

0 Le théorème d'al-Kāshī

Je vais vous raconter que le théorème d'al-Kashi n'est pas vraiment d'al-Kashi. Je vous entends déjà soupirer : Pfff! Encore! C'est toujours pareil! Oui, mais là, c'est pire que d'habitude : je ne connais pas le premier qui l'a trouvé, ni qui l'a démontré, encore moins qui l'a énoncé sous la forme que nous connaissons, et bien sûr je ne peux pas vous dire qui a décidé de le nommer ainsi, ni quand.

Ce dont je suis à peu près sûr, c'est que le théorème d'al-Kashi ne porte ce nom-là qu'en France, et encore depuis les années 1980 seulement. Ce dont je suis totalement sûr en revanche, c'est que al-Kashi méritait bien qu'on se souvienne de lui.

1 Relations métriques dans le triangle

À ma connaissance, la première mention du théorème d'al-Kashi, se trouve dans un manuel de seconde datant de 1981. Les auteurs, qui s'appellent Glaymann et Malaval, disent : « Cette formulation moderne du théorème d'al-Kashi est due à Viète. » Ce qui est doublement faux.

Regardez ce qu'on lit au début du manuel de première de la collection Terracher, édition de 1988. La relation $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ n'est pas un théorème. On indique simplement qu'elle porte souvent le nom de Relation de Pythagore généralisée. En note de bas de page, « Cette relation est attribuée à Al-Kashi, mathématicien du quinzième siècle. »

2 Relations métriques dans les triangles

Voici ce qu'on lisait cinquante ans auparavant dans un manuel de géométrie, au même chapitre « Relations métriques dans les triangles. ».

« Théorème : Dans un triangle, le carré d'un côté opposé à un angle aigu est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, diminuée du double produit de l'un de ces côtés par la projection de l'autre sur lui. » Pour un angle obtus, l'énoncé est le même, diminué est remplacé par augmenté.

C'est bien la même relation, mais le mot cosinus a disparu, au profit de la notion de projection. Cet énoncé nous vient en droite ligne d'Euclide. Voici la proposition douze dans le livre deux des Éléments.

histoires de géométrie

Le théorème d'al-Kāshī

de la géométrie à la trigonométrie



hist-math.fr

Bernard YCART

Relations métriques dans le triangle

P. H. Terracher, Mathématiques 1^{re} S et E (1988)

2. Relations fondamentales

a. La relation $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

On a $\vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB}$, d'où $BC^2 = \vec{AC}^2 + \vec{AB}^2 - 2\vec{AC} \cdot \vec{AB}$. Comme $\vec{AC} \cdot \vec{AB} = |\vec{AC}| |\vec{AB}| \cos A$, on obtient avec les conventions précédentes :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

Remarques

- On a de même $b^2 = c^2 + a^2 - 2ac \cos B$ et $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$.
- Cette relation porte souvent le nom de *Relation de Pythagore généralisée* (cf. exercice n° 31).

Exercices

- Retrouver la propriété de Pythagore et sa réciproque à l'aide de la relation précédente.
- Dans les exercices suivants, on utilise les notations de la figure ci-contre (α, β et γ sont les mesures en degrés des angles $\widehat{ABC}$, $\widehat{ACB}$ et $\widehat{BAC}$).
- Déterminer α, β et γ sachant que :
 - $b=3$, $c=4$, $a=6$
 - $b=5$, $c=12$, $a=13$
 - $b=7$, $c=8$, $a=9$
- On suppose ABC isocèle en A . Exprimer a^2 en fonction de b et α . Retrouver la formule : $a^2 = 2b^2(1 - \cos \alpha)$ (cf. activité 4).
- Cette relation est attribuée à Al-Kāshī, mathématicien du XV^e siècle.



Relations métriques dans les triangles

P. Chenevier, Cours de géométrie plane (1936)

Théorème. — Dans un triangle, le carré d'un côté opposé à un angle aigu est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, diminuée du double produit de l'un de ces côtés par la *projection* de l'autre sur lui.

De même l'égalité (5) s'écrit :

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ax.$$

C'est, appliqué au côté b , le résultat qui précède.

L'égalité (7) s'écrit, en changeant x en $-x$:

$$b^2 = a^2 + c^2 + 2ax.$$

L'angle B étant obtus, nous pouvons énoncer :

Théorème. — Dans un triangle le carré d'un côté opposé à un angle obtus est la somme des carrés des deux autres côtés, augmentée du double produit de l'un de ces côtés par la *projection* de l'autre sur lui.

