

0 La querelle des alvéoles

La querelle sur les alvéoles des nids d'abeille est un de ces exemples où les disputes philosophiques ont dangereusement débordé sur la réflexion mathématique. Nous sommes au siècle des Lumières, et bien sûr, Voltaire et sa misanthropie ne sont pas loin. Voici ce qu'il écrit dans son « Dictionnaire de philosophie ».

1 Dictionnaire de philosophie

« Les abeilles peuvent paraître supérieures à la race humaine, en ce qu'elles produisent de leur substance une substance utile, et que de toutes nos sécrétions, il n'y en a pas une seule qui soit bonne à rien, pas une seule même qui ne rende le genre humain désagréable. »

J'ignore s'il inclut dans le lot des sécrétions humaines ses propres productions littéraires. Le tout est que l'idée de comparer les abeilles, leur société, leur organisation, à celles des hommes n'est pas nouvelle. Comme chez Voltaire, la comparaison tourne souvent à l'avantage des abeilles, y compris en ce qui concerne la géométrie.

2 Bijou (ca 1700 av. J.-C.)

Il n'est pas possible de faire l'histoire de la domestication des abeilles sans remonter aux origines de la civilisation. Ce magnifique bijou représente deux abeilles portant du miel. Il date de plus d'un millénaire avant Pythagore.

La vision des gâteaux de miel comme un objet géométrique, un pavage hexagonal en l'occurrence, est probablement aussi vieille que la géométrie elle-même. Le témoignage le plus ancien que l'on en ait, apparaît dans un livre d'agriculture qui remonte au temps de Jules César.

histoires de géométrie

La querelle des alvéoles

une suite de malentendus



hist-math.fr

Bernard YCART

Dictionnaire de philosophie

Voltaire (1694-1778)

Les abeilles peuvent paraître **supérieures à la race humaine**, en ce qu'elles produisent de leur substance une substance utile, et que de toutes nos sécrétions, il n'y en a pas une seule qui soit bonne à rien, pas une seule même qui ne rende le genre humain désagréable.

Bijou (ca 1700 av. J.-C.)

Musée d'Héraklion, Crète



3 De re rustica

« Les cellules d'un rayon n'ont-elles pas six côtés, autant que l'abeille a de pattes. Les géomètres prouvent que cet hexagone inscrit dans un cercle englobe un espace maximal. »

Passons sur le manque de rigueur de la formulation, l'idée de l'optimalité de la forme géométrique du nid d'abeille est bien là. Cette même idée sera à l'origine des problèmes isopérimétriques chez Pappus.

4 Collections Mathématiques

Les Collections Mathématiques de Pappus sont la dernière grande œuvre des mathématiques grecques. Le livre cinq porte sur les comparaisons des figures planes ayant même périmètre entre elles et avec le cercle, et les comparaisons des figures solides ayant même surface entre elles et avec la sphère. Il s'agit d'abord de démontrer, que, entre deux polygones réguliers de même périmètre celui qui a le plus de côtés englobe l'aire la plus grande, et que cette aire est inférieure à celle du cercle de même périmètre.

Voici ce qu'on lit dans l'introduction.

5 Collections Mathématiques, Livre V

« Les abeilles ne reconnaissent que ce qui leur est utile, notamment que l'hexagone est plus grand que le carré et le triangle, et que, si la même quantité de matière est dépensée pour la construction de chacune de ces figures, c'est l'hexagone qui pourra contenir plus de miel. »

À la Maison de la Sagesse de Bagdad, au neuvième siècle, Pappus a été traduit, lu avec attention, et commenté. Les mathématiciens arabes sont donc parfaitement au fait du problème de l'isopérimétrie. Mais Thabit ibn Qurra y ajoute un élément philosophique.

6 la chose était des plus merveilleuses

« Nous avons en effet considéré les cellules que produisent les abeilles avec la cire, et nous avons constaté qu'elles étaient toutes hexagonales. Quand nous y avons réfléchi et que nous avons pensé à la raison d'un tel fait, nous avons trouvé que la chose était des plus merveilleuses, et nous y avons vu l'indice de la providence la plus parfaite. »

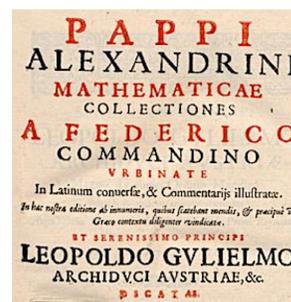
De re rustica

Marcus Terentius Varro (116-27 av. J.-C.)

Non in favo sex angulis cella, totidem, quot habet ipsa pedes. Quod geometrae ἐξάγωνον fieri in orbi rotundo ostendunt, ut plurimum loci includatur.

Collections Mathématiques

Pappus d'Alexandrie (ca 290-350)



Collections Mathématiques, Livre V

Pappus d'Alexandrie (ca 290-350)

Les abeilles ne reconnaissent que ce qui leur est utile, notamment que l'hexagone est plus grand que le carré et le triangle, et que, si la même quantité de matière est dépensée pour la construction de chacune de ces figures, c'est l'hexagone qui pourra contenir plus de miel.

la chose était des plus merveilleuses

Thabit ibn Qurra (ca 826-901)

Nous avons en effet considéré les cellules que produisent les abeilles avec la cire, et nous avons constaté qu'elles étaient toutes hexagonales. Quand nous y avons réfléchi et que nous avons pensé à la raison d'un tel fait, nous avons trouvé que la chose était des plus merveilleuses, et nous y avons vu l'indice de la providence la plus parfaite.

