0 Les lunules d'Hippocrate

Nous allons parler du tout premier texte de la géométrie grecque, qui nous soit parvenu de façon à peu près fiable. « À peu près fiable », ne signifie évidemment pas qu'un manuscrit de l'auteur soit sous nos yeux. Non, le premier historien des mathématiques a rapporté ce que vous allez entendre, dans un livre qui a été perdu, mais qui est cité par d'autres auteurs, grecs eux aussi, mais postérieurs d'une bonne pincée de siècles. C'est mieux que rien, et il va falloir s'en contenter.

histoires de géométrie

Les lunules d'Hippocrate

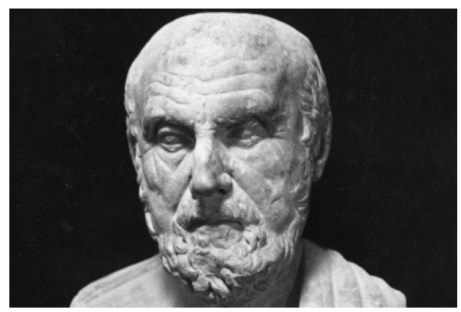
trois problèmes grecs

hist-math.fr Bernard Ycart

1 Hippocrate de Chios (ca 470–410 av. J.-C.)

L'auteur initial, c'est Hippocrate de Chios. Ce n'est pas le grand Hippocrate médecin du serment d'Hippocrate. Ses dates, tout comme ce portrait, sont hypothétiques. Il vivait environ un siècle après Pythagore, et un siècle avant Euclide. De sa vie, on ne sait pas grand chose, à part une brève mention, pas très flatteuse, d'Aristote dans la Morale à Eudème. Je vous la lis.

Hippocrate de Chios (ca 470–410 av. J.-C.)



2 Morale à Eudème

« Ce qu'il y a de sûr, c'est que ce n'est pas la prudence qui fait le succès des gens dont nous parlons J'ajoute que leur incapacité est de toute évidence ; et je ne dis pas seulement pour les autres choses ; car il n'y aurait en cela rien d'étonnant ; comme il est tout simple qu'un grand géomètre, un Hippocrate, inhabile et ignorant dans tout le reste, ait perdu dans un voyage, par suite de la naïveté qu'on lui prête, une somme considérable avec ceux qui prélèvent le cinquantième à Byzance. »

Donc il était inhabile et ignorant, et mauvais en affaire ? Peut-être, mais c'était tout de même un grand géomètre.

Ce qui suit provient d'Eudème de Rhodes. C'était un élève d'Aristote, le tout premier Grec à avoir écrit sur l'histoire des mathématiques. Mais tous ses écrits ont été perdus, et on n'en a que des citations. Sur Hippocrate, le texte reconstitué par Paul Tannery commence ainsi.

« Quant aux quadratures des lunules, figures qui, en raison de leur parenté avec le cercle, semblent en dehors des ordinaires, Hippocrate fut le premier à les écrire, et il semble les avoir exposées d'une façon satisfaisante ; aussi nous allons nous y attacher de plus près et les parcourir. »

Morale à Eudème

Aristote (384–322 av. J.-C.)

Ce qu'il y a de sûr, c'est que ce n'est pas la prudence qui fait le succès des gens dont nous parlons. [...] J'ajoute que leur incapacité est de toute évidence ; et je ne dis pas seulement pour les autres choses ; car il n'y aurait en cela rien d'étonnant ; comme il est tout simple qu'un grand géomètre, un Hippocrate, inhabile et ignorant dans tout le reste, ait perdu dans un voyage, par suite de la naïveté qu'on lui prête, une somme considérable avec ceux qui prélèvent le cinquantième à Byzance.

3 Segments semblables de cercles

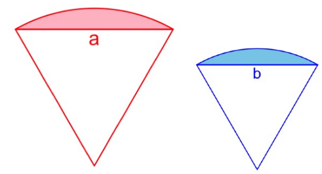
« Il les a commencées en établissant, comme première des propositions utiles pour ces quadratures, que les segments semblables de cercle sont entre eux dans le même rapport que leurs bases en puissances. » « En puissance », signifie « au carré ».

Vous voyez la figure. Deux segments de cercle semblables sont déterminés par deux angles au sommet égaux. Le rapport des surfaces est le carré des rapports des cordes, ou des rayons.

