

0 L'harmonie du monde

Les solides de Platon, ce sont le tétraèdre, le cube, l'octaèdre, le dodécaèdre et l'icosaèdre.

Ce sont les seuls polyèdres réguliers... à condition de s'entendre sur le sens du mot « régulier ». Et d'où viennent-ils donc les solides de Platon ? euh... de Platon peut-être ? Oui, à condition de s'entendre sur le sens de « venir ».

histoires de géométrie

L'harmonie du monde

solides de Platon



hist-math.fr

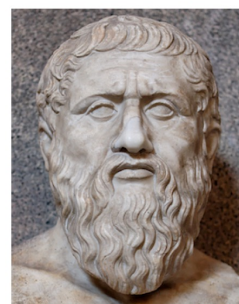
Bernard YCART

1 Platon (ca 428–348 av. J.-C.)

Vous savez que, pour l'essentiel, Platon a rédigé ses livres sous forme de dialogues. Il y met en scène son maître Socrate, et un ou plusieurs interlocuteurs à qui Socrate arrive à faire dire ce que Platon a envie d'écrire.

Dans le *Timée*, Socrate et *Timée* parlent de science. Et pas n'importe quelle science. Il est question de la création, tout simplement.

Platon (ca 428–348 av. J.-C.)



2 Le *Timée*

« Dieu plaça l'eau et l'air entre le feu et la terre, et ayant établi entre tout cela autant qu'il était possible des rapports d'identité, à savoir que l'air fût à l'eau ce que le feu est à l'air, et l'eau à la terre ce que l'air est à l'eau, il a, en enchaînant ainsi toutes les parties, composé ce monde visible et tangible. C'est de ces quatre éléments réunis de manière à former une proportion, qu'est sortie l'harmonie du monde, l'amitié qui l'unit si intimement que rien ne peut le dissoudre, si ce n'est celui qui a formé ses liens. »

Donc quatre éléments dans des rapports choisis de manière à assurer l'harmonie du monde : fort bien. Et les solides dans tout ça ?

Le *Timée*

Platon (ca 428–348 av. J.-C.)

Dieu plaça l'eau et l'air entre le feu et la terre, et ayant établi entre tout cela autant qu'il était possible des rapports d'identité, à savoir que l'air fût à l'eau ce que le feu est à l'air, et l'eau à la terre ce que l'air est à l'eau, il a, en enchaînant ainsi toutes les parties, composé ce monde visible et tangible. C'est de ces quatre éléments réunis de manière à former une proportion, qu'est sortie l'*harmonie du monde*, l'amitié qui l'unit si intimement que rien ne peut le dissoudre, si ce n'est celui qui a formé ses liens.

3 Le Timée

Et bien ils correspondent aux éléments : le feu, c'est le tétraèdre. La terre c'est le cube. Entre les deux, Platon place l'eau, qui est l'icosaèdre, et l'air, l'octaèdre. Ah mais attendez : quatre éléments, cinq solides, le compte n'y est pas. Alors Timée ajoute : « Et comme il restait une cinquième combinaison, Dieu s'en servit pour tracer le plan de l'univers ». Et voilà le dodécaèdre relié au cosmos.

L'association des polyèdres aux éléments fournit quelques explications fort ingénieuses. Par exemple : « L'eau, divisée par le feu, ou même par l'air, peut devenir, en se recomposant, un corps de feu ou deux corps d'air ». Vous avez compris qu'il s'agit de chauffer de l'eau pour obtenir de la vapeur, et vous traduisez : l'eau qui est un icosaèdre à vingt faces, peut donner deux octaèdres à huit faces (de l'air), plus un tétraèdre à quatre faces (du feu). Ou bien encore : « Quant à l'air, lorsqu'il est décomposé, d'une seule de ses parties peuvent naître deux corps de feu ». Comprenez : un octaèdre à huit faces peut donner deux tétraèdres à quatre faces. Ne persiflez pas, ceci pourrait bien être la première tentative de modélisation scientifique de l'histoire.

Pseudo-scientifique, peut-être ; mais le contenu mathématique est absent. Platon connaît bien les cinq solides, mais pour leur construction et la démonstration de leurs propriétés, il faudra attendre Euclide, comme d'habitude.