3 Les Éléments, livre II proposition XII

« Dans les triangles obtusangles, le carré du côté qui soutend l'angle obtus est plus grand que les carrés des côtés qui comprennent l'angle obtus, de deux fois le rectangle compris sous celui des côtés de l'angle obtus sur le prolongement duquel tombe la perpendiculaire, et sous la droite prise extérieurement de la perpendiculaire à l'angle obtus. »

Oui bon, comme d'habitude chez Euclide, il faut réfléchir un moment avant de reconnaître l'énoncé dont nous avons l'habitude. Voici la proposition suivante, pour les angles aigus.

4 Les Éléments, livre II proposition XIII

« Dans les triangles acutangles, le carré du côté qui soutend un angle aigu est plus petit que les carrés des côtés qui comprennent cet angle aigu, de deux fois le rectangle compris sous le côté de l'angle aigu sur lequel tombe la perpendiculaire, et sous la droite prise intérieurement de la perpendiculaire à cet angle aigu. »

Ne croyez pas que Euclide soit l'heureux inventeur de ces deux propositions. Le livre deux des Éléments rassemble des résultats qui pour nous sont des identités d'algèbre. Pour les Grecs, et avant eux pour les Mésopotamiens, c'étaient des problèmes géométriques de superpositions et de divisions de triangles, de rectangles ou de carrés.

Quel qu'en soit l'auteur, les deux énoncés ont traversé les siècles, pratiquement inchangés depuis Euclide jusqu'au dix-neuvième.

5 si l'on abaisse AD perpendiculaire

Voici la cinquième édition d'un des manuels de géométrie à succès du dix-neuvième siècle, celui de Legendre. Comme vous le voyez, l'énoncé est très peu différent de celui d'Euclide, même s'il est un peu plus clair. Il y est toujours question de perpendiculaire abaissée, et de surface d'un rectangle.

Les Éléments, livre II proposition XII

Euclide (ca 325-265 av. J.-C.)

PROPOSITION XII.

Dans les triangles obtusangles, le carré du côté qui soutend l'angle obtus est plus grand que les carrés des côtés qui comprennent l'angle obtus, de deux fois le rectangle compris sous celui des côtés de l'angle obtus sur le prolongement duquel tombe la perpendiculaire, et sous la droite prise extérieurement de la perpendiculaire à l'angle obtus.

Les Éléments, livre II proposition XIII

Euclide (ca 325-265 av. J.-C.)

PROPOSITION XIII.

Dans les triangles acutangles, le carré du côté qui soutend un angle aigu est plus petit que les carrés des côtés qui comprennent cet angle aigu, de deux fois le rectangle compris sous le côté de l'angle aigu sur lequel tombe la perpendiculaire, et sous la droite prise intérieurement de la perpendiculaire à cet angle aigu.

si l'on abaisse AD perpendiculaire

A.-M. Legendre, Éléments de Géométrie (1804)

Dans un triangle ABC, si l'angle C est aigu, le carré du côté opposé sera plus petit que la somme des carrés des côtés qui comprennent l'angle C; et si l'on abaisse AD perpendiculaire sur BC, la différence sera égale au double du rectangle BC $\times$ CD; de sorte qu'on aura,

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \cdot BC \times CD.$$

6 deux fois le même produit

Autre manuel de géométrie à succès au dix-neuvième siècle : celui de Sylvestre François Lacroix. Différence avec Legendre et Euclide : l'énoncé est unique pour un triangle quelconque : on ne distingue plus les triangles obtusangles et acutangles ; seulement si la projection tombe en dedans ou en dehors.

Aussi il n'y est plus question de rectangle mais de produit. Regardez le début de l'énoncé. Les trois côtés sont rapportés à une mesure commune, et exprimés par conséquent en nombres. La géométrie d'Euclide s'est légèrement algébrisée. Mais par contre, il n'est toujours pas question de cosinus. Est-ce à dire que ces gens-là ne connaissaient pas les fonctions trigonométriques ? Bien sûr que non ! La même année, le même Lacroix, publiait un « Traité élémentaire de trigonométrie rectiligne et sphérique, et d'application de l'algèbre à la géométrie ».

7 par la propriété connue des triangles

On aura, par la propriété connue des triangles obliquangles, AB carré égale AC carré + BC carré plus ou moins $2 BC$ fois DC , où D est le pied de la perpendiculaire. Il ne reste qu'à remarquer que la longueur de la projection s'obtient en multipliant celle du segment projeté par le cosinus de l'angle. On obtient bien notre théorème d'al-Kashi. Oui, mais Lacroix n'a pas l'air de trouver qu'il mérite le statut de théorème. Il faut dire qu'il ne lui sert pas à grand chose.