Selon Eudème : « Il le démontre en s'appuyant sur ce qu'il avait démontré : que les cercles sont dans le même rapport que leurs diamètres en puissance ». En d'autres termes, les surfaces de deux cercles ont pour rapport le rapport des carrés des diamètres.

Cette proposition, Hippocrate l'utilise avec brio. Voici le premier résultat, exposé par Eudème de Rhodes.

Segments semblables de cercles
Hippocrate de Chios (ca 470–410 av. J.-C.)



Rapport des surfaces $= \dfrac{a^2}{b^2}$

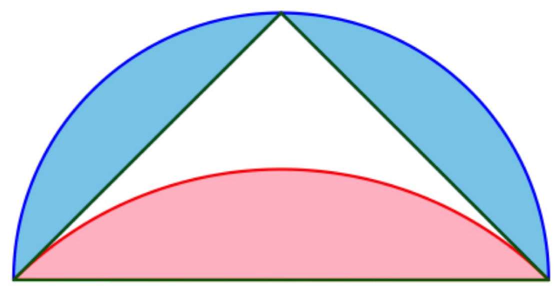
4 Triangle rectangle isocèle

« Cela démontré, il écrivit en premier lieu comment peut se faire la quadrature d'une lunule dont l'arc extérieur est d'un demi-cercle. Il l'exposa en circonscrivant un demi-cercle à un triangle rectangle et isocèle, et en décrivant sur la base un segment de cercle semblable à ceux retranchés par les côtés. Ce segment sur la base étant égal à la somme des deux sur les côtés, si l'on ajoute de part et d'autre la partie du triangle qui est au-dessus du segment sur la base, la lunule sera égale au triangle. »

Le texte est plutôt clair : regardez la figure. Le rapport de l'hypoténuse du triangle aux côtés est racine de deux, donc le rapport du segment rose à chacun des segments bleus est deux ; donc la surface rose est égale aux deux surfaces bleues. Donc la lunule, qui est la portion comprise entre les arcs de cercles rouge et bleu, a la même surface que le triangle vert.

En général, ce que l'on lit sur les lunules d'Hippocrate en reste là. On ne lui rend pas justice, car les propositions suivantes sont de niveau nettement plus élevé. Je ne vais pas vous les citer toutes, une seule suffira à vous donner une idée. Je vous la raconte en termes modernes.

Triangle rectangle isocèle
Hippocrate de Chios (ca 470–410 av. J.-C.)

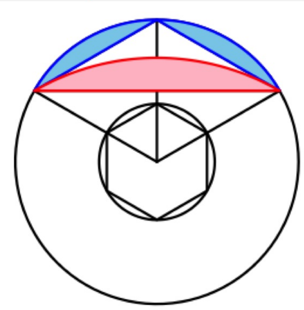


5 Deux cercles concentriques

Prenez deux cercles concentriques tels que le rapport des surfaces soit six. Tracez un hexagone régulier dans le plus petit, et prolongez trois rayons consécutifs jusqu'au plus grand. Les trois points d'intersection avec le grand cercle forment un triangle.

Sur le plus grand côté de ce triangle, tracez un arc de cercle, de sorte que le segment rose soit semblable aux deux segments bleus. Commencez par vérifier que la surface rose est le triple de chacune des surfaces bleues.

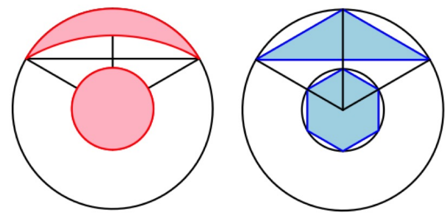
Deux cercles concentriques
Hippocrate de Chios (ca 470–410 av. J.-C.)



6 Lunule et cercle

Lunule et cercle

Hippocrate de Chios (ca 470–410 av. J.-C.)



Le résultat d'Hippocrate est que la somme des surfaces de la lunule et du petit disque, est égale à la somme des surfaces du triangle et de l'hexagone.

Je vous laisse le plaisir de le démontrer, ce n'est pas tout à fait évident. Le résultat est splendide, mais pourquoi est-il important ? Parce que c'est une quadrature, et qu'elle n'est pas loin de la quadrature du cercle. Écoutez encore Aristote.