7 Alvéoles d'un nid d'abeille

L'explication de Pappus, reprise par ibn Qurra a toujours paru la bonne : les abeilles construisent un pavage hexagonal parce qu'il optimise l'espace disponible pour une quantité de cire donnée. Soit dit en passant, transformer cela en un véritable théorème mathématique et le démontrer a pris de nombreux siècles.

Mais il y a plus que le pavage hexagonal. Regardez le fond des alvéoles : il n'est pas plan. C'est une sorte de pyramide renversée formée de trois losanges identiques. Pourquoi, et comment ? Disons tout de suite que la question du comment est toujours loin d'être tranchée par les spécialistes.

Le premier à se poser la question du pourquoi est Kepler.

8 Strena seu De Nive Sexangula (1610)

Je vous présente dans une autre histoire, son flocon de neige. C'est un petit bijou d'astuce et d'humour, concentré en quelques pages. Sous prétexte d'offrir à son mécène ce qui pourrait être le plus proche de rien, Kepler se demande la raison de la forme hexagonale du flocon de neige et en profite pour nous offrir un époustouffant numéro de virtuosité intellectuelle.

S'agissant de formes hexagonales, évidemment les nids d'abeilles ne sont pas oubliés. Mais Kepler va beaucoup plus loin que Pappus.

9 la forme que les géomètres appellent losange

« Si tu demandes aux géomètres sur quel plan les gâteaux de cire sont construits, ils répondront : sur un plan hexagonal. Mais quand tu auras examiné la base des alvéoles, tu verras que chacune se termine vers le bas en un angle obtus formé par trois plans. De plus il est à noter que le plan des alvéoles est double, avec des grilles dans des directions opposées, le fond de chaque alvéole d'un rang étant inséré entre les trois coins de trois fonds des alvéoles de la seconde rangée. [...] Le résultat est que chaque abeille a neuf voisines, séparées par des cloisons communes. Les surfaces planes du fond sont toutes pareilles, de la forme que les géomètres appellent losange. »

Alvéoles d'un nid d'abeille



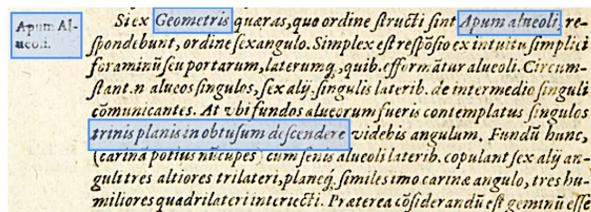
Strena seu De Nive Sexangula (1610)

Johannes Kepler (1571–1630)



la forme que les géomètres appellent losange

Kepler, Strena seu De Nive Sexangula (1610)



10 Deus ipse, apiculae creator

Kepler s'embarque alors dans une discussion sur les pavages de l'espace, qui le mène en passant à la fameuse « conjecture de Kepler ». Il revient au bout de quatre pages à la structure des nids d'abeille. Il n'élude pas la question de la finalité, non pas des abeilles elles-mêmes, mais de leur Créateur.

Kepler demande : « Qu'avait-Il en tête quand Il a prescrit aux abeilles cette architecture ? » Concernant la forme hexagonale, il conclut comme ses prédécesseurs que le pavage en hexagone est le plus économe en cire pour une contenance donnée. Concernant les fonds, il remarque que des angles obtus sont plus confortables pour les abeilles, et qu'elles travaillent deux par deux de chaque côté d'une surface plane. Ayant donné des explications pratiques qui lui paraissent raisonnables, il conclut un peu négligemment :

11 Non existimem philosophandum

« Ces raisons matérielles sont je crois, suffisantes pour que je n'estime pas nécessaire de philosopher sur la perfection, la beauté ou la noblesse du losange, ni que je m'escrime à déduire des figures géométriques que l'abeille fabrique, l'essence de sa petite âme. Nous nous y serions lancé si aucune utilité n'était apparue pour ces figures. »

Vous l'avez compris, Kepler n'estime pas que la forme des gâteaux de cire mérite un grand débat philosophique. Le siècle suivant va lui donner tort. Dans l'intervalle, les techniques d'expérimentation, et surtout, les outils d'observation ont beaucoup progressé.

12 Bibel der Natur

Jan Swammerdam est hollandais. C'est un passionné d'insectes, et un des pionniers de l'observation sous microscope. Son œuvre majeure, la Bible de la Nature, n'était pas publiée à sa mort. Le manuscrit est passé à un de ses amis, qui n'en a rien fait. Il a finalement été racheté par Hermann Boerhaave, lui aussi hollandais, et un des plus grands médecins de son temps. C'est ainsi que la Bible de la Nature de Swammerdam, n'a été publiée que cinquante ans après sa mort. Mais le travail était tellement novateur, les observations tellement précises, que la recherche de Swammerdam n'était toujours pas démodée cinquante ans plus tard.

13 Bibel der Natur

Concernant les abeilles, Swammerdam reste strictement observateur. Il décrit avec la plus grande minutie les alvéoles, leur fond formé de trois losanges, chacun appartenant à une cellule de la couche opposée.

Il en donne le modèle géométrique idéalisé, comme vous le voyez en haut de l'image, mais il se montre aussi conscient des variations par rapport à ce modèle idéalisé : par exemple il a lui-même observé des cellules dont le fond était en contact avec non pas trois, mais quatre cellules de la couche opposée.

