

0 La fin du suspense

Oh du suspense, il y en avait plus beaucoup. Déjà du temps des Grecs, on se doutait bien que la duplication du cube, la trisection de l'angle, et surtout la quadrature du cercle, n'étaient pas des problèmes plans, c'est-à-dire qu'il n'existait pas de construction exacte à la règle et au compas.

Mais il a fallu longtemps, très longtemps, pour qu'on considère l'impossibilité comme un problème mathématique en soi, un théorème que l'on pouvait chercher à démontrer. Il fallait avoir l'idée de sortir du cadre des constructions géométriques, il fallait de l'originalité.

histoires de géométrie

La fin du suspense

démontrer une impossibilité



hist-math.fr

Bernard YCART

1 Jean-Henri Lambert (1728–1777)

De l'originalité, Jean-Henri Lambert n'en manquait pas. Il était né à Mulhouse en Alsace. À l'époque, c'était une cité-état indépendante, alliée aux cantons suisses. Issu d'un milieu modeste, il quitte l'école à douze ans, mais ne cesse pas de se former lui-même en lisant tout ce qu'il peut. Devenu secrétaire d'un professeur de Bâle, il continue à étudier les mathématiques, la philosophie et l'astronomie. Recommandé à une famille noble installée à Coire dans le canton des Grisons, il devient précepteur de leurs trois fils, et continue à profiter de la bibliothèque familiale pour apprendre.

Entre vingt et trente ans, il commence à publier, rencontrer d'autres savants et se faire connaître.

Jean-Henri Lambert (1728–1777)



2 Neues Organon (1764)

Sa théorie de la perspective en 1759, mais surtout son *Nouvel Organon* en 1764 l'établissent définitivement comme philosophe de premier plan.

Il ne fallait pas manquer d'aplomb pour choisir ce titre là, par référence à l'*Organon* d'Aristote, et au *Novum Organum* de Francis Bacon. Mais le contenu philosophique des quelque mille pages écrites par Lambert étaient bien à la hauteur du titre. Du coup Euler, et d'autres Suisses installés en Prusse s'emploient à le faire recruter à l'Académie de Berlin.

Neues Organon (1764)

Jean-Henri Lambert (1728–1777)



3 Frédéric II de Prusse (1712–1786)

Et là, les choses se compliquent. Parce que le roi de Prusse Frédéric II, entend bien qu'on lui présente les nouvelles recrues de son académie ; Et, d'après un biographe, « la figure, la mine, la taille et surtout l'air, les manières, le ton et le maintien de cet homme ne pouvaient que le perdre sans ressources dans l'esprit du roi ». On essaie de ruser :

« Sire – dit-on au roi – M. Lambert ne peut être présenté à Votre Majesté, parce qu'il n'a pas encore sa malle et qu'il n'est qu'en simple voyageur. Vous vous moquez de moi, Messieurs ! et depuis quand s'imagine-t-on que ce sont les habits que je veux voir, et non les hommes. »

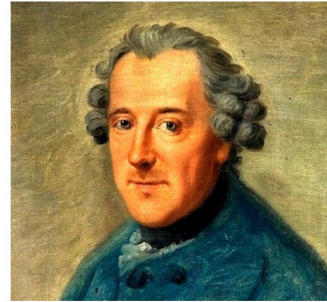
Il faut bien se résoudre : l'entrevue a lieu.

4 Frédéric II de Prusse (1712–1786)

« Bonsoir monsieur – dit le roi – faites-moi le plaisir de me dire quelle est la science que vous avez le plus particulièrement étudiée. – Toutes Sire. – Vous êtes donc aussi savant mathématicien ? – Oui Sire. – Et quel est le professeur qui vous a enseigné les mathématiques ? – Moi-même Sire. – Vous êtes donc un second Pascal ? – Oui Sire.

Frédéric II de Prusse (1712–1786)

Johan Georg Ziesenis (1763)



Frédéric II de Prusse (1712–1786)

Johann Heinrich Francke (1764)



5 Frédéric II de Prusse (1712–1786)

« Au dernier mot, le Roi tourna le dos et rentra dans son cabinet, ayant une peine infinie à s'empêcher de rire. Il dit à ses convives, quand il fut à souper : » Imaginez messieurs, que mes amis ont voulu ce soir me faire nommer à mon académie le plus grand imbécile que j'aie jamais vu ». »

Frédéric finit par se laisser faire, en janvier 1765. Il écrit tout de même son mécontentement à d'Alembert.