7 Logique, Tome I Catégories

« Sans la chose qui peut être sue, il n'y a pas de science ; car ce serait la science de rien ; mais la chose à savoir peut fort bien exister sans la science. Par exemple, la quadrature du cercle, si toutefois c'est une chose qui puisse être sue, existe comme chose à savoir, bien que la science de cette chose n'existe pas encore. »

Logique, Tome I Catégories

Aristote (384–322 av. J.-C.)

Sans la chose qui peut être sue, il n'y a pas de science ; car ce serait la science de rien ; mais la chose à savoir peut fort bien exister sans la science. Par exemple, la quadrature du cercle, si toutefois c'est une chose qui puisse être sue, existe comme chose à savoir, bien que la science de cette chose n'existe pas encore.

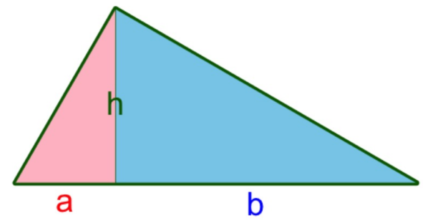
Euh... oui, mais encore ? Effectuer une quadrature, c'est construire (sous entendu à la règle et au compas) un carré dont la surface soit égale à une figure donnée. On ne sait pas exactement de quand date le problème. On le retrouve dans les Shulba Sutras en Inde, en Mésopotamie et en Égypte. La nouveauté en Grèce, consiste à chercher une solution exacte et démontrée, et non plus approchée.

Mais en quoi les deux résultats d'Hippocrate que nous avons vus sont-ils des quadratures ? Dans le premier on trouvait un triangle de surface égale à celle d'une lunule, dans le second un triangle plus un hexagone. C'est que, déjà du temps d'Hippocrate, la quadrature du triangle, ou de n'importe quelle figure réunion de triangles était bien connue.

8 Moyenne proportionnelle

Ramener la surface d'un triangle à celle d'un rectangle est facile. Comment passer d'un rectangle à un carré ? Regardez la figure. Soient a et b les deux côtés du rectangle. Ajoutez-les et tracez au-dessus un triangle rectangle. La hauteur issue de l'angle droit partage ce triangle en deux triangles, rose et bleu. Ils sont semblables, donc h sur a est égal à b sur h, donc h carré est égal à ab.

Moyennes proportionnelles



$$\frac{h}{a} = \frac{b}{h} \quad ; \qquad h^2 = ab$$

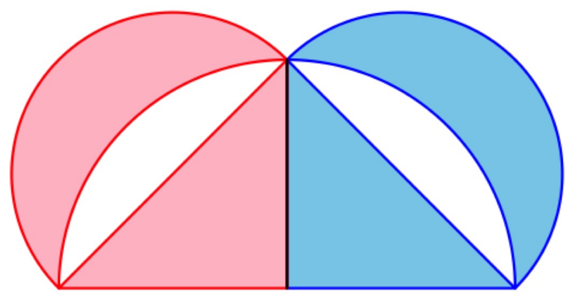
On disait que h est la « moyenne proportionnelle » de a et b. Nous parlons plutôt de moyenne géométrique. À l'époque, la moyenne proportionnelle était un cas particulier de « médiété ». C'est une notion importante et très ancienne. Les Grecs utilisaient toutes sortes de médiétés entre longueurs. En plus de nos moyennes arithmétique, géométrique et harmonique, il y en avait huit autres. Nous retrouverons bientôt la moyenne proportionnelle.

Mais avant, je vais vous demander de taper « lunule » et « Hippocrate » sur votre moteur de recherche, en cherchant les images.

Ça y est ? Déjà ? Dites, vous avez une bonne connexion ! Vous avez vu, ou plutôt pas vu ? Les figures que je vous ai montrées n'y sont pas. Pourquoi ?

9 Triangle rectangle isocèle

Triangle rectangle isocèle
Hippocrate de Chios (ca 470–410 av. J.-C.)



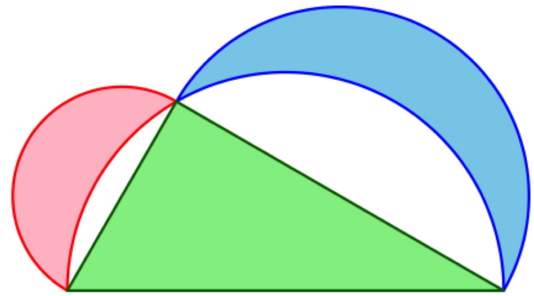
La première raison est que les citations s'arrêtent en général à la première quadrature, la plus facile ; celle du triangle rectangle isocèle. La plupart du temps, elle n'est pas présentée à partir du cercle circonscrit, comme le fait Hippocrate, mais dans l'autre sens, comme sur cette figure. Bien sûr cela revient au même, mais cela minimise l'exploit.