Deus ipse, apiculae creator

Kepler, Strena seu De Nive Sexangula (1610)



Non existimem philosophandum

Kepler, Strena seu De Nive Sexangula (1610)

Has igitur rationes materialē necessitatē respiciēs ita puto sufficere, ut hoc loco non existimē philosophandū de perfectione & pulchritudine vel nobilitate figurae Rhombicae: neq. sit agēdum, ut essentia animalis quae est in Ape, ex contemplatione figurae, quā fabricatur, elicatur: quales quid nobis fuisset inceptū dūm, si versus figuram nullus apparuisset.

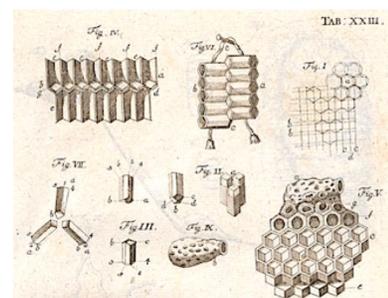
Bibel der Natur

Jan Swammerdam (1637–1680)



Bibel der Natur

Jan Swammerdam (1637–1680)



14 Encyclopédie : Alvéole

La « querelle des alvéoles » est née d'un malentendu, teinté, au moins de la part d'un des acteurs, d'une bonne dose de mauvaise foi. Voici l'histoire telle qu'elle est rapportée dans l'article « Alvéole » de l'Encyclopédie de Diderot et d'Alembert. C'est un long article, signé Daubenton. Daubenton est un collaborateur de Buffon, auteur de la plus grande partie des articles de biologie de l'Encyclopédie. Les faits sont implacables.

« Monsieur Kœnig a démontré qu'entre les cellules à fond pyramidal, celle dans laquelle il entrait le moins de matière avait son fond composé de trois rhombes, dont chaque grand angle était. . . »

Encyclopédie : Alvéole

Louis Jean-Marie Daubenton (1716-1799)

M. Kœnig a démontré que la capacité d'une cellule à six pans & à fond pyramidal quelconque fait de trois rhombes semblables & égaux, étoit toujours égale à la capacité d'une cellule à fond plat dont les pans rectangles ont la même longueur que les pans en trapèze de la cellule pyramidale ; & cela quels que soient les angles des rhombes. Il a aussi démontré qu'entre les cellules à fond pyramidal, celle dans laquelle il entroit le moins de matière avoit son fond composé de trois rhombes, dont chaque grand angle étoit

15 Encyclopédie : Alvéole

« . . . de 109 degrés 26 minutes, et chaque petit angle de 70 degrés 34 minutes. Cette solution est bien d'accord avec les mesures précises de Monsieur Maraldi, qui sont de 109 degrés 28 minutes pour les grands angles et de 70 degrés 32 minutes pour les petits angles.

Il est donc prouvé, autant qu'il peut l'être, que les abeilles construisent leurs alvéoles de la façon la plus avantageuse pour épargner la cire ; cette sorte de construction est aussi la plus solide. »

Sur ce constat d'une démonstration rigoureuse, et d'un calcul d'une précision impressionnante, tout le monde est d'accord. C'est sur l'interprétation que les avis divergent.

Encyclopédie : Alvéole

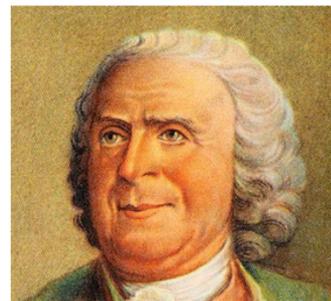
Louis Jean-Marie Daubenton (1716-1799)

de 109 degrés 26 minutes, & chaque petit angle de 70 degrés 34 minutes. Cette solution est bien d'accord avec les mesures précises de M. Maraldi, qui sont de 109 degrés 28 minutes pour les grands angles, & de 70 degrés 32 minutes pour les petits. Il est donc prouvé, autant qu'il peut l'être, que les abeilles construisent leurs alvéoles de la façon la plus avantageuse pour épargner la cire : cette sorte de construction est aussi la plus solide ; chaque fond d'alvéole est retenu par

16 René-Antoine Ferchault de Réaumur (1683–1757)

D'un côté, nous avons Réaumur. Il est plus connu de nos jours comme physicien, pour avoir inventé un thermomètre et donné son nom à une échelle de température. Il s'est aussi occupé de la fabrication de l'acier et des faïences. Pour ce qui nous intéresse ici, il est l'auteur d'un monumental traité en sept tomes, intitulé « Mémoires pour servir à l'histoire des insectes ». Le volume cinq est essentiellement consacré aux abeilles. Dès la préface, Réaumur donne le ton.

René-Antoine Ferchault de Réaumur (1683-1757)



17 Mémoires pour servir à l'histoire des insectes (1740)

« Quand on étudie la manière dont elles mettent celle-ci en œuvre, quand on voit qu'elle suppose des connaissances en géométrie supérieures à celles qu'ont eues les plus grands géomètres de l'antiquité, l'admiration que ces mouches font naître ne s'arrête pas à elles. Si on ne veut pas les regarder comme des êtres très intelligents, on est forcé de reconnaître qu'elles ne peuvent être l'ouvrage que d'une intelligence infiniment parfaite et infiniment puissante. Bientôt l'admiration s'élève à celui qui leur a donné l'être; mais bientôt on demande pourquoi il les a si admirablement instruites. Qu'étaient-il nécessaire qu'elles conduisissent leurs ouvrages selon les règles de la plus sublime géométrie? »

La plus sublime géométrie hein? supérieure à celle qu'ont eue les géomètres de l'antiquité? Sans blague?