4 Les Éléments, livre XIII

Plus exactement le treizième et dernier livre des Éléments. J'aime bien vous montrer cette version de la traduction d'al-Tusi, les figures sont splendides. Bref. Pour certains, le treizième livre des Éléments est le couronnement de l'édifice. Euclide y construit rigoureusement chacun des cinq polyèdres réguliers, démontre leurs propriétés, et en particulier les rapports des longueurs de côtés.

Mais nulle part il ne fait référence à Platon. Alors d'où viennent-ils vraiment ces cinq solides platoniciens ?

5 Scholie au livre XIII

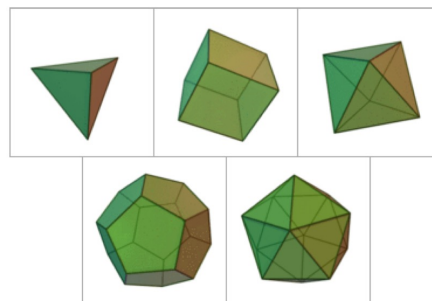
Une scholie c'est un ajout, un commentaire, qui n'est pas de la main de l'auteur. Celle-ci, ajoutée dans certains manuscrits au début du livre treize, annonce :

« Dans ce livre sont décrites les cinq figures dites de Platon, lesquelles ne sont pas de lui : trois des cinq figures susdites sont pythagoriciennes, à savoir le cube, la pyramide et le dodécaèdre ; de Théétète sont l'octaèdre et l'icosaèdre. »

Allons bon ! Voici un petit nouveau : Théétète.

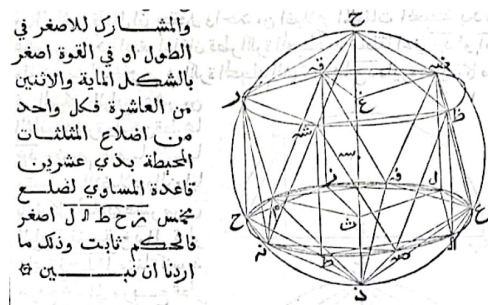
Le Timée

Platon (ca 428-348 av. J.-C.)



Les Éléments, livre XIII

Euclide (ca 325-265 av. J.-C.)



Scholie au livre XIII

Dans ce livre sont décrites les cinq figures dites de Platon, lesquelles ne sont pas de lui : trois des cinq figures susdites sont pythagoriciennes, à savoir le cube, la pyramide et le dodécaèdre ; de Théétète sont l'octaèdre et l'icosaèdre.

6 Théétète d'Athènes (ca 415–365 av. J.-C.)

Vous le voyez ici en train de consulter un site d'histoire des mathématiques sur son ordinateur portable.

Platon le met en scène dans un dialogue qui porte son nom. C'était un jeune homme fort prometteur. Parlant de Socrate, Platon dit :

« C'était, je crois, peu de temps avant sa mort qu'il connut Théétète, jeune encore et dans la fleur de l'âge, et que, s'étant entretenu avec lui, il fut charmé de son heureux naturel. Plus tard, comme j'étais à Athènes, Socrate me raconta la conversation, très remarquable, en vérité, qu'ils eurent ensemble, et il ajouta qu'inafailliblement ce jeune homme se distinguerait un jour, s'il arrivait à l'âge mûr. »

Théétète aurait donc découvert tout seul l'octaèdre et l'icosaèdre, tandis que Pythagore serait l'heureux papa des trois autres polyèdres réguliers ? Tant vaut vous le dire tout de suite, cette version n'est pas crédible. Déjà, le cube et le tétraèdre, étaient connus bien avant Pythagore.

Théétète d'Athènes (ca 415–365 av. J.-C.)



7 Jetons tétraédriques (ca. 3000 av. J.-C.)

Ces jetons tétraédriques ont été trouvés avec d'autres, au cours de fouilles en Turquie. Ils remonteraient à trois mille ans avant Jésus-Christ.

Jetons tétraédriques (ca. 3000 av. J.-C.)
Başur Göyük (Turquie)



8 Dés cubiques

En parlant de jeux, les jeux de parcours comme notre jeu de l'oie ou des petits chevaux, sont extrêmement anciens. Ils semblent avoir utilisé très tôt des dés cubiques, comme ceux-ci.