10 Sur les lunules

Parce que ce n'est qu'un cas particulier d'un résultat plus général, qui est celui que vous trouvez un peu partout sous le nom d'Hippocrate.

Sur cette figure, le triangle rectangle vert n'est plus isocèle. La somme des deux lunules rose et bleue est égale à la surface du triangle. C'est une conséquence du théorème de Pythagore généralisé, je vous en parle ailleurs.

Sur les lunules
Ibn al-Haytham (ca 965–1040)



Oui, mais ce résultat n'est pas d'Hippocrate. Il est d'Ibn al-Haytham. Al-Haytham a écrit pas moins de trois traités sur le sujet. Un traité abrégé sur les lunules, un sur la quadrature du cercle, et plus tard un autre traité, exhaustif celui-là, encore sur les lunules.

Le résultat que vous voyez est un des premiers qu'il expose, dans chacun des trois traités. Dans l'introduction du traité sur la quadrature du cercle, al-Haytham exprime clairement l'espoir suscité par les quadratures de lunules : si on peut trouver une quadrature pour la réunion d'une lunule et d'un cercle, et d'autre part pour une lunule seule, pourquoi ne pourrait-on pas trouver une quadrature pour le cercle ?

11 Sur la quadrature du cercle

« Nous avons réfléchi profondément à cette notion et il nous a alors été révélé qu'elle est possible, qu'elle n'est pas difficile, et qu'elle a des analogues : il peut exister une lunule entourée par deux arcs de deux cercles tout en étant égale à un triangle, et il peut exister une lunule et un cercle, dont la somme est égale à un triangle. [...] Mais comme il en est ainsi pour les figures, nous sommes devenu plus intimement convaincu qu'il est possible que l'aire du cercle soit égale à l'aire d'un quadrilatère de côtés droits. »

Sur la quadrature du cercle
Ibn al-Haytham (ca 965–1040)

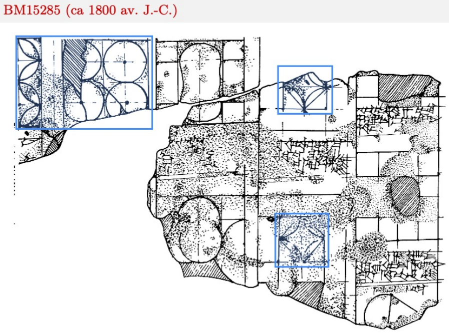
Nous avons réfléchi profondément à cette notion et il nous a alors été révélé qu'elle est possible, qu'elle n'est pas difficile, et qu'elle a des analogues : il peut exister une lunule entourée par deux arcs de deux cercles tout en étant égale à un triangle, et il peut exister une lunule et un cercle, dont la somme est égale à un triangle. [...] Mais comme il en est ainsi pour les figures, nous sommes devenu plus intimement convaincu qu'il est possible que l'aire du cercle soit égale à l'aire d'un quadrilatère de côtés droits.

Mais dans ledit traité, al-Haytham ne fait que démontrer qu'il *existe* un carré de surface égale à celle d'un cercle donné. Il ne parvient pas, bien sûr, à trouver lequel. Quoi qu'il en soit, c'est bien lui qui a démontré le premier, le résultat que vous trouvez partout sous le nom de « lunules d'Hippocrate ». Non pas qu'Hippocrate en ait été incapable, nous avons vu qu'il savait faire plus difficile.

Mais au fond, d'où lui était venue cette idée de lunule ? Il se trouve que des figures de cercles incrits ou circonscrits, avec des carrés ou des triangles, on en trouve un peu partout, depuis des temps très reculés.

12 Problèmes d'aires

Problèmes d'aires
British Museum BM15285 (ca 1800 av. J.-C.)



Cette tablette de la période babylonienne ancienne contient plusieurs dizaines de problèmes de calculs d'aires. Au recto, il s'agit de carrés ou de losanges inclus eux-mêmes dans d'autres carrés ou losanges. Le verso que vous voyez ici contient des exercices sur des intersections de cercles, ou bien de cercles et de carrés.

Il est probable que les figures aient existé avant les problèmes, peut-être sous forme purement décorative.