Nous sommes dans le chapitre de trigonométrie rectiligne, autrement dit mesure des triangles dans le plan. Lacroix a annoncé un principe de base, plusieurs pages auparavant. « Lorsqu'on construit des formules qui doivent servir à des calculs numériques, il faut toujours tâcher de les préparer de manière qu'on puisse y appliquer les logarithmes commodément. »

Nous parlons d'un temps où la « résolution des triangles » comme on disait à l'époque, avait un intérêt pratique : comment faire pour calculer les angles et les côtés d'un triangle, quand on connaît certains d'entre eux ? Cela dépend de ce qu'on connaît ; et cela dépend surtout de la simplicité des formules, une fois transformées par les logarithmes.

deux fois le même produit

S. F. Lacroix, *Éléments de Géométrie* (1799)

73. *Théorème.* Les trois côtés d'un triangle quelconque ABC , fig. 41, étant rapportés à une mesure commune, et exprimés par conséquent en nombres, si de l'extrémité C de l'un quelconque AC de ces côtés, on abaisse une perpendiculaire sur l'un des deux autres, sur AB , par exemple, la seconde puissance du premier sera égale à la somme des secondes puissances des derniers, moins deux fois le produit du côté AB sur lequel tombe la perpendiculaire par le segment BD , opposé à ce premier, si la perpendiculaire tombe en-dedans du triangle, et plus deux fois le même produit, si elle tombe en dehors : c'est-à-dire qu'on aura,

dans le premier cas, $\overline{AC^2} = \overline{AB^2} + \overline{BC^2} - 2 \cdot \overline{AB} \times \overline{BD}$;
dans le deuxième, $\overline{AC^2} = \overline{AB^2} + \overline{BC^2} + 2 \cdot \overline{AB} \times \overline{BD}$.

par la propriété connue des triangles

S. F. Lacroix, *Traité élémentaire de trigonométrie* (1799)

BC , fig. 14. On aura, par la propriété connue des triangles obliquangles $\overline{AB^2} = \overline{AC^2} + \overline{BC^2} \mp 2BC \times DC$, le signe supérieur ayant lieu quand la perpendiculaire tombe en dedans du triangle, comme dans la figure, et le signe inférieur dans le cas où elle tombe en dehors : de plus, dans le triangle rectangle ADC , on a (29) $DC = AC \times \sin DAC = AC \times \cos C$, en faisant $R = 1$; on conclura de-là $\overline{AB^2} = \overline{AC^2} + \overline{BC^2} - 2AC \times BC \times \cos C$, et par conséquent

$$AB = \sqrt{\overline{AC^2} + \overline{BC^2} - 2AC \cdot BC \cdot \cos C},$$

8 Loi des sinus

La formule reine est la loi des sinus. Dans un triangle quelconque, dit Lacroix, les sinus des angles sont entre eux comme les côtés opposés à ces angles. Comprenez que le rapport du sinus d'un angle au côté opposé est constant.

Ah voilà une formule à laquelle on peut appliquer commodément les logarithmes. Mettons que l'on vous donne deux angles et un côté. Vous calculez le troisième angle qui est le supplément de la somme des deux autres. Les deux autres côtés s'expriment en fonction de celui que vous connaissez et d'un quotient de deux sinus. Passez aux logarithmes, le produit devient une somme et le quotient une différence. Comme les logarithmes de sinus sont tabulés, le calcul devient facile.

Supposons maintenant que vous ayez deux côtés et l'angle compris entre ces deux côtés. Vous cherchez le troisième côté. Vous vous dites : ah là notre bon vieux théorème d'al-Kashi va nous donner la réponse immédiatement. Non, parce que le théorème vous donne le carré du troisième côté, après avoir calculé les carrés des deux autres côtés et leur produit par le cosinus. Quand vous aurez ajouté le tout, il restera ensuite à faire une extraction de racine carrée. Il y a beaucoup plus simple : la « loi des tangentes ».

9 Loi des tangentes

Lacroix dit : « La somme des deux côtés d'un triangle est à leur différence, comme la tangente de la demi-somme des angles opposés à ces côtés, est à la tangente de leur demi-différence ». Oui bon, nous avons plus l'habitude de formules comme celle qui est en haut de l'image.

Disons que a et b sont les deux côtés donnés, grand A et grand B sont les deux angles inconnus. Vous connaissez leur somme qui est le supplément de l'angle donné. Vous déduisez leur différence de la formule, en utilisant une table des logarithmes de tangentes. La somme et la différence vous donnent les deux angles.

Reste un problème à résoudre : comment trouver les angles d'un triangle dont on connaît les trois côtés. Ah là le théorème d'al-Kashi s'impose ! Eh bien non, même pas : il y a, là aussi, une formule mieux adaptée aux logarithmes.

10 Demi-somme des trois côtés

« De la demi-somme des trois côtés, retranchez successivement chacun de ceux qui comprennent l'angle cherché ; multipliez les deux restes entre eux ; divisez ce produit par celui des côtés qui comprennent l'angle cherché, et prenant la racine carrée du quotient, vous aurez le sinus de la moitié de cet angle. »

Que ce soit plus simple que le théorème d'al-Kashi ne saute pas au yeux. Mais là encore, le passage aux logarithmes simplifie tout : deux sommes, deux différences et une division par deux, voilà à quoi se réduit le second membre.