Dés cubiques
(Égypte)

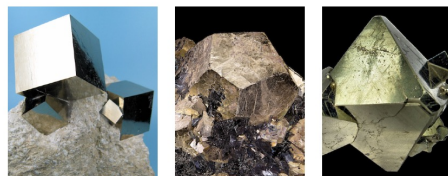


9 Cristaux de pyrite

Pour expliquer l'invention des solides platoniciens, on invoque souvent la pyrite, ou bisulfure de fer. C'est un minéral assez fréquent, qui cristallise en produisant parfois de magnifiques cubes extrêmement réguliers, ou bien des dodécaèdres, parfois même des octaèdres.

Ah mais attendez : si Pythagore a eu l'idée du dodécaèdre en voyant des cristaux de pyrite, pourquoi a-t-il fallu Théétète pour l'octaèdre ? Et l'icosaèdre alors ? Il n'existe pas dans la nature !

Cristaux de pyrite



10 Kunstformen der Natur

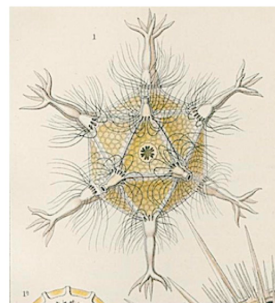
Euh, enfin si, mais les Grecs ne pouvaient pas le savoir. Il faudra attendre le dix-neuvième siècle et des observations microscopiques précises, pour observer des formes naturelles qui ressemblent à des icosaèdres.

Alors, quel crédit peut-on accorder à cette scholie au début du treizième livre ?

Il est important de ne pas confondre l'existence d'un polyèdre régulier particulier, comme le dodécaèdre ou l'icosaèdre, et le concept même de polyèdre régulier. On peut bien avoir fabriqué des cubes et des tétraèdres il y a très longtemps, avoir déduit des cristaux de pyrite le dodécaèdre et l'octaèdre, sans pour autant voir que ces objets ont des propriétés communes. Tous leurs sommets sont sur une même sphère, toutes leurs faces sont des polygones réguliers identiques.

Il est possible que Théétète ait vu le premier ces propriétés communes et ait inventé le concept. Il est possible même qu'il ait ajouté l'icosaèdre à la liste. Il est encore possible qu'il ait compris qu'il n'y en avait pas d'autres que ces cinq là. Mais nous ne sommes sûrs de rien.

Kunstformen der Natur
Ernst Haeckel (1834-1819)



11 Dé icosaédrique

Ce dé à vingt faces vient d'Égypte, mais probablement d'une époque postérieure à Platon.

Dé icosaédrique
Égypte, II^e - IV^e siècles



12 Dodécaèdre

Cet objet dodécaédrique est d'origine romaine. On en a retrouvé plusieurs centaines de ce modèle mais on ignore à quoi ils pouvaient servir.

Dodécaèdre

Empire Romain, II^e – III^e siècles

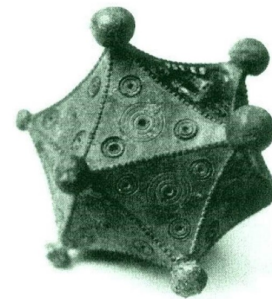


13 Icosaèdre

Son analogue icosaédrique est beaucoup plus rare, et tout aussi mystérieux.

Icosaèdre

Empire Romain, II^e – III^e siècles



14 Fragment d'histoire comique

Heureusement Cyrano de Bergerac lui a trouvé un usage.

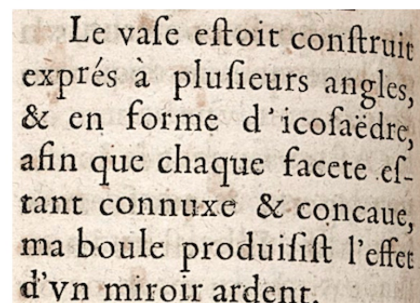
Nous parlons du vrai Cyrano, pas du personnage de Rostand. C'est le premier auteur de science-fiction français. Quand il écrit un « Fragment d'histoire comique contenant les états et empires du Soleil », il lui faut bien inventer une machine capable de le mener de la Terre jusqu'au Soleil. Et puisqu'il s'agit d'aller jusque sur le Soleil, quoi de mieux que l'énergie solaire pour la propulsion ?

« Le vase était construit exprès à plusieurs angles et en forme d'icosaèdre, afin que chaque facette étant à la fois connuxe et concave, ma boule produisît l'effet d'un miroir ardent. »

Domage que je n'ai pas retrouvé la signification de connuxe : un moteur à énergie solaire pour les voyages interplanétaires, nous aurions pu en avoir l'usage.