13 Boîte à onguents

Comme sur le couvercle de cette boîte à onguents retrouvé dans une tombe datant de l'Égypte ancienne.

Boîte à onguents
Égypte (ca 1500 av. J.-C.)

14 Fleur de vie

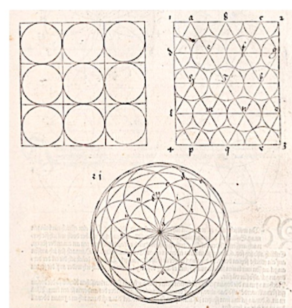
Vous voyez la même décoration sur cette mosaïque du temple d'Amritsar, en Inde. Cette figure apparaît un peu partout, avec des habillages plus ou moins mystiques, sous le nom de « fleur de vie ».

Fleur de vie
Amritsar, Golden Temple (XVIIe siècle)

15 Underweysung der Messung (1525)

En fait, les pavages, les rosaces, et autres combinaisons, ont toujours fait partie de l'arsenal des décorateurs. Ceci est extrait des « Instructions pour la mesure à la règle et au compas » d'Albrecht Dürer.

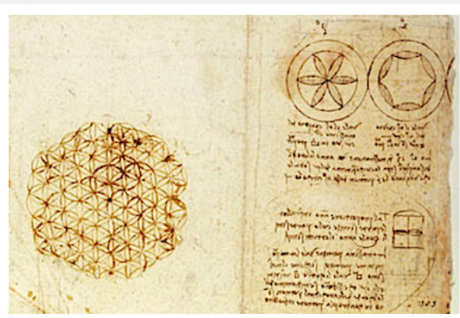
Underweysung der Messung (1525)
Albrecht Dürer (1471–1528)



16 Codex Atlanticus (ca 1500)

Leonard de Vinci était certainement sensible à l'aspect esthétique de ce genre de figure. On en trouve très régulièrement au fil de ses carnets. Mais ce n'était pas que pour une question de décoration.

Codex Atlanticus (ca 1500)
Leonardo da Vinci (1452–1519)

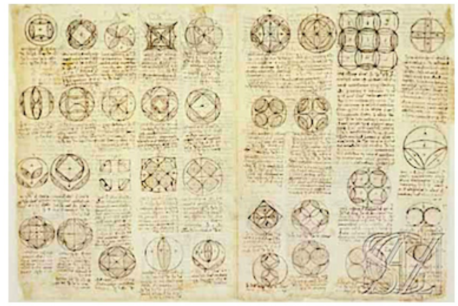


17 Codex Atlanticus (ca 1500)

Léonard croyait au rêve d'al-Haytham, la quadrature du cercle par les lunules. Il a passé des heures, et a noirci des dizaines de pages de ses carnets à chercher des quadratures de lunules.

Mais il était aussi conscient des autres outils à sa disposition.

Codex Atlanticus (ca 1500)
Leonardo da Vinci (1452–1519)

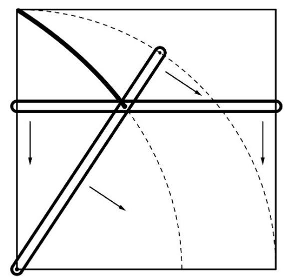


18 Quadratrice

Or des outils pour la quadrature du cercle, il en existait de nombreux autres, au moins depuis le temps de Platon. Celui-ci est un des plus anciens. La quadratrice d'Hippias, ou de Dinostrate, c'est selon.

Imaginez deux tiges : une coulisse verticalement, l'autre est articulée en bas à gauche. La première part du haut, la deuxième démarre à la verticale. Les deux descendent à la même vitesse et arrivent dans la même position en bas au même moment. On appelle quadratrice la courbe décrite par le point d'intersection des deux tiges. C'est une des toutes premières courbes de l'histoire qui ne soit ni une droite ni un cercle.

Quadratrice
Hippias d'Élis (ca 460–400 av. J.-C.)

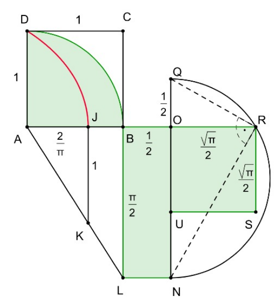


19 Quadrature du cercle

Sur cette image la quadratrice est la courbe rouge. Le point d'intersection avec l'horizontale a pour abscisse $2/\pi$. Un coup de théorème de Thalès, et vous construisez une longueur égale à $\pi/2$. Vous avez donc un rectangle de surface $\pi/4$. Un triangle rectangle permet de construire une moyenne proportionnelle, comme on l'a vu plus haut, et vous récupérez un carré de même surface : c'était le but du jeu.