Frédéric II de Prusse (1712–1786)

Johann Heinrich Francke (1764)



6 Lettre à d'Alembert (janvier 1765)

« On m'a, pour ainsi dire, presque forcé de prendre la plus maussade créature qui soit dans l'univers pour la mettre dans notre académie. Il se nomme Lambert, et, quoique je puisse attester qu'il n'a pas le sens commun, on prétend que c'est un des plus grands géomètres de l'Europe. Mais, comme cet homme ignore les langues des mortels et qu'il ne parle qu'équations et algèbre, je ne me propose pas d'avoir l'honneur de m'entretenir avec lui. Cependant, jusqu'à M. Euler, toute l'académie est à genoux devant lui, et cet anormal, tout crotté du borbier de la plus crasse pédanterie, reçoit ces hommages comme Caligula recueillait ceux du peuple romain, chez lequel il voulait passer pour Dieu. »

D'Alembert, qui reçoit de Berlin les échos les plus divers, tient à assumer son rôle de conseiller scientifique de Frédéric avec sérieux. En juillet 1769, il demande son avis à Lagrange. La réponse est édifiante.

7 Lettre à d'Alembert (15 juillet 1769)

« M. Lambert, sur qui vous souhaitez savoir mon sentiment, est sans contredit un des meilleurs sujets de notre Académie; il est très laborieux et soutient presque seul notre classe de physique. Il possède assez bien l'analyse, mais son fort est la physique, de laquelle il a donné un ouvrage estimé, intitulé Photometria, c'est-à-dire de la mesure de la lumière; il y a surtout un excellent mémoire de lui sur l'aimant dans le volume de 1766. »

8 Jean-Henri Lambert à son bureau

« Au reste, il y a quelque chose de singulier dans son maintien et dans sa conversation qui déplaît au premier abord, et je ne suis pas surpris que le roi ne l'ait pas goûté, ayant eu moi-même de la peine à m'accomoder à ses manières. Il était ou du moins il me parut si plein de lui-même, lorsque j'arrivai ici, que je pris le parti de ne pas le fréquenter, mais en même temps de le rabaisser : cela l'a rendu beaucoup plus traitable, et à présent nous sommes assez bons amis. Il n'a que 500 écus de l'académie, et, si l'occasion vous venait de lui procurer une augmentation, je vous assure que vous feriez une très bonne œuvre, car il est certainement un de ceux à qui notre académie doit le plus. »

D'Alembert suit l'avis de Lagrange, et obtient de Frédéric II une augmentation pour Lambert. La réaction de l'intéressé est à la mesure de son inaptitude sociale.

Lettre à d'Alembert (janvier 1765)

Frédéric II de Prusse (1712-1786)

On m'a, pour ainsi dire, presque forcé de prendre la plus maussade créature qui soit dans l'univers pour la mettre dans notre Académie. Il se nomme Lambert, et, quoique je puisse attester qu'il n'a pas le sens commun, on prétend que c'est un des plus grands géomètres de l'Europe. Mais, comme cet homme ignore les langues des mortels et qu'il ne parle qu'équations et Algèbre, je ne me propose pas d'avoir l'honneur de m'entretenir avec lui. [...] Cependant, jusqu'à M. Euler, toute l'Académie est à genoux devant lui, et cet anormal, tout crotté du borbier de la plus crasse pédanterie, reçoit ces hommages comme Caligula recueillait ceux du peuple romain, chez lequel il voulait passer pour Dieu.

Lettre à d'Alembert (15 juillet 1769)

Joseph Louis Lagrange (1736-1813)

M. Lambert, sur qui vous souhaitez de savoir mon sentiment, est sans contredit un des meilleurs sujets de notre Académie; il est très laborieux et soutient presque seul notre Classe de Physique. Il possède assez bien l'Analyse, mais son fort est la Physique, de laquelle il a donné un Ouvrage estimé, intitulé Photometria, c'est-à-dire de la mesure de la lumière; il y a surtout un excellent Mémoire de lui sur l'aimant dans le Volume de 1766.

Jean-Henri Lambert à son bureau

Lagrange, Lettre à d'Alembert (15 juillet 1769)



9 Lambert dans un cercle de savants et d'étudiants

« Il est fort singulier que le roi publie une semblable nouvelle sans me consulter. Au bout du compte, cela me regarde, et l'on devrait avant tout s'informer si j'en voulais ou non ; il n'est pas sûr que je l'accepte, vu surtout que je n'en ai pas besoin. »

Son entourage réussit à le raisonner, et il écrit même à d'Alembert pour le remercier de son intervention. C'est deux ans avant cet épisode que se situe l'article qui nous intéresse dans cette histoire.

Lambert dans un cercle de savants et d'étudiants

Jean-Henri Lambert (1728–1777)



10 Quantités transcendentes (1767)

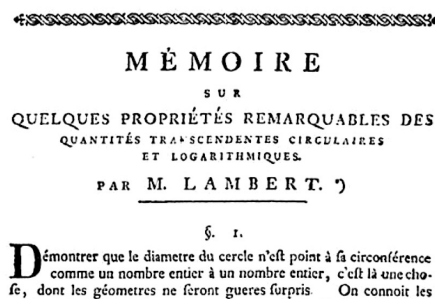
« Mémoire sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendentes circulaires et logarithmiques ». Regardez la première phrase :

« Démontrer que le diamètre du cercle n'est point à sa circonférence comme un nombre entier à un nombre entier (traduisez : démontrer que π est irrationnel), c'est là une chose dont les géomètres ne seront guère surpris. »

En effet, il y a longtemps que personne n'en doutait. Les premiers à l'avoir énoncé clairement sont les frères Banu Musa. Lambert rappelle les raisons heuristiques de croire à l'irrationalité de π , puis il explique pourquoi il ne faut pas s'en contenter.