Fragment d'histoire comique

Cyrano de Bergerac (1618–1655)

A photograph of a snippet of text from a historical document, likely a page from Cyrano de Bergerac's 'Le voyage dans la lune'. The text is written in an old French script and describes a vessel designed as an icosahedron for solar propulsion.

Le vase estoit construit
exprès à plusieurs angles,
& en forme d'icosaèdre,
afin que chaque facete es-
tant connuxe & concaue,
ma boule produisist l'effet
d'un miroir ardent.

15 Solides Archimédiens

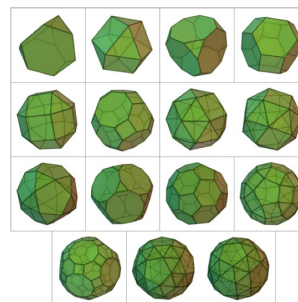
Qui sait, nous aurions peut-être amélioré le modèle en passant de l'icosaèdre à un autre polyèdre à faces polygonales régulières.

Il y en aurait 13 selon Archimède, ou bien quatorze, ou bien quinze comme sur cette illustration, voire même seize. Cela dépend des définitions. Certains sont obtenus à partir des solides platoniciens en tronquant les sommets, mais pas tous.

Le livre d'Archimède qui les définit, est perdu ; mais on a une trace dans la Collection mathématique de Pappus. Voici ce qu'il dit.

Solides Archimédiens

Archimède (ca. 287–212 av. J.-C.)



16 Collection mathématique, Livre V, chapitre XIX

« Il est possible d'imaginer un grand nombre de figures solides ayant des surfaces de toute espèce ; mais nous aurons égard plutôt à celles qui paraissent régulières. Or, celles-ci ne sont pas seulement constituées par les cinq figures que l'on rencontre chez le divin Platon [...], mais encore par celles qui ont été découvertes au nombre de treize par Archimède et sont comprises sous des polygones équilatéraux et équiangles, mais non semblables. »

Collection mathématique, Livre V, chapitre XIX

Pappus d'Alexandrie (ca. 290–350)

Il est possible d'imaginer un grand nombre de figures solides ayant des surfaces de toute espèce ; mais nous aurons égard plutôt à celles qui paraissent régulières. Or, celles-ci ne sont pas seulement constituées par les cinq figures que l'on rencontre chez le divin Platon [...], mais encore par celles qui ont été découvertes au nombre de treize par Archimède et sont comprises sous des polygones équilatéraux et équiangles, mais non semblables.

17 Livre XIII, scholie

Le problème de définition est illustré par cette scholie, vers la fin du treizième chapitre. Elle affirme, comme vous le voyez, que les seuls polyèdres dont les faces sont des polygones réguliers sont les cinq de Platon.

La démonstration est facile en apparence : il suffit de se demander combien de triangles équilatéraux, de carrés ou de pentagones, on peut mettre autour de chaque sommet.

Le problème est qu'elle est fausse. Pour un contre-exemple, pensez à deux tétraèdres empilés tête-bêche. Il manque une hypothèse. Cela ne ressemble pas à Euclide de donner des énoncés faux. Il est donc vraisemblable que ce soit une scholie postérieure.

Quoi qu'il en soit, voici l'héritage grec : cinq solides platoniciens, plus treize archimédiens. Il ne me semble pas que les Arabes aient cherché à augmenter la collection. Par contre, ils les ont utilisés, pour tenter de résoudre un autre problème, celui de l'isopérimétrie.

Que le cercle soit la plus parfaite de toutes les figures planes et la sphère la plus parfaite de tous les volumes, était une évidence, puisqu'on les observe dans le ciel. La plus parfaite ? Soit, mais en quel sens ? Voici ce qu'on trouve dans les premières pages de l'Almageste de Ptolémée.

Livre XIII, scholie

Euclide (ca 325–265 av. J.-C.)

SCHOLIE.

Je dis aussi qu'excepté les cinq figures dont nous venons de parler, on ne peut pas construire une autre figure qui soit contenue sous des figures équilatérales et équiangles.