Mémoires pour servir à l'histoire des insectes (1740)

René-Antoine Ferchault de Réaumur (1683-1757)

Quand on étudie la manière dont elles mettent celle-ci en œuvre, quand on voit qu'elle suppose des connaissances en géométrie supérieures à celles qu'ont eues les plus grands Géomètres de l'antiquité, l'admiration que ces mouches font naître ne s'arrête pas à elles. Si on ne veut pas les regarder comme des êtres très-intelligents, on est forcé de reconnaître qu'elles ne peuvent être l'ouvrage que d'une intelligence infiniment parfaite et infiniment puissante. Bientôt l'admiration s'élève à celui qui leur a donné l'être; mais bientôt on demande pourquoi il les a si admirablement instruites. Qu'étoit-il nécessaire qu'elles conduisissent leurs ouvrages selon les règles de la plus sublime géométrie?

18 Georges Louis Leclerc comte de Buffon (1707–1788)

Face à Réaumur, voici Buffon. Son Histoire Naturelle éclipse totalement les Mémoires de Réaumur : une véritable encyclopédie! Pas moins de trente-six volumes, publiés sur plus de quarante ans, à peu près en même temps que l'Encyclopédie de Diderot et d'Alembert qu'elle concurrence.

Le quatrième volume est consacré à un « Discours sur la nature des animaux ». Buffon se charge d'y doucher l'admiration de Réaumur.

Georges Louis Leclerc comte de Buffon (1707–1788)



19 Discours sur la nature des animaux (1753)

« C'est qu'indépendamment de l'enthousiasme qu'on prend pour son sujet, on admire toujours d'autant plus qu'on observe d'avantage et qu'on raisonne moins. Y a-t-il en effet rien de plus gratuit [...], que cet instinct singulier qui équivaut à la géométrie la plus sublime, instinct qu'on leur a nouvellement accordé, par lequel les abeilles résolvent, sans hésiter, le problème de *bâtir le plus solidement qu'il soit possible dans le moindre espace possible, et avec la plus grande économie possible?* »

[...] C'est cette intelligence, cette prévoyance, cette connaissance même de l'avenir qu'on leur accorde avec tant de complaisance, et que cependant on doit leur refuser rigoureusement, que je vais tenter de réduire à sa juste valeur. »

Réduire à sa juste valeur pour Buffon c'est montrer que la géométrie des nids d'abeille n'est que le résultat de mouvements automatiques d'un grand nombre d'insectes de même taille et de même forme, déterminés dit-il, à faire chacun la même chose dans un même lieu.

Discours sur la nature des animaux (1753)

Georges Louis Leclerc comte de Buffon (1707–1788)

C'est qu'indépendamment de l'enthousiasme qu'on prend pour son sujet, on admire toujours d'autant plus qu'on observe d'avantage & qu'on raisonne moins. Y a-t-il en effet rien de plus gratuit [...], que cet instinct singulier qui équivaut à la géométrie la plus sublime, instinct qu'on leur a nouvellement accordé, par lequel les abeilles résolvent, sans hésiter, le problème de *bâtir le plus solidement qu'il soit possible dans le moindre espace possible, & avec la plus grande économie possible?*

[...] C'est cette intelligence, cette prévoyance, cette connaissance même de l'avenir qu'on leur accorde avec tant de complaisance, et que cependant on doit leur refuser rigoureusement, que je vais tenter de réduire à sa juste valeur.

20 Une preuve contre l'enthousiasme et l'admiration

« ces cellules des abeilles, ces hexagones tant vantés, tant admirés, me fournissent une preuve de plus contre l'enthousiasme et l'admiration : cette figure, toute géométrique et toute régulière qu'elle nous paraît, et qu'elle est en effet dans la spéculation, n'est ici qu'un résultat mécanique et assez imparfait qui se trouve souvent dans la nature. »

Une preuve contre l'enthousiasme et l'admiration

Buffon, Discours sur la nature des animaux (1753)

Dirai-je encore un mot ; ces cellules des abeilles , ces hexagones tant vantés , tant admirés , me fournissent une preuve de plus contre l'enthousiasme & l'admiration : cette figure, toute géométrique & toute régulière qu'elle nous paroît , & qu'elle est en effet dans la spéculation , n'est ici qu'un résultat mécanique & assez imparfait qui se trouve souvent dans la Nature,

21 Le Créateur n'est-il pas assez grand

« La Nature n'est-elle pas assez étonnante par elle-même, sans chercher encore à nous surprendre en nous étourdissant de merveilles qui n'y sont pas et que nous y mettons ! Le Créateur n'est-il pas assez grand par ses ouvrages, et croyons-nous le faire plus grand par notre imbecillité ! ce serait, s'il pouvoit l'être, la façon de le rabaisser. »

Réaumur a bien compris le message.

Le Créateur n'est-il pas assez grand

Buffon, Discours sur la nature des animaux (1753)

La Nature n'est-elle pas assez étonnante par elle-même, sans chercher encore à nous surprendre en nous étourdissant de merveilles qui n'y sont pas & que nous y mettons ! Le Créateur n'est-il pas assez grand par ses ouvrages, & croyons-nous le faire plus grand par notre imbecillité ! ce seroit, s'il pouvoit l'être, la façon de le rabaisser.

22 Lettre de Réaumur à Charles Bonnet (14 mars 1754)

« Tout le malheur des abeilles et des autres insectes est que je les aime et ose les admirer. C'en est assez pour faire parler d'eux avec mépris M. de Buffon et toute sa clique.

Je vous propose de laisser ces messieurs à leurs querelles philosophiques pour en revenir aux origines mathématiques. »

Lettre de Réaumur à Charles Bonnet (14 mars 1754)

René-Antoine Ferchault de Réaumur (1683-1757)

Tout le malheur des abeilles et des autres insectes est que je les aime et ose les admirer. C'en est assez pour faire parler d'eux avec mépris M. de Buffon et toute sa clique.