Des constructions comme celle-là, les Grecs, et beaucoup d'autres après eux, en ont inventé des quantités. Pour la quadrature du cercle, et aussi pour les deux autres problèmes majeurs de la géométrie grecque, la trisection de l'angle et la duplication du cube.

Quadrature du cercle
Hippias d'Élis (ca 460–400 av. J.-C.)

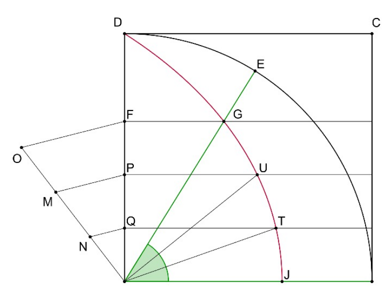


20 Trisection de l'angle

Le même système pouvait marcher pour plusieurs problèmes. La quadratrice d'Hippias peut couper un angle en trois, en utilisant à nouveau le théorème de Thalès.

Je n'ai pas entendu dire qu'elle ait dupliqué des cubes. Par contre, le même Hippocrate de Chios, celui de la quadrature des lunules, avait trouvé que la duplication du cube pouvait se ramener au calcul de non pas une, mais deux moyennes proportionnelles.

Trisection de l'angle
Hippias d'Élis (ca 460–400 av. J.-C.)



21 Duplication par moyennes proportionnelles

Duplication par moyennes proportionnelles

Hippocrate de Chios (ca 470–410 av. J.-C.)

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{x} = \frac{b}{y} \quad ; \qquad x^3 = a^2 b$$

Deux moyennes proportionnelles entre a et b ce sont deux nombres x et y tels que les trois rapports a/x, x/y et y/b soient égaux. Un petit calcul algébrique plus loin, vous voyez que x^3 est égal à a^2b, donc si $b = 2a$, x^3 est égal à deux a^3. Si a est le côté d'un cube, x est le côté d'un cube de volume double. Vous avez *dupliqué le cube initial*.

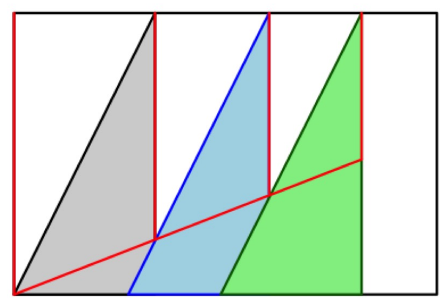
Oui, mais ce qui vous a convaincu, c'était un petit calcul algébrique, précisément ce que les Grecs n'ont jamais fait. Les arguments qui permettaient à Hippocrate de passer de la duplication aux moyennes proportionnelles, restaient exclusivement géométriques.

Pour la duplication du cube, ou les moyennes proportionnelles, il y a aussi eu des dispositifs mécaniques. Le « mésolabe » d'Ératosthène est le plus simple.

22 Mésolabe

Mésolabe

Ératosthène (ca 276–194 av. J.-C.)



C'est un cadre rectangulaire dans lequel trois équerres identiques sont placées. La grise est fixe, les deux autres coulissent. Il suffit d'aligner les points d'intersection pour que les deux segments rouges intermédiaires soient deux moyennes proportionnelles entre le segment rouge de gauche et celui de droite. Pourquoi ? C'est une application répétée du théorème de Thalès. Ératosthène semble en avoir été plutôt fier.

23 Lettre à Ptolémée

« Ptolémée, si tu essaies de transformer un cube en un autre de volume double, ne te complique pas la vie avec les calculs imposés par les cylindres d'Archytas de Tarente, les coniques de Ménechme ou l'intersection de ces mêmes coniques selon Eudoxe. Utilise cet appareil, le mésolabe, avec lequel tu découvriras une myriade de proportions, à commencer par la plus petite. »

C'est vrai que le mésolabe d'Ératosthène est plus simple que d'autres systèmes, et qu'il donne des moyennes proportionnelles pour une proportion quelconque, mais que viennent faire les coniques ?