Quantités transcendentes (1767)

Jean-Henri Lambert (1728–1777)



11 Cette démonstration doit être si rigide...

« Quelque vague que soit ce raisonnement, il y a néanmoins des cas où on ne demande pas d'avantage. Mais ces cas ne sont pas celui de la quadrature du cercle. La plupart de ceux qui s'acharnent à la chercher, le font avec une ardeur, qui les entraîne quelque fois jusqu'à révoquer en doute les vérités les plus fondamentales de la géométrie. Pourrait-on croire qu'ils se trouveraient satisfaits par ce que je viens de dire ? Il y faut toute autre chose. Et s'agit-il de démontrer, qu'en effet le diamètre n'est pas à la circonférence comme un nombre entier à un nombre entier, cette démonstration doit être si rigide, qu'elle ne le cède à aucune autre démonstration géométrique. »

Il faut dire que quelques années auparavant on a assisté à une augmentation des propositions de quadratures, qui a conduit l'Académie des sciences de Paris, à déclarer qu'elle n'en examinerait plus aucune. Cela dit, Lambert se fait des illusions s'il pense décourager les quadrateurs. Même si l'irrationalité de π n'est qu'un cas particulier du magnifique résultat qu'il propose. Il démontre en effet qu'un arc de cercle a un rapport rationnel au rayon, si et seulement si sa tangente est irrationnelle. Comme la tangente de $\pi/4$ vaut 1, l'irrationalité de $\pi/4$, donc de π , en découle.

Comment Lambert démontre-t-il cela ? Il y a deux ingrédients dans son raisonnement, et aucun des deux n'est nouveau.

Cette démonstration doit être si rigide...

Lambert, Mémoire sur quelques propriétés remarquables... (1767)

§. 2. Quelque vague que soit ce raisonnement, il y a néanmoins des cas où on ne demande pas d'avantage. Mais ces cas ne sont pas celui de la quadrature du cercle. La plupart de ceux qui s'acharnent à la chercher, le font avec une ardeur, qui les entraîne quelque fois jusqu'à révoquer en doute les vérités les plus fondamentales & les mieux établies de la géométrie. Pourroit-on croire, qu'ils se trouveroient satisfaits par ce que je viens de dire ? Il y faut toute autre chose. Et s'agit-il de démontrer, qu'en effet le diamètre n'est pas à la circonférence comme un nombre entier à un nombre entier, cette démonstration doit être si rigide, qu'elle ne le cède à aucune démonstration géométrique. Et avec tout cela je reviens à dire, que

12 La fraction continue très simple

Le premier ingrédient est une décomposition en fraction continue de tangente v . Les fractions continues ont été théorisées par Euler trente ans auparavant. Ce développement en fraction continue de la tangente, Lambert le calcule en développant en série le sinus au numérateur, le cosinus au dénominateur, et en effectuant des divisions euclidiennes successives de l'un par l'autre.

Alors, arrive le second argument.

La fraction continue très simple

Lambert, Mémoire sur quelques propriétés remarquables... (1767)

n'inspire, & que de la sorte on aura pour la tangente exprimée par l'arc la fraction continue très simple

$$\text{tang } v = \frac{1}{1 : v - \frac{1}{3 : v - \frac{1}{5 : v - \frac{1}{7 : v - \frac{1}{9 : v - \dots}}}}}$$

13 Cette méthode étant connue depuis Euclide...

Cette méthode étant connue depuis Euclide, qui en fait la deuxième proposition de son septième livre, je ne m'arrêterai pas à la démontrer de nouveau. Mais il convient de remarquer que, tandis que Euclide ne l'applique qu'à des nombres entiers et rationnels, il faudra que je m'en serve d'une autre façon.

La proposition deux du livre sept, c'est ce que nous appelons l'algorithme d'Euclide pour trouver le pgcd de deux nombres. Là où Lambert se trompe, c'est que son algorithme, Euclide ne l'applique pas qu'à des nombres entiers. Le voici au début du livre dix.

Cette méthode étant connue depuis Euclide...

