg.

Je vous raconte ailleurs comment quelques années plus tôt à Berlin, elle s'était montrée maladroite avec Lagrange qui l'avait rabrouée. Au moment de prendre ses fonctions à l'Académie de Saint-Pétersbourg, elle fait preuve d'un sens politique nettement plus aiguisé. Elle s'adresse à Euler.

« Je le priai de m'accompagner ce matin-là [...]. Il parut flatté de ma prière et consentit à se laisser mener jusqu'à ma voiture par son fils, le secrétaire perpétuel des académiciens résidants, que j'invitai également à monter, ainsi que son petit fils à qui était dévolue la tâche pieuse de conduire l'illustre aveugle. [...] »

Arrivés dans la salle de réunion, certains académiciens commencent à jouer des coudes : la princesse fait preuve d'autorité.

Yekaterina Vorontsova Dashkova (1743–1810)
Directrice de l'Académie de Saint-Pétersbourg (janvier 1783)

29 ce siège devra être considéré comme le plus élevé

« Je me tournai vers Euler et lui dis : « Asseyez-vous, Monsieur, où bon vous semblera ; quelque siège que vous preniez, ce siège devra être considéré comme le plus élevé. » Ce ne furent pas seulement le gendre d'Euler et son petit-fils qui ressentirent un vif sentiment de plaisir et de reconnaissance en m'entendant payer ce tribut inattendu d'admiration à son génie ; pas un des professeurs présents [...] qui ne sympathisât avec leur émotion et qui par des larmes ne reconnût hautement le mérite supérieur de ce vénérable savant. »

Mais au fait la princesse d'Allemagne destinataire des lettres du vénérable savant : sait-on au moins qui elle était ?

ce siège devra être considéré comme le plus élevé
Princesse Dashkova (1743–1810) Mémoires

Je me tournai vers Euler et lui dis : « Asseyez-vous, Monsieur, où bon vous semblera ; quelque siège que vous preniez, ce siège devra être considéré comme le plus élevé. » Ce ne furent pas seulement le gendre d'Euler et son petit-fils qui ressentirent un vif sentiment de plaisir et de reconnaissance en m'entendant payer ce tribut inattendu d'admiration à son génie ; pas un des professeurs présents [...] qui ne sympathisât avec leur émotion et qui par des larmes ne reconnût hautement le mérite supérieur de ce vénérable savant.

30 Friederike von Brandenburg-Schwedt (1745–1808)

La voici. C'était une nièce de Frédéric II, dont le père, amateur d'art et de sciences comme il était de mode à la cour de Prusse, avait connu Euler à Berlin.

Elle n'a laissé aucun écrit, on n'a pas trace de ses réponses aux lettres d'Euler, s'il y en a eu. Une question se pose : pourquoi donner à une jeune fille (elle n'avait pas encore 15 ans à la première lettre), une éducation aussi poussée ; au point de mobiliser le plus grand savant du moment pour lui enseigner les sciences ?

Friederike von Brandenburg-Schwedt (1745–1808)
Euler, Lettres à une princesse d'Allemagne (1760–1762)

31 Frauenstift Reichsabtei Herford (832–1810)

C'est que Frédérique Charlotte était destinée à diriger une institution prestigieuse, quasi-millénaire, l'abbaye impériale de femmes de Herford. Depuis des siècles, cette abbaye était la capitale d'une sorte de province indépendante, au sein du Saint-Empire romain germanique. Dotées d'un large degré d'autonomie politique, les abbesses n'avaient de comptes à rendre qu'au pape et à l'empereur. Elles siégaient à la Diète d'Empire, le Reichstag, l'assemblée chargée des affaires générales de l'Empire.

Cette petite princesse d'Allemagne, qu'Euler appelait « Votre Altesse », allait donc devenir une femme de pouvoir.

Pour terminer, je vous propose une petite révision :

Frauenstift Reichsabtei Herford (832–1810)
Friederike Charlotte von Brandenburg-Schwedt (1745–1808)

32 Trois princesses d'Allemagne

Voici trois princesses d'Allemagne. À gauche, Élisabeth de Bohème, partie de Prague à l'âge de deux ans suite aux déboires de son père au début de la guerre de Trente Ans. La famille s'est réfugiée à La Haye, aux Pays-Bas. Là elle fait la connaissance de Descartes, dont elle devient la première disciple. Bien après la mort de Descartes, elle sera, elle-aussi, abbesse de Herford.

La seconde princesse est la petite sœur de la précédente. Elle est devenue la première reine de Prusse. Pendant plusieurs dizaines d'années, elle a échangé des centaines de lettres avec Leibniz. La troisième est celle dont nous venons de parler, la correspondante d'Euler. Trois princesses, trois des plus grands savants de l'histoire, plus d'un siècle de philosophie et de science.

Trois princesses d'Allemagne
Elisabeth de Bohème, Sophie de Hanovre, Frédérique de Brandebourg-Schwedt

33 références

Sacrée coïncidence, tout de même ! Si vous songez que Descartes, Leibniz puis Euler, se sont mis « à la portée du beau sexe » pour leurs princesses, c'est peut-être qu'ils ne considéraient pas l'exploit comme si insurmontable, vous ne croyez pas ?

références

- R. E. Bradley, S. E. Sandifer (2007) *Leonhard Euler : life, work and legacy*, Amsterdam : Elsevier
- A. W. F. Edwards (2006) An eleventh-century Venn diagram, *BSHM Bulletin*, 21, 119–121
- D. M. Gabbay, F. J. Pelletier, J. Woods eds. (2012) *Logic : a history of its central concepts*, Amsterdam : Elsevier
- J. Lemanski (2020) Euler-type diagrams and the quantification of the predicate, *Journal of Philosophical Logic*, 49, 401–416
- D. E. Musielak (2014) Euler and the German Princess, *arXiv*, 1406.7417
- A.-V. Pietarinen (2016) Extensions of Euler diagrams in Peirce's four manuscripts on logical graphs, *in M. Jamnik et al. eds. Diagrams 2016, LNAI 9781*, Cham : Springer, 139–154