Mais pourquoi était-il si important de « résoudre les triangles » comme on disait alors ? Pour l'arpentage des terrains agricoles mais surtout pour l'astronomie ; aussi, depuis la Renaissance, pour la navigation, et les relevés topographiques par triangulation, c'est-à-dire la géodésie.

Loi des sinus

S. F. Lacroix, Traité élémentaire de trigonométrie (1799)

$$AB \times \sin A = BC \times \sin C, \text{ ou } \sin A : \sin C :: BC : AB.$$

Lorsque la perpendiculaire tombe en-dehors, l'angle C n'est pas commun au triangle ABC et au triangle BCD ; mais l'angle BCD et l'angle BCA , valant ensemble deux angles droits, ont le même sinus.

La proportion que nous venons d'obtenir peut se convertir en principe général, et s'énoncer ainsi : Dans un triangle quelconque, les sinus des angles sont entre eux comme les côtés opposés à ces angles.

Loi des tangentes

S. F. Lacroix, Traité élémentaire de trigonométrie (1799)

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\tan \frac{1}{2}(A-B)}{\tan \frac{1}{2}(A+B)} (*),$$

d'où on déduira la proportion

$$a+b : a-b :: \tan \frac{1}{2}(A+B) : \tan \frac{1}{2}(A-B),$$

qui s'énonce ainsi : La somme des deux côtés d'un triangle est à leur différence, comme la tangente de la demi-somme des angles opposés à ces côtés, est à la tangente de leur demi-différence.

Demi-somme des trois côtés

S. F. Lacroix, Traité élémentaire de trigonométrie (1799)

$$\sin \frac{1}{2} C = \sqrt{\frac{(\frac{1}{2}f-a)(\frac{1}{2}f-b)}{ab}},$$

formule qui conduit à la règle suivante :

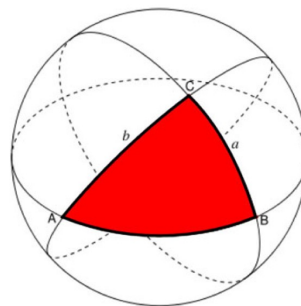
Pour trouver un angle d'un triangle, lorsque les trois côtés sont connus, de la demi-somme des trois côtés, retranchez successivement chacun de ceux qui comprennent l'angle cherché ; multipliez les deux restes entre eux ; divisez ce produit par celui des côtés qui comprennent l'angle cherché, et prenant la racine quarrée du quotient, vous aurez le sinus de la moitié de cet angle.

11 Triangle sphérique

Aussi bien pour l'astronomie que pour la navigation et la géodésie, les triangles que l'on doit considérer sont sphériques. Un triangle sphérique est compris entre trois grands cercles de la sphère.

La résolution des triangles sphériques passe par des formules de trigonométrie sphérique, qui sont les exacts pendants de celles de la trigonométrie plane.

Triangle sphérique



12 Loi des sinus sur la sphère

La première est la loi des sinus qui dit que les rapports des sinus des côtés à ceux des angles sont les mêmes.

Loi des sinus sur la sphère

S. F. Lacroix, Traité élémentaire de trigonométrie (1799)

Egalant entre elles les deux expressions de la ligne CD , nous en déduirons

$$\sin b \sin A = \sin a \sin B \dots\dots (A)$$

résultat qui est, par rapport aux triangles sphériques, l'analogue de celui du numéro 31.

Il est évident qu'on doit avoir de même les deux équations suivantes :

$$\begin{aligned} \sin c \sin A &= \sin a \sin C \\ \sin c \sin B &= \sin b \sin C. \end{aligned}$$

13 Loi des cosinus sur la sphère

Tout de suite après vient la loi des cosinus, l'analogue sphérique du théorème d'al-Kashi.

Loi des cosinus sur la sphère

S. F. Lacroix, Traité élémentaire de trigonométrie (1799)

Il est évident qu'en considérant en particulier chacun de ces derniers, on trouvera de même deux équations semblables à la précédente, et l'on formera de cette manière, entre les six parties du triangle ABC , les trois équations

$$\left. \begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c + \cos A \sin b \sin c \\ \cos b &= \cos a \cos c + \cos B \sin a \sin c \\ \cos c &= \cos a \cos b + \cos C \sin a \sin b \end{aligned} \right\} \dots\dots (B).$$

14 Résolution des triangles sphériques

Mais cette loi du cosinus n'entre pas dans les recettes de résolution des triangles sphériques. Lacroix donne pour chaque situation une formule, plus ou moins compliquée, mais toujours optimisée pour les tables de logarithmes.