Lambert, Mémoire sur quelques propriétés remarquables... (1767)

Cette méthode étant connue depuis Euclide, qui en fait la 2^{me} prop. de son 7^{me} Livre, je ne m'arrêterai pas à la démontrer de nouveau. Mais il convient de remarquer que, tandis que Euclide ne l'applique qu'à des nombres entiers & rationnels, il faudra que je m'en serve d'une autre façon, lorsqu'il s'agit d'en faire l'application à des quantités, dont on ignore encore si elles seront rationnelles ou non? Voici donc le procédé qui conviendra au cas dont il est ici question.

14 L'algorithme d'Euclide (anthypérèse)

« Deux grandeurs inégales étant proposées, et si la plus petite étant toujours retranchée de la plus grande, le reste ne mesure jamais le reste précédent ; ces grandeurs seront incommensurables. »

L'idée clé du procédé d'Euclide est d'itérer entre deux éléments d'une paire l'opération consistant à retrancher la plus petite de la plus grande. Entre deux nombres, la soustraction itérée est la division euclidienne. Mais entre deux grandeurs plus générales, deux cas se produisent. Soit l'algorithme se termine en un nombre fini de pas, soit il continue indéfiniment. Dans le second cas, les deux grandeurs sont incommensurables. Ce vieux procédé, les Grecs l'appelaient « anthypérèse ». Lambert le remet au goût du jour vingt siècles après Euclide.

En terminant son article, Lambert se fait moins rigoureux, mais beaucoup plus novateur.

L'algorithme d'Euclide (anthypérèse)

Éléments, Livre X, Proposition II

Deux grandeurs inégales étant proposées, et si la plus petite étant toujours retranchée de la plus grande, le reste ne mesure jamais le reste précédent ; ces grandeurs seront incommensurables.

15 La longueur de l'arc sera une quantité transcendente

« Il en sera de même si les deux points extrêmes de l'arc sont donnés, j'entends par des quantités rationnelles ou radicales. Car dans ce cas, la longueur de l'arc sera une quantité transcendente : ce qui veut dire irréductible à quelque quantité rationnelle ou radicale, et par là elle n'admet aucune construction. »

Si les deux extrémités sont constructibles, la longueur ne l'est pas : au passage, Lambert affirme que tout point constructible est solution d'une équation algébrique, ce dont personne ne doutait, mais surtout il donne une définition de la transcendence, et trace le chemin vers la solution de la quadrature du cercle. Ce chemin allait encore être long d'un siècle.

De plus, la quadrature du cercle n'était pas le seul problème ouvert hérité des Grecs. Il y avait aussi la duplication du cube et la trisection de l'angle.

16 La Géométrie (1637)

La raison pour laquelle la duplication du cube et la trisection de l'angle ne sont pas réalisables à la règle et au compas était connue depuis longtemps. On la trouve clairement expliquée dans la Géométrie de Descartes en 1637. Si une longueur est constructible, elle est solution d'une équation du second degré, dans laquelle n'interviennent que des grandeurs constructibles. Or la duplication du cube et la trisection reviennent chacune à résoudre une équation du troisième degré, ce que l'on appelle depuis les Grecs un problème solide. Descartes ne mâche pas ses mots.

« Lorsqu'on ne trouve aucun binôme, qui puisse ainsi diviser toute la somme de l'équation proposée, il est certain que le problème qui en dépend est solide. Et ce n'est pas la moindre faute après cela, d'essayer de le construire dans y employer que des cercles et des lignes droites, que ce serait d'employer des sections coniques à construire ceux auxquels on n'a besoin que de cercles. Car enfin tout ce qui témoigne quelque ignorance s'appelle faute. »

17 Histoire des Recherches... (1754)

Quand Montucla écrit son histoire des recherches sur la quadrature du cercle en 1754, plus d'un siècle est passé depuis Descartes. Montucla ajoute à la fin de son livre un appendice sur la duplication et la trisection. Il y réexplique l'argument de Descartes.

La longueur de l'arc sera une quantité transcendente

Lambert, Mémoire sur quelques propriétés remarquables... (1767)

réductible à une des lignes que je viens de nommer. Mais la longueur de l'arc étant donnée par des quantités rationnelles ou radicales, ces lignes seront transcendentes, & par là même irréductibles à quelque quantité rationnelle ou radicale. Il en sera de même si les deux points extrêmes de l'arc sont donnés, j'entends par des quantités rationnelles ou radicales. Car, dans ce cas, la longueur de l'arc sera une quantité transcendente : ce qui veut dire irréductible à quelque quantité rationnelle ou radicale, & par là elle n'admet aucune construction géométrique.

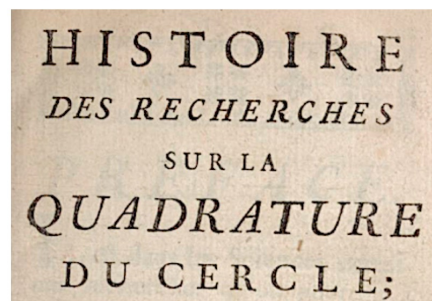
La Géométrie (1637)

René Descartes (1596-1650)

Mais lorsqu'on ne trouve aucun binôme, qui puisse ainsi diviser toute la somme de l'Equation proposée, il est certain que le Problème qui en dépend est solide. Et ce n'est pas vne moindre faute après cela, de tâcher a le construire sans y employer que des cercles & des lignes droites, que ce seroit d'employer des sections coniques a construire ceux auxquels on n'a besoin que de cercles. Car enfin tout ce qui témoigne quelque ignorance s'appelle faute.