23 Anne Louise Bénédicte de Bourbon (1676–1753)

Enfin mathématiques, ou mondaines d'abord. Voici la Duchesse du Maine, prenant une leçon d'astronomie avec Monsieur de Malezieu. Depuis le début du siècle, elle a organisé dans son château de Sceaux une véritable petite cour autour d'elle. Entre autres, on y voit souvent Voltaire et Émilie du Châtelet.

Anne Louise Bénédicte de Bourbon (1676–1753)

Duchesse du Maine



24 Ordre de la Mouche à Miel (11 juin 1703)

La Duchesse du Maine avait fondé en 1703 un « Ordre de la Mouche à Miel », autrement dit l'abeille, pour lequel elle avait fait frapper cette magnifique médaille en or que les membres de l'ordre, c'est-à-dire sa cour du château de Sceaux, étaient tenus de porter. Au revers de la médaille est gravée en italien la devise de la Duchesse : « Elle est petite certes, mais elle fait de graves blessures ». Ce qui lui convenait à merveille paraît-il.

C'est donc avec leur médaille de la mouche à miel autour du cou, qu'un beau jour de l'automne 1739, Voltaire et Émilie du Châtelet se transportent chez M. de Réaumur, pour justement, y admirer ses ruches expérimentales. Ils sont accompagnés d'un jeune mathématicien suisse, Johan Samuel König. C'est lui qui raconte.

Ordre de la Mouche à Miel (11 juin 1703)

Anne Louise Bénédicte de Bourbon (1676-1753)



25 Lettre à Mr A. B**** (29 octobre 1739)

« Madame DUCHATELET, M. DE VOLTAIRE et moi, fûmes voir, il y a quelques jours, M. DE REAUMUR à *Charenton*. [...] La conversation, que nous eumes ce jour là, nous ayant conduit à admirer beaucoup la régularité, des petites loges hexagones, où les abeilles mettent leur nourriture, et leurs petits, et qu'on nomme *alvéoles*; M. de *Reaumur* en prit occasion de me proposer un problème peu difficile, mais fort curieux; savoir, *si les abeilles construisent leurs alvéoles de la manière la plus parfaite, et la plus géométrique; et si de toutes les figures possibles, elles ont choisi celle où avec le plus d'espace dans l'alvéole, elles dépensent cependant le moins de matière qu'il est possible.* »

König a une excellente formation mathématique, reçue auprès des frères Bernoulli, en compagnie de Clairaut et Maupertuis. Il n'a donc aucune peine à résoudre le problème d'optimisation.

Lettre à Mr A. B**** (29 octobre 1739)

Johann Samuel König (1712-1757)

Madame DUCHATELET, M. DE VOLTAIRE & moi, fûmes voir, il y a quelques jours, Mr DE REAUMUR à *Charenton*. [...] La Conversation, que nous eumes ce jour là, nous aiant conduit à admirer beaucoup la régularité, des petites Loges hexagones, où les Abeilles mettent leur nourriture, & leurs petits, & qu'on nomme *Alveoles*; Mr de *Reaumur* en prit occasion de me proposer un *Problème peu difficile, mais fort curieux*; savoir, *si les Abeilles construisent leurs Alveoles de la manière la plus parfaite, & la plus Géométrique; & si de toutes les figures possibles, elles ont choisi celle où avec le plus d'espace dans l'Alveole, elles dépensent cependant le moins de Matière qu'il est possible.*

26 Pappus auroit été sans doute fort fâché

« *Pappus* aurait été sans doute fort fâché d'apprendre, qu'il y a plus de *géométrie* dans ces petites demeures, qu'il n'en savait, lui et son siècle, puisqu'on y trouve la géométrie des modernes, et leurs méthodes, *de maximis et minimis.* »

Et voici la « sublime géométrie » des abeilles, inconnue des Grecs eux-mêmes. Pour trouver quoi ?

Pappus auroit été sans doute fort fâché

König, Lettre à Mr A. B**** (29 octobre 1739)

Pappus auroit été sans doute fort fâché d'apprendre, qu'il y a plus de *Géométrie* dans ce petites Demeures, qu'il n'en savait, lui & son Siècle, puis qu'on y trouve la *Géométrie des Modernes*, & leurs Méthodes, *de maximis & minimis.*

27 109. degr. 26. min

« Par le moyen des tables, l'angle obtus des rhombes est de 109 degrés 26 minutes. Or voici ce qu'en dit M. Maraldi dans les Mémoires de l'an 1712. Suivant les mesures que nous en avons prises, les deux angles obtus sont de 110 degrés. Mais M. Maraldi ne donne ici que des nombres ronds ; car dans la page suivante, il pose l'angle obtus de 110 degrés 28 minutes, ce qui ne diffère que de deux minutes, de ce que la théorie demande. »

Et là, il faut bien le dire, König a tout faux. D'abord, il a fait une erreur de calcul, ou bien ses tables sont inexactes. Le bon résultat est bien 109 degrés 28 minutes, vous verrez bientôt pourquoi.

D'autre part, Maraldi a bien effectué des mesures qui lui ont donné 110 degrés. Compte-tenu de la variabilité des alvéoles, et de la précision des instruments, trouver 109 degrés 28 minutes, la valeur qu'il annonce ensuite, n'est tout simplement pas possible expérimentalement.

Alors que s'est-il passé ?