Quand on connaît les trois côtés, on retrouve les trois angles par une formule analogue au cas des triangles plans. La nouveauté ici est qu'on peut retrouver les côtés quand on ne connaît que les angles.

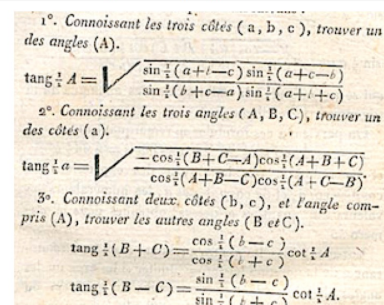
Bien : où en sommes-nous ? Résumé brutalement, ce qui précède nous a montré que la loi du cosinus est un résultat extrêmement ancien, qui n'a aucun intérêt pratique. L'idée saugrenue de lui donner un nom est récente, et propre à la France métropolitaine. Bon, mais avant d'écrire la loi du cosinus, il a bien fallu écrire des cosinus, et même des sinus, non ?

15 Composition Mathématique

Je vous raconte ailleurs l'histoire de la trigonométrie. En quelques mots, La première fonction trigonométrique a été la plus naturelle : la corde. C'était le seul outil de calcul des Grecs. Ptolémée, dans l'Almageste, dit que Hipparque, qui vivait au deuxième siècle avant notre ère, est le premier à avoir disposé de tables de cordes. En tout cas, Ptolémée en a calculé, de demi-degré en demi-degré. Il a même expliqué comment faire.

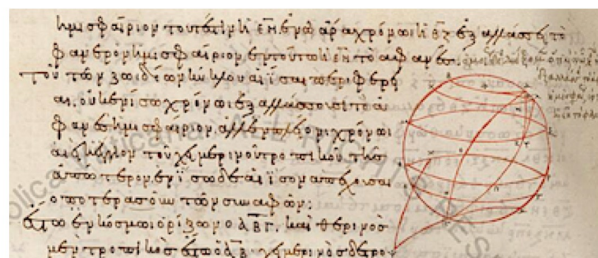
Résolution des triangles sphériques

S. F. Lacroix, Traité élémentaire de trigonométrie (1799)



Composition Mathématique

Claude Ptolémée (ca 85–165)

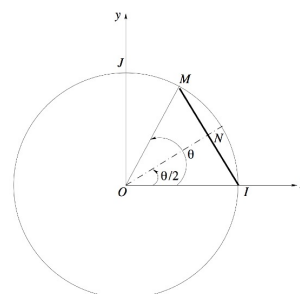


16 de la corde au sinus

Le passage de la corde au sinus s'est fait en Inde. Comme vous le voyez, la corde d'un angle est le double du sinus de l'angle moitié. La première trace qu'on en a est celle d'Aryabhata, et la notion a été reprise par ses successeurs, Brahmagupta en tête.

de la corde au sinus

Aryabhata (476–550)



17 Al-Bīrūnī (973-1048)

C'est chez les Arabes que la trigonométrie est devenue une discipline mathématique. Elle s'est développée d'abord à partir de l'astronomie indienne, ensuite à partir de l'Almageste de Ptolémée, et des Sphériques de Ménélaüs. L'origine en a été la résolution des triangles sphériques. La plupart des grands astronomes arabes y ont contribué. Je vous cite en tête al-Biruni et ses « Clés de la science de l'astronomie », parce qu'il est un des plus grands. Mais de son temps, c'est-à-dire autour de l'an mille, les formules importantes avaient déjà été trouvées.

Comme d'habitude, de nombreuses controverses et querelles de priorité, avaient accompagné ces découvertes. Al-Biruni les évoque avec regret.

Al-Bīrūnī (973-1048)



18 Kitāb maqālīd 'ilm al-hay'ah

« Une âpre rivalité oppose ceux qui sont en compétition. Ils se jalourent mutuellement. Querelles et disputes l'emportent au point que chacun envie l'autre et se glorifie de ce qui n'est pas de lui. Tel pille les découvertes d'autrui, se les attribue et en tire profit, et il voudrait encore que l'on feigne de ne pas s'en apercevoir ; mieux, qui dénonce son imposture est aussitôt pris à partie et exposé à sa vindicte. »

Cela sent le vécu. La découverte dont il parle est la loi des sinus dans les triangles sphériques. Abu l-Wafa, pourrait être l'auteur du cas général, mais d'autres avant lui, comme Thabit ibn Qurra, en avaient déjà donné des cas particuliers. Abu l-Wafa est un de ceux qui ont vraiment transformé la discipline. Son livre est intitulé « Révision de l'Almageste », par référence à Ptolémée. En voici un extrait. La fonction tangente y apparaît pour la première fois. Aussi, il est un des premiers à fixer le rayon du cercle de référence à un, ce qu'il appelle la mesure.