Histoire des Recherches... (1754)

Jean-Étienne Montucla (1725-1799)



18 Histoire des Recherches... (1754)

« Je crois qu'il est à propos de le faire ici avec quelque détail, afin de ne laisser aucun doute à ce sujet. Je pourrais sans doute m'en dispenser si je n'écrivais que pour des géomètres habiles, mais il est des endroits dans cet ouvrage qui sont particulièrement destinés à l'instruction des plus médiocres. »

Suivez son regard, et souvenez-vous que Montucla écrit pour décourager les quadratureurs. Mais l'instruction des plus médiocres n'implique pas que l'on transforme un argument heuristique en théorème mathématique. Cela ne viendra à l'idée de personne avant le dix-neuvième siècle.

Histoire des Recherches... (1754)

Jean-Étienne Montucla (1725-1799)

cette vérité, je crois qu'il est à propos de le faire ici avec quelque détail, afin de ne laisser aucun doute à ce sujet. Je pourrais sans doute m'en dispenser si je n'écrivois que pour les Géomètres habiles, mais il est des endroits dans cet ouvrage qui sont particulièrement destinés à l'instruction des plus médiocres.

19 Disquisitiones Arithmeticae (1801)

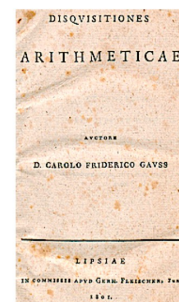
C'est en 1799 que Ruffini se préoccupe de démontrer que l'équation du cinquième degré n'est pas résoluble par radicaux dans le cas général. Il sera suivi par Abel puis Galois. Un autre problème reste pendant, depuis encore plus longtemps : la division du cercle.

Le quatrième livre des éléments d'Euclide est entièrement consacré aux polygones inscrits ou circonscrits à un cercle. On y apprend donc comment diviser une circonférence en un nombre fixé de segments égaux. Euclide traite le cas de trois, quatre, cinq, six, quinze côtés, et ne va pas plus loin. Depuis Euclide, tout le monde croyait qu'il n'était pas possible de diviser le cercle en d'autres nombres que trois, cinq, leurs multiples par les puissances de deux.

Jusqu'à ce que Gauss, à 19 ans, montre comment construire un polygone à 17 côtés. Quelques années plus tard, le dernier chapitre des « Recherches arithmétiques » va beaucoup plus loin. Gauss y donne une condition nécessaire et suffisante sur l'entier n pour que le polygone à n côtés soit constructible. Il n'en revient pas lui-même :

Disquisitiones Arithmeticae (1801)

Carl Friedrich Gauss (1777-1855)



20 Magnopere sane est mirandum

« Il y a vraiment lieu de s'étonner que la divisibilité du cercle en trois et cinq parties ayant été connue dès le temps d'Euclide, on n'ait rien ajouté à ces découvertes dans un intervalle de 2000 ans, et que tous les géomètres aient annoncé comme certain, qu'excepté ces divisions et celles qui s'en déduisent, on ne pouvait en effectuer aucune par des constructions géométriques. »

C'est une chose de s'étonner, mais Gauss avait-il une démonstration ? Le connaissant, on peut penser que oui, surtout quand il se met à écrire en majuscules.

Magnopere sane est mirandum

Gauss, Disquisitiones Arithmeticae (1801)

Magnopere sane est mirandum, quod, quum iam Euclidis temporibus circuli diuisibilitas geometrica in tres et quinque partes nota fuerit, nihil his inuentis interuallo 2000 annorum adiectum sit, omnesque geometrae tamquam certum

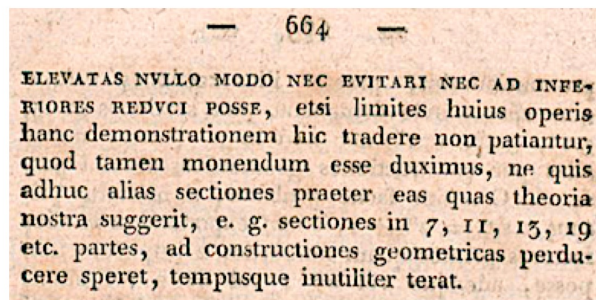
21 etsi limites huius operis

« Nous pouvons démontrer en toute rigueur que ces équations ne sauraient en aucune manière être évitées ni abaissées, et quoique les limites de cet ouvrage ne nous permettent pas de développer ici la démonstration de cette vérité, nous avons cru devoir en avertir, pour éviter que quelqu'un ne voulût essayer de réduire à des constructions géométriques d'autres divisions que celles données par notre théorie, et n'employât inutilement son temps à cette recherche. »