Car on ne peut pas construire un angle solide avec deux triangles, ni avec deux autres plans (déf. 11. 11). Mais avec trois triangles, on construit l'angle de la pyramide ; avec quatre, l'angle de l'octaèdre, et avec cinq, l'angle de l'icosaèdre. Avec six triangles équilatéraux et équiangles, on ne peut pas construire un angle solide en un même point ; car un des angles d'un triangle équilatéral étant égal

18 Composition mathématique, Livre I

« De toutes les figures différentes, mais isopérimètres, les plus grandes sont celles qui ont le plus d'angles. Ainsi, le cercle est la plus grande des figures planes ; la sphère, le plus grand des solides ; et le ciel, le plus grand des corps. »

Restait à démontrer ces affirmations ; sans définitions précises des corps auxquels on voulait comparer la sphère, ce n'était pas facile. Les plus grands savants arabes s'y sont essayés. Al-Kindi a écrit un traité entier sur le sujet, mais il a été perdu. De al-Haytham nous est parvenu un autre traité : « Sur la sphère qui est la plus grande des figures solides ayant des surfaces égales et sur le cercle qui est la plus grande des figures planes ayant des périmètres égaux. » Voici les propositions quatre et cinq de ce traité. Al-Haytham en donne des démonstrations géométriques rigoureuses.

Composition mathématique, Livre I

Claude Ptolémée (ca. 85–165)

De toutes les figures différentes, mais isopérimètres, les plus grandes sont celles qui ont le plus d'angles. Ainsi, le cercle est la plus grande des figures planes ; la sphère, le plus grand des solides ; et le ciel, le plus grand des corps.

19 Sur la sphère qui est la plus grande des figures solides...

« Pour toute sphère dont l'aire latérale est égale à l'aire d'un polyèdre régulier, le volume de la sphère est plus grand que celui du polyèdre régulier.

Pour deux polyèdres réguliers dont les bases de l'un sont semblables aux bases de l'autre, et dont les bases de l'un sont plus nombreuses que les bases de l'autre – ceci a lieu pour les polyèdres dont les bases sont des triangles équilatéraux – si la surface entourant l'un est égale à la surface entourant l'autre [...] alors le volume du polyèdre dont les bases sont plus nombreuses est plus grand que le volume de l'autre. »

Sur la sphère qui est la plus grande des figures solides...

Ibn al-Haytham (ca 965–1040)

Pour toute sphère dont l'aire latérale est égale à l'aire d'un polyèdre régulier, le volume de la sphère est plus grand que celui du polyèdre régulier.

Pour deux polyèdres réguliers dont les bases de l'un sont semblables aux bases de l'autre, et dont les bases de l'un sont plus nombreuses que les bases de l'autre – ceci a lieu pour les polyèdres dont les bases sont des triangles équilatéraux – si la surface entourant l'un est égale à la surface entourant l'autre [...] alors le volume du polyèdre dont les bases sont plus nombreuses est plus grand que le volume de l'autre.

20 Mosaïque, Basilique San-Marco, Venise (ca 1430)

À la Renaissance européenne, les polyèdres réguliers connaissent un regain d'intérêt. Cela tient à deux phénomènes. D'une part l'essor de la peinture avec l'invention de la perspective, d'autre part la redécouverte des œuvres de Platon et le rééquilibrage philosophique entre la scolastique teintée d'aristotélisme, et le nouvel humanisme qui se veut plus idéaliste et héritier de Platon.

Si la datation de cette mosaïque est correcte, elle est la plus ancienne représentation d'un polyèdre régulier non convexe ; en l'occurrence le petit dodécaèdre étoilé. L'auteur en serait Paolo Uccello, un peintre florentin, passionné de perspective.

Mosaïque, Basilique San-Marco, Venise (ca 1430)

Paolo Uccello (1397–1475)



21 Order and Chaos (1950)

Order and Chaos (1950)

M.C. Escher (1898–1972)

De la Renaissance à nos jours, la fascination artistique pour les polyèdres n'a pas vraiment cessé : ceci est le même dodécaèdre étoilé, sur une lithographie d'Escher.



22 Libellus de quinque corporibus regularibus (1482)

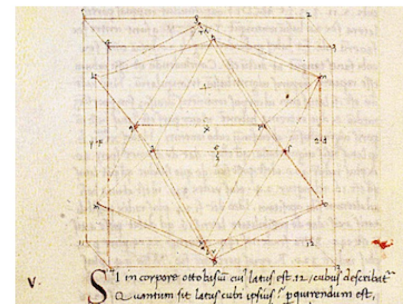
Le premier ouvrage théorique sur les polyèdres réguliers à la Renaissance, provient d'un autre de ces peintres géomètres italiens, également théoricien de la perspective.