Kitāb maqālīd 'ilm al-hay'ah
Al-Bīrūnī (973-1048)

Une âpre rivalité oppose ceux qui sont en compétition. Ils se jalourent mutuellement. Querelles et disputes l'emportent au point que chacun envie l'autre et se glorifie de ce qui n'est pas de lui. Tel pille les découvertes d'autrui, se les attribue et en tire profit, et il voudrait encore que l'on feigne de ne pas s'en apercevoir ; mieux, qui dénonce son imposture est aussitôt pris à partie et exposé à sa vindicte.

19 Révision de l'Almageste

« Le rapport de la tangente à la mesure égale le rapport du sinus au cosinus. Et le rapport de la cotangente à la mesure égale le rapport du cosinus au sinus. Et le rapport de la cotangente à la mesure égale le rapport de la mesure à la tangente. Il est évident que si nous prenons la mesure égale à un, le rapport du sinus au cosinus est la tangente, et le rapport du cosinus au sinus est la cotangente. »

Révision de l'Almageste
Abul Wāfā (940-998)

Le rapport de la tangente à la mesure égale le rapport du sinus au cosinus. Et le rapport de la cotangente à la mesure égale le rapport du cosinus au sinus. Et le rapport de la cotangente à la mesure égale le rapport de la mesure à la tangente. Il est évident que si nous prenons la mesure égale à un, le rapport du sinus au cosinus est la tangente, et le rapport du cosinus au sinus est la cotangente.

20 Naṣīr ad-Dīn aṭ-Tūsī (1201-1274)

À partir de l'an mille, commencent à apparaître des ouvrages entièrement consacrés à la trigonométrie. L'un des plus connus est le « Livre sur la figure sécante » de al-Tusi. Il y traite de la résolution des triangles plans ou sphériques, en donnant de nombreuses formules et méthodes de calcul. Cela ressemble à ce que nous avons vu chez Lacroix, l'utilisation des logarithmes en moins. Il a une remarque intéressante à propos des formules de résolution.

Naṣīr ad-Dīn aṭ-Tūsī (1201-1274)



21 Livre sur la figure sécante

« Sachez que le but qu'on s'est proposé par cette analyse n'est point de limiter les procédés à suivre pour trouver les inconnues, [...] car en définitive, la personne intelligente qui se sera bien pénétrée des démonstrations saura toujours beaucoup plus facilement retrouver les procédés de ce calcul qu'elle ne saurait servilement retenir ces formules. »

On peut considérer qu'avec al-Tusi, la trigonométrie est arrivée à maturité : les fonctions utiles sont connues, les formules de résolution des triangles sont au point, autant pour le plan que pour la sphère.

Livre sur la figure sécante

Naṣīr ad-Dīn aṭ-Tūsī (1201-1274)

Sachez que le but qu'on s'est proposé par cette analyse n'est point de limiter les procédés à suivre pour trouver les inconnues, [...] car en définitive, la personne intelligente qui se sera bien pénétrée des démonstrations saura toujours beaucoup plus facilement retrouver les procédés de ce calcul qu'elle ne saurait servilement retenir ces formules.

22 Giyāth al-Dīn Jamshīd Masūd al-Kāshī (ca 1380-1429)

Alors deux siècles après al-Tusi, que restait-il à découvrir pour al-Kashi? Certainement pas la loi des cosinus, connue bien avant lui, ni même aucune des formules trigonométriques pour la résolution des triangles.

Giyāth al-Dīn Jamshīd Masūd al-Kāshī (ca 1380-1429)



23 Madrasa Ulugh Beg, Samarcande

Quand al-Kashi avait été appelé par Ulugh Beg en 1421, il était déjà connu comme mathématicien et astronome. Ulugh Beg avait construit à Samarcande une école et un observatoire. Seule l'école est restée. Le monument que vous voyez le montre assis, entouré de savants qui posent doctement. L'un d'entre eux est probablement al-Kashi.

Entre 1424 et 1427, al-Kashi écrit trois traités majeurs.

Madrasa Ulugh Beg, Samarcande

Ulugh Beg (1394-1449)



24 al-Risāla al-muhītīyya (1424)

Dans le traité sur la circonférence, il pousse la méthode d'exhaustion d'Archimède pour le calcul de π , jusqu'à des polygones à 805 millions de côtés. Le résultat, avec 16 décimales exactes, ne sera surpassé en Europe qu'au dix-septième siècle.

Dans un traité de trigonométrie, « Sur la corde et le sinus », il calcule le sinus de un degré avec 17 décimales exactes. Pour cela il commence par calculer le sinus de trois degrés, par différence entre 18 degrés et 15 degrés, puis il établit une équation de degré trois, et résout cette équation par approximations successives.

Au-delà de ces exploits numériques, l'ouvrage majeur d'al-Kashi est sa « Clé de l'Arithmétique », datée de 1427.