Ça, c'est gentil ! En même temps, si les limites de cet ouvrage avaient permis à Gauss de donner la démonstration qu'il avait probablement, je n'aurais certainement pas eu l'occasion de vous parler de Pierre-Laurent Wantzel.

etsi limites huius operis

Gauss, *Disquisitiones Arithmeticae* (1801)



22 Recherches sur les moyens de reconnaître (1837)

Le titre complet de son article est « Recherches sur les moyens de reconnaître si un problème de géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas ». Regardez l'énoncé du résultat principal.

« Tout problème qui conduit à une équation irréductible dont le degré n'est pas une puissance de deux, ne peut pas être résolu avec la ligne droite et le cercle. Ainsi la duplication du cube, la trisection de l'angle, etc. Il nous semble qu'il n'avait pas encore été démontré rigoureusement que ces problèmes, si célèbres chez les anciens, ne fussent pas susceptibles d'une solution par les constructions géométriques auxquelles ils s'attachaient particulièrement. »

Et de rajouter en prime le problème de la division du cercle déjà traité par Gauss. Tout de même, à vingt-trois ans, mettre un point final à des problèmes vieux de plus de deux mille ans, cela méritait la célébrité, vous ne trouvez pas ? Et bien non, pas vraiment. Ce n'est qu'au vingtième siècle que l'exploit de Wantzel a été réévalué, après avoir été oublié pendant pratiquement un siècle.

Quant à Wantzel lui-même, il est mort à trente-trois ans. Son ami Saint-Venant avait sa petite idée sur les causes de sa mort.

Recherches sur les moyens de reconnaître (1837)

Pierre-Laurent Wantzel (1814-1848)

Il résulte immédiatement du théorème précédent que tout problème qui conduit à une équation irréductible dont le degré n'est pas une puissance de 2, ne peut être résolu avec la ligne droite et le cercle. Ainsi la duplication du cube, qui dépend de l'équation $x^3 - 2a^3 = 0$ toujours irréductible, ne peut être obtenue par la Géométrie élémentaire. Le problème des deux moyennes proportionnelles, qui conduit à l'équation $x^3 - a^3b = 0$ est dans le même cas toutes les fois que le rapport de b à a n'est pas un cube. La trisection de l'angle dépend de l'équation $x^3 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}a = 0$; cette équation est irréductible si elle n'a pas de racine qui soit une fonction rationnelle de a et c'est ce qui arrive tant que a reste algébrique; ainsi le problème ne peut être résolu en général avec la règle et le compas. Il nous semble qu'il n'avait pas encore été démontré rigoureusement que ces problèmes, si célèbres chez les anciens, ne fussent pas susceptibles d'une solution par les constructions géométriques auxquelles ils s'attachaient particulièrement.

23 Biographie de Wantzel (1848)

« Il travaillait ordinairement le soir, ne se couchant que bien avant dans la nuit, lisait ensuite, et ne dormait que quelques heures d'un sommeil agité, faisant alternativement abus de café et d'opium; ne prenant ses repas, jusqu'à son mariage, qu'à des heures mal réglées. Il se fiait sans mesure à une constitution naturellement très forte, à laquelle il faisait braver à plaisir tous les genres d'épreuve. Il en a tristement fait porter la peine à ceux qui pleurent sa fin prématurée. »

C'est bien triste, et ça n'a pas fait avancer la quadrature du cercle. Le problème restait entier. Les problèmes résolus par Gauss et Wantzel étaient plus faciles car on connaissait les équations algébriques dont ils étaient solution. Il suffisait de montrer qu'elles étaient irréductibles; Pour la quadrature du cercle, l'enjeu était de démontrer que π n'était solution d'aucune équation à coefficients rationnels.

Biographie de Wantzel (1848)

Adhémar Barré de Saint-Venant (1797-1886)

de l'amitié. Il travaillait ordinairement le soir, ne se couchant que bien avant dans la nuit, lisait ensuite, et ne dormait que quelques heures d'un sommeil agité, faisant alternativement abus de café et d'opium; ne prenant ses repas, jusqu'à son mariage, qu'à des heures mal réglées. Il se fiait sans mesure à une constitution naturellement très forte, à laquelle il faisait braver à plaisir tous les genres d'épreuve. Il en a tristement fait porter la peine à ceux qui pleurent sa fin prématurée.

24 Charles Hermite (1822–1901)

Charles Hermite, c'est un peu le dindon de la farce. Il a vraiment fait le plus difficile : en 1873, il avait démontré la transcendance de e : la base des logarithmes népériens n'est solution d'aucune équation algébrique à coefficients entiers. Regardez comment il l'exprime.