28 Giacomo Filippo Maraldi (1665–1729)

Maraldi, le voici. C'est un neveu de Jean-Dominique Cassini, qui l'a fait venir en France comme astronome. C'est lui qui joue le mauvais rôle dans cette pièce. Parce que les 109 degrés 28 minutes dont tout le monde croit qu'il les a mesurés, il les a tout simplement empruntés à quelqu'un d'autre, sans le citer.

109. degr. 26. min

König, Lettre à Mr A. B**** (29 octobre 1739)

Du côté des Rhombes $= \frac{1}{8}$; D'où l'on trouve par le moyen des Tables l'Angle obtus des Rhombes 109. degr. 26. min. Et l'Angle aigu de 70. degr. 34. min.

Or voici ce qu'en dit Mr. MARALDI, dans les Mémoires de l'An 1712. p 308. Chaque base d'Alvéola, est formée de Rhombes, presque toujours égaux, & semblables, qui, suivant les mesures, que nous en avons prises, ont les deux Angles obtus chacun de 110. degr. & l'Angle aigu de 70. degr. Mais Mr. Maraldi ne donne ici que des nombres ronds ; car dans

Giacomo Filippo Maraldi (1665–1729)



29 Les Merveilles des Abeilles (1712)

Ce quelqu'un d'autre, c'est Antoine Parent. Un quasi-inconnu, qui a travaillé seul toute sa vie, s'est contenté du peu que lui rapportaient les quelques leçons qu'il donnait, n'est pas allé plus loin qu'une place subalterne à l'Académie des sciences ; mais il a produit, beaucoup, sur tous les sujets, des milliers de pages.

On a de lui trois volumes de « Recherches de Mathématiques et de Physique ». Dans l'éloge qu'en donne Fontenelle, celui-ci dit : « Cet ouvrage est plein de bonnes choses, et n'a pas eu cependant un fort grand cours. La prévention où l'on était sur le peu de clarté de l'auteur, le peu de faveur qu'il s'attirait par sa liberté de critiquer, le peu d'ordre dans les matières, tout cela a pu diminuer son succès. M. Parent était si abondant, que, quoiqu'il eût ce Journal à lui, il ne laissait pas de se répandre encore dans les autres, dans celui des savants, dans celui de Trevoux, dans le Mercure. »

Justement, l'article qui nous intéresse est paru dans le « Mercure Galant ». Il est intitulé : « Les Merveilles des Abeilles, ou analyse du fond des alvéoles, dont leurs rayons sont composés ».

Parent partage l'admiration de Réaumur.

30 toute la perfection

« En examinant la figure du fond de ces alvéoles avec application, on trouve qu'elle renferme toute la perfection que l'esprit humain, muni de la plus subtile géométrie peut imaginer. Car elles ont de toutes les figures qu'elles pourraient recevoir la plus régulière, par conséquent la plus belle, et la plus aisée à bâtir, et aussi la plus logeable, à moindres frais, ou la plus spacieuse, avec même surface, la plus aisée à s'y tourner en tout sens, et en même temps la plus solide, qui est tout ce que le plus habile architecte pourrait souhaiter. »

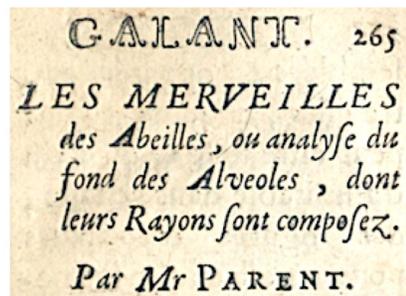
31 la tangente de 70 degrés 32 minutes

Donc Parent est conscient du problème d'optimisation. Il le résout, certes moins rigoureusement qu'avec le calcul différentiel comme König, mais lui au moins, ne fait pas d'erreur de calcul.

Il part du principe que le maximum est atteint quand les sept points du fond sont co-sphériques, avec des angles sphériques au sommet tous égaux à 120 degrés. Un petit calcul de trigonométrie sphérique plus loin, il arrive à la tangente de l'angle qu'il cherche, égale à deux racine de deux. Il en déduit l'angle de 70 degrés 32 minutes, et son complémentaire 109 degrés 28 minutes. Il ajoute aussitôt :

Les Merveilles des Abeilles (1712)

Antoine Parent (1666-1716)



toute la perfection

Parent, Les Merveilles des Abeilles (1712)

En examinant la figure du fond de ces Alveoles avec application, on trouve qu'elle renferme toute la perfection que l'esprit humain, muni de la plus subtile géométrie peut imaginer. Car elles ont de toutes les figures qu'elles pourraient recevoir la plus régulière, par conséquent la plus belle, & la plus aisée à bastir, & aussi la plus logeable, à moindres frais, ou la plus spacieuse, avec mesme surface, la plus aisée à s'y tourner en tout sens, & en mesme temps la plus solide, qui est tout ce que le plus habile Architecte pourroit souhaiter.

la tangente de 70 degrés 32 minutes

Parent, Les Merveilles des Abeilles (1712)

The image shows a handwritten passage from the manuscript: 'I. donne 2 R 2, combien 100000.) dont le quatrième terme 282842. est la tangente de 70. degrez 32. minutes 8. ou de AFO, ce qui fait voir que son complement BAF est de 109. d. 28.' The numbers 282842, 70. degrez 32. minutes 8., and 109. d. 28. are highlighted with blue boxes.