25 Miftāh al-hisāb (1427)

Concrètement à ce que le titre laisse entendre, l'ouvrage contient beaucoup de géométrie, et même de géométrie très appliquée. La figure que vous voyez représente une voûte.

26 Bazar de Kashan

Voici l'intérieur du Bazar à Kashan, la ville natale d'al-Kashi dans l'Iran actuel. Vous voyez les trois objets des études géométriques d'al-Kashi : des voûtes, des dômes dont al-Kashi nous apprend à calculer les volumes, et un plafond ouvragé avec des sortes de stalactites, qu'on appelle des « Muqarnas ».

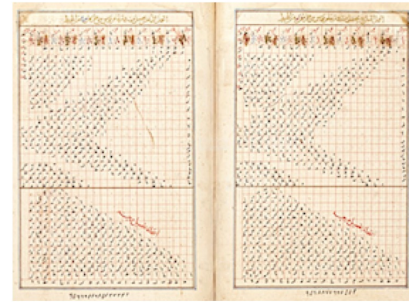
Al-Kashi les réduit en éléments dont il donne les surfaces. Contrairement à la plupart des savants arabes, on connaît quelques détails de la vie d'al-Kashi. C'est grâce à des lettres à son père, qui ont été conservées. Je vais vous en lire quelques extraits, illustrés par des exemples de cette magnifique architecture arabe, sujet des calculs d'al-Kashi.

27 Maison des Boroujerdi à Kashan

« Quand je suis arrivé ici, comme on fait partout, tous ont commencé à se renseigner et à espionner pour connaître ma propre compétence dans cet art, afin, s'ils trouvaient que ma compétence était faible, ou égale, ou légèrement supérieure à la leur, ils puissent conserver leurs postes ; ils ne voulaient pas qu'il soit dit qu'un étranger était arrivé et avait pris le pas sur eux. »

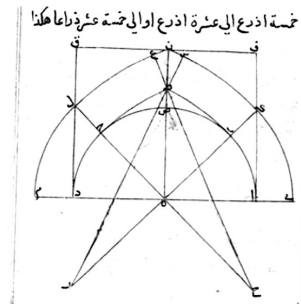
al-Risāla al-muhītīyya (1424)

Giyāth al-Dīn Jamshīd Masūd al-Kāshī (ca 1380-1429)



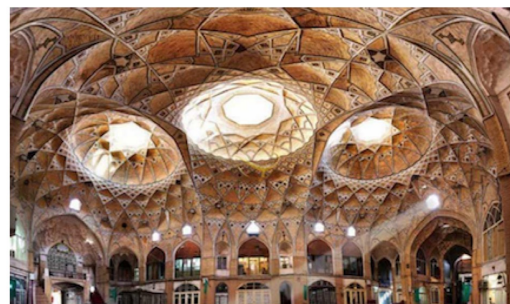
Miftāh al-hisāb (1427)

Giyāth al-Dīn Jamshīd Masūd al-Kāshī (ca 1380-1429)



Bazar de Kashan

al-Kāshī, Miftāh al-hisāb (1427)



Maison des Boroujerdi à Kashan

Giyāth al-Dīn Jamshīd Masūd al-Kāshī (ca 1380-1429)



28 Bazar de Kashan

« Dans les discussions en présence de sa majesté royale, ils étaient confrontés à certaines difficultés sur lesquelles ils avaient passé un mois ou deux, ou même un an, sans trouver de solution. Le jour même de mon arrivée à Samarcande, mes bagages n'étaient pas encore là, j'empruntai un calame et de l'encre à un étudiant, je résolus tous ces problèmes et soumis mes solutions à son auguste majesté (Ulugh Beg donc). »

29 Hammam de Kashan

« Sa majesté me testa sur des cas semblables. Elle m'ordonna de placer un cadran solaire sur le mur du palais royal, dont l'azimuth était inconnu. Je dessinai les lignes. Tous les spécialistes vinrent voir le résultat, y compris Qazizada Roumi, qui est le plus savant de tous, et qui confessa que c'était très difficile. Il essaya en vain de trouver la méthode, et finalement dut me la demander, reconnaissant ainsi ma victoire en présence de beaucoup de gens. »

30 Madrasa Ulugh Beg, Samarcande

« Sa majesté dit une fois : « nous voudrions faire un trou dans le mur de la mosquée tel que le soleil passe brièvement par ce trou au moment de la prière de l'après-midi, à la fois en été et en hiver. Ce trou doit être rond à l'intérieur, mais à l'extérieur il doit être tel que les rayons du soleil n'y passent qu'au moment de la prière de l'après-midi. » Ceci avait déjà été demandé avant mon arrivée, et personne n'en avait été capable. Quand je fus là, je le fis également. »