Charles Hermite (1822–1901)



25 Sur la fonction exponentielle (1873)

Il démontre l'impossibilité de toute relation de la forme $N + e^a N_1 + \dots$ et cetera, où les coefficients sont entiers. La démonstration est difficile. Hermite part des fractions continues comme Euler et Lambert ; mais ensuite, le raisonnement utilise des intégrales, des équations différentielles, des déterminants. Dans la variété des techniques utilisées, il n'y a strictement rien de géométrique.

Alors comment imaginer que la même démonstration, ou presque, serve à la transcendance de π ? Hermite lui-même n'y croyait pas.

Sur la fonction exponentielle (1873)

Charles Hermite (1822–1901)

» Il en résulte qu'on ne peut, en général, admettre que le déterminant proposé Δ s'annule, car les quantités $P = f(p)$, $Q = f(q)$, ..., fonctions entières semblables des racines $p, q, \dots$, de l'équation dérivée $f'(x) = 0$ seront comme ces racines différentes entre elles. C'est ce qu'il fallait établir pour démontrer l'impossibilité de toute relation de la forme

$$N + e^a N_1 + e^b N_2 + \dots + e^k N_n = 0,$$

et arriver ainsi à prouver que le nombre e ne peut être racine d'une équation algébrique de degré quelconque à coefficients entiers.

26 Lettre à Carl Borchardt (31 août 1873)

« Je ne me hasarderai point à la recherche d'une démonstration de la transcendance du nombre π . Que d'autres tentent l'entreprise, nul ne sera plus heureux que moi de leur succès, mais croyez-m'en, mon cher ami, il ne laissera pas de leur en coûter quelques efforts. »

Quelques efforts, c'est vrai, mais pas tant que ça. Voici une note insérée dans les Comptes Rendus de l'Académie des sciences en 1882.

Lettre à Carl Borchardt (31 août 1873)

Charles Hermite (1822–1901)

Je ne me hasarderai point à la recherche d'une démonstration de la transcendance du nombre π . Que d'autres tentent l'entreprise, nul ne sera plus heureux que moi de leur succès, mais croyez-m'en, mon cher ami, il ne laissera pas de leur en coûter quelques efforts.

27 Sur le rapport de la circonférence au diamètre (1882)

Sur le rapport de la circonférence au diamètre. Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite. Note de M. Lindemann.

Celui-ci dit : « L'étude de cet important Mémoire m'a conduit à chercher une généralisation de ce résultat en remplaçant tous les nombres entiers par des irrationnelles algébriques quelconques. »

Et ça marche ! Les techniques de Hermite généralisées par Lindemann permettent de démontrer que e^α est transcendant si α est un nombre algébrique. Mais $e^{i\pi}$ n'est pas transcendant, puisqu'il vaut moins 1. Donc π n'est pas algébrique : fin du suspense !

Sur le rapport de la circonférence au diamètre (1882)

Ferdinand von Lindemann (1852–1939)

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — Sur le rapport de la circonférence au diamètre, et sur les logarithmes népériens des nombres commensurables ou des irrationnelles algébriques. Note de M. F. LINDEMANN. (Extrait d'une Lettre adressée à M. Hermite.)

« Dans votre Mémoire sur la fonction exponentielle, vous démontrez l'impossibilité d'une relation de la forme

$$(1) \quad N_0 e^{z_0} + N_1 e^{z_1} + \dots + N_n e^{z_n} = 0,$$

les exposants $z_0, z_1, \dots, z_n$ étant supposés entiers, ainsi que les coefficients $N_0, N_1, \dots, N_n$. L'étude de cet important Mémoire m'a conduit à chercher une généralisation de ce résultat en remplaçant tous les nombres entiers par des irrationnelles algébriques quelconques. Cependant on ne peut pas

28 Ferdinand von Lindemann (1852–1939)

Bien sûr, il y a eu de méchantes langues pour jalouser la chance de Lindemann, qui selon eux, ne méritait pas ce beau succès autant que Hermite.

Mettons. Mais passer sa thèse sous la direction de Félix Klein, puis diriger celle de David Hilbert, ce n'est pas rien tout de même.

À ce propos, la démonstration de Lindemann a été retravaillée et grandement simplifiée, d'abord par Weierstrass, puis par Hilbert et Klein. Voici ce que Stieltjes écrivait à Hermite en 1893.

Ferdinand von Lindemann (1852–1939)



29 Lettre à Hermite (8 mars 1893)

« C'est grâce à cette intervention de quelques vérités arithmétiques que M. Hilbert obtient une démonstration si simple. Dans quelques années, je pense que les candidats à l'École polytechnique devront savoir démontrer l'impossibilité de la quadrature du cercle. »

C'était aussi ce que pensait Félix Klein.