32 conformément aux expériences

« ... conformément aux expériences que les savants Ms. de Cassini et Maraldi en ont faites avec toute la justesse que des figures aussi petites que celles de ces alvéoles peuvent recevoir. Car ces Messieurs m'ont assuré les avoir toujours trouvés, de 70. et de 110. degrés. »

Normalement le « savant monsieur Maraldi » aurait dû expliquer à l'Académie la différence entre des mesures qu'il avait faites avec son oncle, et le résultat géométrique qui lui avait été donné par Parent. On ne lit rien de tel, pas plus dans son mémoire de 1712, quelques mois après celui de Parent, que chez ses successeurs. La fable de l'accord miraculeux entre le résultat rigoureux (mais faux) de König, et les mesures expérimentales de Maraldi ne sera remise en cause que vers la fin du siècle, par un autre Suisse.

conformément aux expériences

Parent, *Les Merveilles des Abeilles* (1712)

... conformément aux expériences que les sçavants Mrs. de Cassini & Maraldi en ont faites avec toute la justesse que des figures aussi petites que celles de ces Alveoles peuvent recevoir. Car ces Messieurs m'ont assuré les avoir toujours trouvés, de 70. et de 110. degrez.

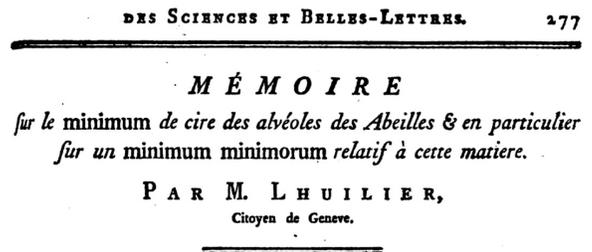
33 Mémoire sur le minimum de cire (1781)

Simon Lhuillier est citoyen de Genève comme vous pouvez le constater. Il présente en 1781 à l'Académie des Sciences et Belles-Lettres de la même ville ce « Mémoire sur le minimum de cire des alvéoles des abeilles et en particulier sur un minimum minimorum relatif à cette matière ».

Il exprime ses doutes avec beaucoup de diplomatie.

Mémoire sur le minimum de cire (1781)

Simon Antoine Jean Lhuillier (1750-1840)



34 Il est encore plus surprenant

« Cet accord, même dans les minutes, des résultats déduits de la théorie avec ceux que M. *Maraldi* dit avoir déduits de l'observation, serait bien surprenant (surtout en ayant égard aux variations accidentelles qui ont lieu dans les figures des cellules), si cette dernière avait été le seul guide de ce physicien. Mais il est encore plus surprenant que, dans un calcul si simple, les angles que nous venons de trouver, diffèrent de plus de deux minutes de ceux que donne M. *Kœnig*. Cette différence, et une autre plus importante que nous trouverons dans peu, me font regretter que le mémoire de ce mathématicien n'ait pas été publié. »

En effet, il y a de quoi regretter que l'on ne sache pas où König s'est trompé. Soit dit en passant, il est aussi regrettable que le mémoire de Parent soit passé à la trappe, parce que le « calcul si simple » de Lhuillier est à peu près le même que celui de Parent. Bon d'accord, il n'avait peut-être pas une connection internet pour télécharger le *Mercure Galant* depuis Gallica.

Il est encore plus surprenant

Lhuillier, *Mémoire sur le minimum de cire* (1781)

Cet accord, même dans les minutes, des résultats déduits de la théorie avec ceux que M. *Maraldi* dit avoir déduits de l'observation, **seroit bien surprenant** (sur-tout en ayant égard aux variations accidentelles qui ont lieu dans les figures des cellules), si cette dernière avoit été le seul guide de ce Physicien. Mais il est encore plus surprenant que, **dans un calcul si simple**, les angles que nous venons de trouver, diffèrent de plus de deux minutes de ceux que donne M. *Kœnig*. Cette différence, & une autre plus importante que nous trouverons dans peu, me font regretter que le Mémoire de ce Mathématicien n'ait pas été publié.

35 François Huber (1750–1831)

Même s'il n'était pas vraiment mathématicien, je voudrais vous parler de François Huber (encore un Suisse). À l'âge de vingt ans, il devient aveugle. C'est une double catastrophe. Comment faire d'une part pour assouvir sa passion des sciences naturelles s'il ne peut plus observer, d'autre part pour épouser sa Marie-Aimée Lullin. Ils sont amoureux l'un de l'autre depuis quelques années, mais le beau-père ne veut pas d'un aveugle comme gendre.

Aussi bien son mariage que sa passion de naturaliste seront deux réussites éclatantes. Comment a-t-il fait ? Pour son mariage, La jeune fille savait ce qu'elle voulait et elle a tenu bon face à son père. Tant mieux pour eux. Mais les observations ? Il nous donne la réponse dans la préface de son œuvre majeure, les « Nouvelles observations sur les abeilles ».

François Huber (1750–1831)



36 Nouvelles observations sur les abeilles (1792)

« J'avais pour lecteur un domestique, François Burnens né dans le Pays de Vaud, qui s'intéressait singulièrement à tout ce qu'il me lisait : je jugeai assez vite par ses réflexions sur nos lectures, et par les conséquences qu'il savait en tirer, qu'il les comprenait aussi bien que moi, et qu'il était né avec les talents d'un observateur. »

Le couple Huber-Burnens fonctionne à merveille. Leurs observations sont précises, justes et fondent véritablement l'apiculture moderne.