Ce « petit livre sur les cinq corps réguliers », della Francesca le veut comme un complément à son traité sur la perspective en peinture. Il y recycle un certain nombre de problèmes qui figuraient déjà dans son traité d'abaque. Puis il traite en détail des dimensions respectives de solides réguliers inclus l'un dans l'autre, comme ici un icosaèdre dans un cube. Il présente ensuite des polyèdres moins réguliers, car composés de plusieurs sortes de polygones.

Je vous raconte ailleurs comment le traité d'abaque de Piero della Francesca, qui était manuscrit, avait été plagié par un de ses élèves, Luca Pacioli dans sa Summa Arithmetica, qui a été imprimée.

Libellus de quinque corporibus regularibus (1482)

Piero della Francesca (ca 1420–1492)



23 Divina proportione (1509)

Eh bien Pacioli a récidivé pour son livre sur la proportion divine, c'est-à-dire pour nous le nombre d'or. Mais là, comme l'illustrateur était son ami Léonard de Vinci, le livre prend tout de suite un tout autre relief.

Revoici le dodécaèdre étoilé de Uccello.

Divina proportione (1509)

Pacioli (ca 1445–1517), Vinci (1452–1519)

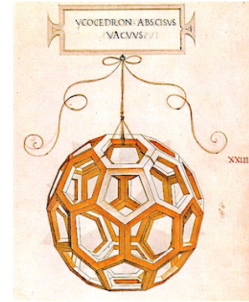


24 Divina proportione (1509)

Et voici l'icosaèdre tronqué, assemblage d'hexagones et de pentagones, qui était le plan des ballons de foot du temps où ils étaient cousus.

Divina proportione (1509)

Pacioli (ca 1445–1517), Vinci (1452–1519)



25 Église Santa Maria in Organo, Verona (1494)

Il n'y a pas eu que la mosaïque et la gravure. À la fin du quinzième siècle, les ateliers de marquetterie étaient nombreux, et les polyèdres réguliers étaient souvent traités en des plaquages de bois, comme dans ce tableau d'une église de Vérone.

Église Santa Maria in Organo, Verona (1494)

Fra Giovanni da Verona (ca 1457–1525)

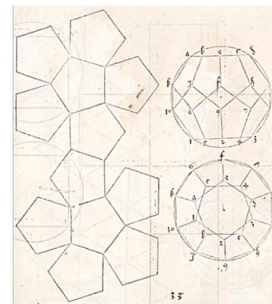


26 Underweysung der Messung (1525)

À partir du seizième siècle, les polyèdres font partie de la panoplie des artistes. Quand Albrecht Dürer publie en 1525 ses « Instructions pour la mesure à la règle et au compas dans les lignes, plans et tous les corps », les développements plans des polyèdres réguliers y sont détaillés. Le livre est destiné à ses collègues peintres et graveurs.

Underweysung der Messung (1525)

Albrecht Dürer (1471–1528)



27 Johannes Neudörfer et son fils (1560)

Il existait aussi des modèles à vocation pédagogique, comme dans ce tableau de 1560.

Johannes Neudörfer et son fils (1560)

Nicolas Neufchâtel (ca 1524–1567)

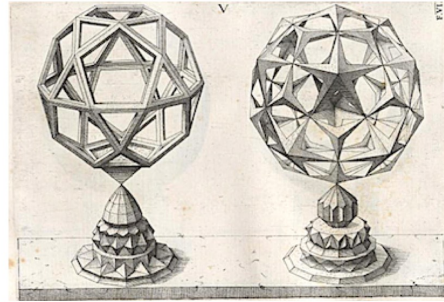


28 Perspectiva corporum regularium (1568)

En fait de gravures, celles de Léonard de Vinci et Dürer ont été dépassées par Wentzel Jamnitzer en 1568. Il a imaginé toutes sortes de variations sur chacun des cinq polyèdres réguliers. Vous voyez ici une des pages sur le dodécaèdre.