31 Qubba de Tamerlan, Samarcande

« De plus, sa majesté royale visite l'école plusieurs fois par semaine, assiste aux cours, et je l'accompagne. Nous ne savons pas sur quoi la leçon va porter, ni quels problèmes vont être soulevés, car les étudiants et le professeur en ont discuté la veille au soir. Je suis parfois intervenu sans aucune préparation et j'en ai dit tellement sur le sujet que tout le monde était abasourdi. »

Bref, vous l'avez compris, al-Kashi est le meilleur ! Et son théorème alors ? Eh bien il en existe un. Dans son esprit, ce serait plutôt un lemme, qu'il utilise à plusieurs reprises dans son traité de la circonférence. Cette fois-ci, il est bien le premier, et il l'a démontré, fort élégamment d'ailleurs. Voici l'énoncé d'al-Kashi.

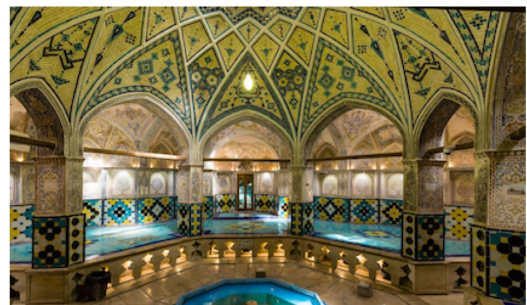
Bazar de Kashan

Giyāth al-Dīn Jamshīd Masūd al-Kāshī (ca 1380-1429)



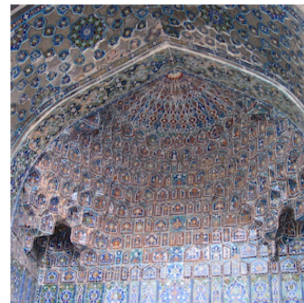
Hammam de Kashan

Giyāth al-Dīn Jamshīd Masūd al-Kāshī (ca 1380-1429)



Madrasa Ulugh Beg, Samarcande

Giyāth al-Dīn Jamshīd Masūd al-Kāshī (ca 1380-1429)



Qubba de Tamerlan, Samarcande

Giyāth al-Dīn Jamshīd Masūd al-Kāshī (ca 1380-1429)



32 Théorème d'al-Kashi

« Je dis que le produit du diamètre ajouté à la corde d'un arc moindre que la demi-circonférence, par la moitié du diamètre, est égal au carré de la corde d'un arc qui est la somme du premier et de la moitié de son supplément. »

Une figure et une formule plus tard, vous voyez ce qu'il veut dire. Dans un demi-cercle, placez l'arc AG , inférieur à $\pi/2$. Marquez le point D au milieu de l'arc supplémentaire GB . Vous prenez le diamètre $2R$, vous lui ajoutez la corde de l'arc dont vous êtes parti, vous multipliez la somme par le rayon R et vous trouvez le carré de la corde AD .

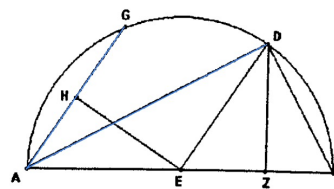
Je vous laisse le plaisir de le démontrer vous même. Vous avez le droit d'utiliser le théorème de Pythagore, puisque vous savez qu'il n'est pas de Pythagore.

33 références

Comment ça, ça sert à rien ? Ben, pas plus que le théorème d'al-Kashi que vous connaissiez jusque-là. À propos, vous avez entendu parler de la loi de Stigler ? « Aucune loi ne porte le nom de son inventeur. » Ce n'est pas Stigler qui l'a énoncée le premier.

Théorème d'al-Kashi

al-Kāshī, al-Risāla al-muhītīyya (1424)



$$R(2R + \overline{AG}) = \overline{AD}^2$$

références

- M. K. Azarian (2015) A study of Risāla al-Waṭar wa'l Jaib ("The treatise on the Chord and Sine"), *Forum Geometricorum*, 15, 229-242
- M.-T. Debarnot (1997) Trigonométrie, in R. Rashed ed., *Histoire des sciences arabes vol.2*, Paris : Seuil, 163-198
- A. Djebbar (2004) La phase arabe de l'histoire de la trigonométrie, in E. Hébert ed. *Instruments scientifiques à travers l'histoire*, Paris : Ellipses, 415-434
- Y. Dold-Semponius (1999) Le volume des dômes dans les mathématiques arabes, *L'Ouvret*, 94, 18-31
- J. Taheri (2017) Practical arithmetic in Islamic architecture : a critical history and survey, *International Journal of Architectural Heritage*, 11(5), 747-762
- G. Van Brummelen (2010) Filling in the short blanks : musings on bringing the historiography of mathematics to the classroom, *Journal of the British Society for the History of Mathematics*, 25(1), 2-9