Nouvelles observations sur les abeilles (1792)

François Huber (1750–1831)

j'avois pour lecteur un domestique (François Burnens né dans le Pays-de-Vaud) qui s'intéressoit singulièrement à tout ce qu'il me lisoit : je jugeai assez vite par ses réflexions sur nos lectures, & par les conséquences qu'il favoit en tirer, qu'il les comprenoit aussi bien que moi, & qu'il étoit né avec les talents d'un observateur. Ce n'est pas le

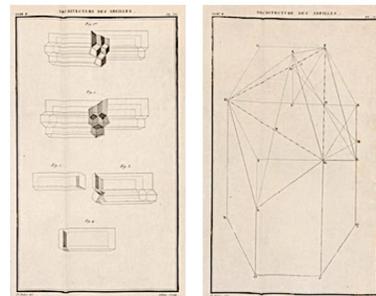
37 Nouvelles observations sur les abeilles (1814)

La vision géométrique que Huber a du fond des alvéoles est impressionnante de clarté. Il explique le problème d'optimisation, et en donne la solution géométrique simple de Lhuilier.

Les planches que vous voyez sont tirées de la nouvelle édition de 1814, considérablement augmentée. Elle se termine par cinq pages, dont voici le titre.

Nouvelles observations sur les abeilles (1814)

François Huber (1750–1831)



38 Solution d'un problème sur le fond des alvéoles (1740 ?)

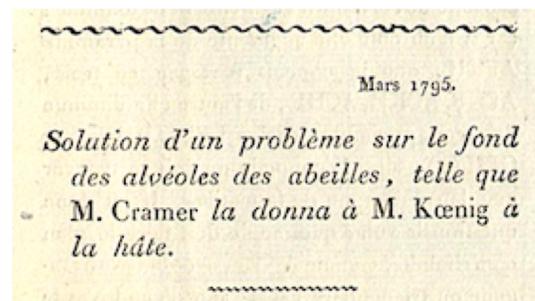
« Solution d'un problème sur le fond des alvéoles des abeilles, telle que M. Cramer la donna à M. König à la hâte. »

Donc Cramer, probablement après avoir pris connaissance de sa solution à base de calcul différentiel, avait donné à König le raisonnement géométrique élémentaire. Une fois de plus, Cramer n'avait rien publié et n'avait même pas cherché à faire connaître son travail en l'envoyant à d'autres. Et bien sûr, l'antériorité d'Antoine Parent était toujours ignorée.

Et la querelle philosophique des alvéoles? Elle n'était pas encore tranchée, même si la simplification du problème mathématique avait quelque peu terni l'image de « géomètres sublimes » des abeilles. Encore un demi siècle après Huber, Darwin quand il expose sa théorie de l'évolution, ne peut pas éluder la question.

Solution d'un problème sur le fond des alvéoles (1740 ?)

Gabriel Cramer (1704-1752)



39 Cell-making instinct of the Hive-Bee

« Il faudrait être bien insensible pour examiner cette délicate construction du rayon de cire, si parfaitement adaptée à son but, sans éprouver un sentiment d'admiration enthousiaste. Les mathématiciens nous apprennent que les abeilles ont résolu en pratique un problème des plus abstraits, celui de donner à leurs cellules, en se servant d'une quantité minima de leur précieux élément de construction, la cire, précisément la forme capable de contenir le plus grand volume de miel. »

Cell-making instinct of the Hive-Bee

Darwin, *The Origin of Species* (1859)

Cell-making instinct of the Hive-Bee.—I will not here enter on minute details on this subject, but will merely give an outline of the conclusions at which I have arrived. He must be a dull man who can examine the exquisite structure of a comb, so beautifully adapted to its end, without enthusiastic admiration. We hear from mathematicians that bees have practically solved a recondite problem, and have made their cells of the proper shape to hold the greatest possible amount of honey, with the least possible consumption of precious wax in their construction. It has been remarked that a skilful work-

40 to follow from a few very simple instincts

« Qu'on leur accorde tous les instincts qu'on voudra, il semble inconcevable que les abeilles puissent tracer les angles et les plans nécessaires et même se rendre compte de l'exactitude de leur travail. La difficulté n'est cependant pas aussi énorme qu'elle peut le paraître au premier abord, et l'on peut, je crois, démontrer que ce magnifique ouvrage découle d'un petit nombre d'instincts très simples. »

En résumé, Darwin déclare Buffon vainqueur de Réaumur par KO.

to follow from a few very simple instincts

Darwin, *The Origin of Species* (1859)

a dark hive. Grant whatever instincts you please, and it seems at first quite inconceivable how they can make all the necessary angles and planes, or even perceive when they are correctly made. But the difficulty is not nearly so great as it at first appears: all this beautiful work can be shown, I think, to follow from a few very simple instincts.

41 références

Je persiste à croire que le grand perdant de toute l'histoire est quand même Antoine Parent, dont le magnifique mémoire a été complètement zappé. Euh enfin bon, au moins pas dans cette histoire.

Allez une dernière fois avant de le renvoyer au purgatoire de l'oubli : Antoine Parent est le premier à avoir calculé les angles du fond des alvéoles des abeilles. Voilà, c'est dit !

références

- P.-H. Tavoillot, F. Tavoillot (2015) *L'abeille et le philosophe*, Paris : Odile Jacob
- D. Crypton (1985) The mathematics of the honeycomb, *Science Digest*, June 1985, 74–77
- L. Fejes Toth (1964) What the bees know and what they do not know, *Bulletin of the American Mathematical Society*, 70(4), 468–481
- F. Nazzi (2016) The hexagonal shape of the honeycomb cells depends on the construction behavior of bees, *Nature Scientific Reports*, 6, 28341
- A. Satabin (2004) L'âme de géomètre des abeilles, *Dossier Pour la Science*, 44
- A. Vos (2016) François Huber, roi des abeilles, *Campus*, 124, 48–51