Perspectiva corporum regularium (1568)

Wentzel Jamnitzer (1508–1585)

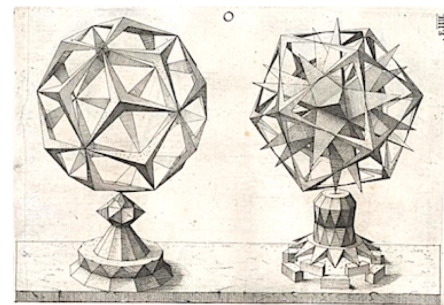


29 Perspectiva corporum regularium (1568)

Et ici une des pages sur l'icosaèdre. À chaque nouveau polyèdre, Jamnitzer prend bien soin de rappeler l'interprétation platonicienne, avec le feu associé au tétraèdre, l'eau à l'icosaèdre, le cube à la terre, l'air à l'octaèdre, et le cosmos au dodécaèdre.

Perspectiva corporum regularium (1568)

Wentzel Jamnitzer (1508–1585)



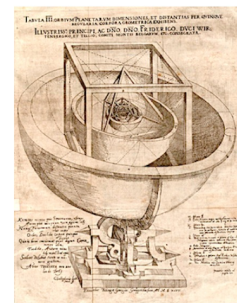
30 Mysteriorum cosmographicum (1596)

Kepler connaissait bien sûr, le Timée de Platon et les Éléments d'Euclide. Dans sa recherche sur les mouvements des planètes, il lui est arrivé d'émettre des hypothèses moins pertinentes que les lois qui l'ont rendu célèbre.

Comme dans ce livre de 1596 intitulé « Dissertation sur les proportions admirables des orbites célestes ». Il n'hésite pas à associer des orbites des cinq planètes connues aux polyèdres de Platon.

Mysteriorum cosmographicum (1596)

Johannes Kepler (1571–1630)



31 Harmonices Mundi (1619)

En 1619, alors qu'il vient tout juste de découvrir la troisième de ses lois, la plus difficile, il publie ce livre intitulé « Harmonies du monde ». Le titre fait explicitement référence à la théorie de Platon sur l'harmonie du monde engendrée par les quatre éléments associés aux polyèdres. Vous les voyez en haut à droite de cette image. Vous reconnaissez à gauche le dodécaèdre étoilé de Uccello.

Dans la suite du livre, Kepler va encore plus loin que Platon, et prend le mot harmonie dans le sens musical, en une sorte de synthèse de Pythagore et Platon.

Admettons-le, les explications du monde basées sur les polyèdres réguliers, n'ont pas résisté au temps. Mais doit-on considérer pour autant qu'ils n'ont été dans l'histoire des mathématiques qu'une voie sans issue ? Non bien sûr. Nous avons déjà vu l'usage qu'en ont fait les Arabes pour le problème de l'isopérimétrie. Ils figurent aussi en bonne place dans le faire-part de naissance de deux théories modernes.

32 De solidorum elementis (ca 1635)

Ceci est un autographe de la main de Leibniz. Mais le texte n'est pas de Leibniz, il est de René Descartes, et il n'a été publié qu'au dix-neuvième siècle. L'histoire de ce manuscrit est à peine croyable.

Après la mort de Descartes à Stockholm, ses papiers avaient été renvoyés en France, dans un bateau qui a fait naufrage presque en arrivant. Restés au fond de la Seine plusieurs jours, les manuscrits ont été repêchés, mis à sécher, mais personne ne s'est préoccupé de les recopier, jusqu'à Leibniz. De passage à Paris dans les années 1675, Leibniz recopie quelques uns des manuscrits de Descartes, dont celui-ci. Heureusement, car l'original de Descartes a été perdu. Il n'est resté que la copie, dans la montagne de papiers inédits que Leibniz a légués.

Domage tout de même, parce que ce manuscrit parlait des « éléments des solides ». Par « éléments » Descartes entendait des angles solides, des nombres de faces etc. Et à force de manipuler des combinaisons de ces éléments, Descartes avait découvert une notion cruciale, un « invariant ».

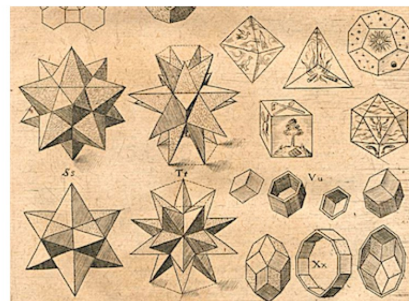
33 Elementa doctrinae solidorum (1750)

Officiellement, c'est Euler qui a trouvé le premier que dans un polyèdre, le nombre de sommets plus le nombre de faces moins le nombre d'arêtes, vaut deux. Peut-être, mais les énoncés de Descartes, dans un article antérieur de plus d'un siècle portant presque le même titre, étaient très proches.