Lettre à Hermite (8 mars 1893)

Thomas Johannes Stieltjes (1856–1894)

C'est grâce à cette intervention de quelques vérités arithmétiques que M. Hilbert obtient une démonstration si simple. Dans quelques années, je pense que les candidats à l'École Polytechnique devront [savoir démontrer l'impossibilité](#) de la quadrature du cercle.

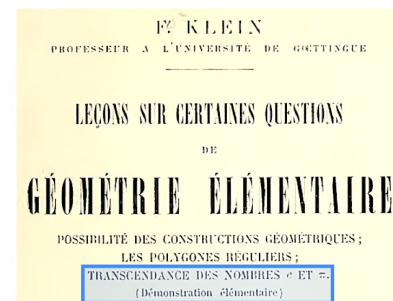
30 Certaines questions de géométrie élémentaire (1896)

« Leçons sur certaines questions de géométrie élémentaire ». Ce livre, qui se veut accessible, fait un bilan complet des constructions géométriques. Le point final à deux mille ans de tentatives diverses.

Croyez-vous vraiment ?

Certaines questions de géométrie élémentaire (1896)

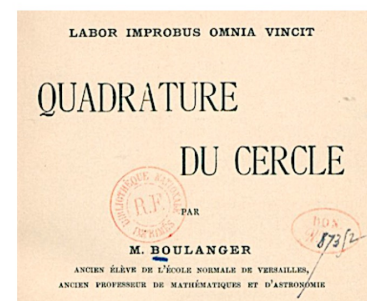
Félix Klein (1849–1925)



31 Quadrature du cercle (1898)

« Un travail acharné vient à bout de tout », annonce la devise latine. Le quadrateur est un certain M. Boulanger, qui s'annonce ancien élève de l'École normale de Versailles, et ancien professeur de mathématiques et d'astronomie. Écoutez-le.

Quadrature du cercle (1898)



32 dicté par l'ignorance ou la mauvaise foi

dicté par l'ignorance ou la mauvaise foi

Boulanger, Quadrature du cercle (1898)

« En conséquence de ce que nous venons d'établir, nous n'hésitons pas à affirmer, que toute discussion, toute contestation tendant à combattre ou à renverser notre théorie, avant d'en avoir démontré péremptoirement la fausseté, ne peut être considérée que comme raisonnement sophistique, dicté par l'ignorance ou la mauvaise foi. »

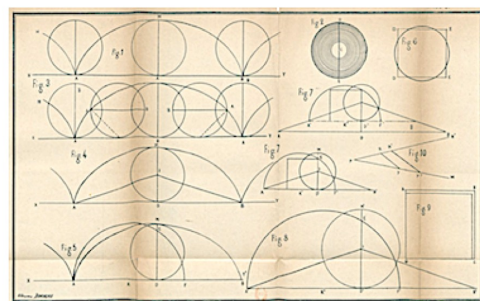
En conséquence de ce que nous venons d'établir, nous n'hésitons pas à affirmer, que toute discussion, toute contestation tendant à combattre ou à renverser notre théorie, avant d'en avoir démontré péremptoirement la fausseté, ne peut être considérée que comme raisonnement sophistique, dicté par l'ignorance ou la mauvaise foi.

33 Cycloïde

Cycloïde

Boulanger, Quadrature du cercle (1898)

Il a raison : il faut être ignorant, de mauvaise foi ou les deux pour ne pas s'incliner devant son idée de génie de faire rouler un cercle sur une droite. Même que ça s'appelle une cycloïde. Il faut croire que Hermite et Lindemann n'en avaient jamais entendu parler. C'est dommage tout de même : dire que la vraie solution était si simple !



34 références

« Tels sont les fruits de mes opiniâtres et pénibles recherches sur la solution du plus beau des problèmes, regardé comme irrésoluble depuis l'aurore des sciences jusqu'ici. J'attendrai dans le calme, le recueillement et l'espoir de ma confiance en votre justice, le prix qu'il plaira à l'équité et à la reconnaissance nationale d'accorder à l'auteur. »

Non, non, ce n'est pas moi qui ai confiance en votre justice, c'est un quadratureur du dix-neuvième siècle. Oh, je sais, c'est pas gentil de se moquer.

Peut-être, mais c'est drôle !

références

- J.J. Gray, L. Tilling (1978) Johann Heinrich Lambert, mathematician and scientist, *Historia Mathematica*, 5, 13–41
- A. Juhel (2009) Lambert et l'irrationalité de π (1761), bibnum.education.fr
- J. Lützen (2009) Why was Wantzel overlooked for a century? The changing importance of an impossibility result, *Historia Mathematica*, 36, 374–394
- A. Sorgius (1971) La vie et l'œuvre de Jean-Henri Lambert, mathématicien, astronome et philosophe mulhousien, *Bulletin de l'APMEP*, 281, 771–782
- M. Waldschmidt (1983) Les débuts de la théorie des nombres transcendants (à l'occasion du centenaire de la transcendance de π), *Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques*, 4, 93–115