Au fond, peu importe. Ce qui compte c'est qu'après un siècle supplémentaire de tentatives de démonstration et de contre-exemples, on en est arrivé à une notion d'invariant qui tenait la route. La topologie en est issue.

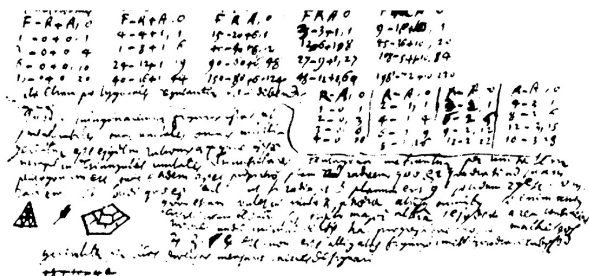
Harmonices Mundi (1619)

Johannes Kepler (1571-1630)



De solidorum elementis (ca 1635)

René Descartes (1596-1650)



Elementa doctrinae solidorum (1750)

Leonhard Euler (1707-1783)

PROPOSITIO IV.

§. 33. In omni solido hedris planis incluso aggregatum ex numero angulorum solidorum et ex numero hedrarum binario excedit numerum acierum.

DEMONSTRATIO.

Scilicet si ponatur ut hactenus:
 numerus angulorum solidorum = S
 numerus acierum - - - = A
 numerus hedrarum - - - = H
 demonstrandum est, esse $S + H = A + 2$.

34 Lectures on the ikosahedron (1888)

Je vous ai annoncé deux théories plus ou moins nées des polyèdres de Platon, l'une était donc la topologie, l'autre est la théorie des groupes. Oh, bien sûr, vous vous souvenez qu'elle vient des tentatives de résolution d'équations algébriques, et des substitutions de solutions.

Mais si, vous savez bien : Galois, l'infâme coquette, le duel à l'aube. Ah, vous y êtes ? Bien. Mais vous savez aussi qu'il a fallu très longtemps pour que la notion de groupe soit généralisée et pleinement comprise. L'un des acteurs est Félix Klein, qui dans son programme d'Erlangen a montré que la géométrie pouvait s'interpréter comme l'étude des invariants d'un groupe de transformations. Son exemple favori est le groupe d'isométries qui laisse invariant un icosaèdre.

Le titre complet du livre est : « Leçons sur l'icosaèdre, et la solution des équations du cinquième degré ». Bien sûr, le véritable sujet du livre n'est ni l'icosaèdre, ni l'équation du cinquième degré, mais le groupe des permutations d'un ensemble à cinq éléments qui leur est commun.

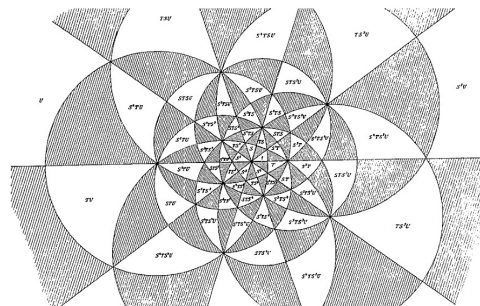
35 références

René Thom écrivait en 1971 : « Les mathématiciens devraient avoir le courage de leurs convictions les plus profondes et par suite affirmer que les formes mathématiques ont vraiment une existence indépendamment de l'esprit qui les considère. »

Les cinq polyèdres réguliers sont un exemple classique. Selon Platon, René Thom et la plupart des mathématiciens, ils existent indépendamment de l'homme. Théétète ne les aurait pas inventés, mais découverts. Et vous, quelle est votre conviction profonde ?

Lectures on the ikosahedron (1888)

Felix Klein (1848-1925)



références

- P. R. Cromwell (1999) *Polyhedra*, Cambridge : University Press
- J.-J. Dupas (2008) *Tout sur les polyèdres : des solides de Platon aux étoiles de Poincaré-Kepler*, culturemath.ens.fr
- P. J. Federico (1982) *Descartes on Polyhedra*, New York : Springer
- M. Senechal, ed. (2013) *Shaping space ; exploring polyhedra in nature, art, and the geometrical imagination*, New York : Springer
- W. C. Waterhouse (1972) The discovery of the regular solids, *Archive for history of exact sciences*, 9(3), 212-221