De notre point de vue, la duplication du cube, c'est l'extraction d'une racine cubique, donc la résolution d'une équation de degré trois. La trisection de l'angle est la résolution d'une autre équation de degré trois. Les coniques sont des courbes de degré deux. Donc l'intersection de deux coniques peut donner des solutions à des équations de degré trois. Eh bien les équations de degré trois ont été résolues par des intersections de coniques bien avant de l'être par des formules. Je vous raconte ailleurs la classification de Omar Khayyam sur le troisième degré. Les premiers problèmes de degré trois résolus par les coniques ont été la duplication du cube et la trisection de l'angle.

Conscients de la nature différente des problèmes géométriques, les Grecs avaient développé une classification, que Pappus explique dans sa collection mathématique.

Lettre à Ptolémée

Ératosthène (ca 276–194 av. J.-C.)

Ptolémée, si tu essaies de transformer un cube en un autre de volume double, ne te complique pas la vie avec des calculs imposés par les cylindres d'Archytas de Tarente, les coniques de Ménechme ou l'intersection de ces mêmes coniques selon Eudoxe. Utilise cet appareil, le mésolabe, avec lequel tu découvriras une myriade de proportions, à commencer par la plus petite.

24 Collection Mathématique, Livre III Chapitre VII

« Les Anciens ont admis que les problèmes appartiennent à trois genres en géométrie : les uns sont appelés plans, d'autres solides et d'autres encore grammiques. On appelle à juste titre plans ceux qui peuvent être résolus au moyen de lignes droites et de circonférences de cercles ; car les lignes au moyen desquelles les problèmes de ce genre sont résolus trouvent leur origine dans le plan. Quant aux problèmes dont la solution invoque une ou plusieurs sections de cône, ils sont appelés solides ; car il faut faire usage de surfaces de figures solides pour leur construction, notamment de surfaces coniques. »

Ce n'est qu'au dix-neuvième siècle que l'on comprendra enfin pourquoi les solutions d'équations de degré trois ne peuvent pas être des problèmes plans, c'est-à-dire constructibles à la règle et au compas.

Collection Mathématique, Livre III Chapitre VII

Pappus (ca 290–350)

Les Anciens ont admis que les problèmes appartiennent à trois genres en géométrie : les uns sont appelés plans, d'autres solides et d'autres encore grammiques. On appelle à juste titre plans ceux qui peuvent être résolus au moyen de lignes droites et de circonférences de cercles ; car les lignes au moyen desquelles les problèmes de ce genre sont résolus trouvent leur origine dans le plan. Quant aux problèmes dont la solution invoque une ou plusieurs sections de cône, ils sont appelés solides ; car il faut faire usage de surfaces de figures solides pour leur construction, notamment de surfaces coniques.

25 Collection Mathématique, Livre III Chapitre VII

« Reste le troisième genre de problèmes appelés grammiques, parce que, outre les lignes que nous venons de dire, ils en admettent d'autres pour leur construction, dont l'origine est plus variée et plus complexe, telles que les spirales, les quadratrices, les conchoïdes et les cissoïdes, qui possèdent des propriétés nombreuses et étonnantes. »

Conchoïde, cissoïde, des termes bien oubliés de nos jours. Il s'agit à la base de mécanismes de transformation d'une courbe en une autre. Typiquement, on parcourt une courbe, comme une droite ou un cercle, avec un des points d'une tige ou d'une roue, et on observe le mouvement d'un autre point. Difficile de vous en dire plus sans passer des heures à visiter le zoo des courbes oubliées. Allez, juste un exemple : le limaçon de Pascal.

Collection Mathématique, Livre III Chapitre VII

Pappus, Collection Mathématique, Livre III Chapitre VII

Reste le troisième genre de problèmes appelés grammiques, parce que, outre les lignes que nous venons de dire, ils en admettent d'autres pour leur construction, dont l'origine est plus variée et plus complexe, telles que les spirales, les quadratrices, les conchoïdes et les cissoïdes, qui possèdent des propriétés nombreuses et étonnantes.

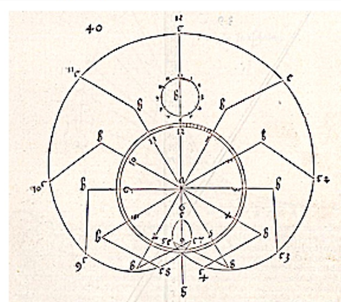
26 Limaçon de Pascal

Le limaçon de Pascal appartient à la famille des conchoïdes. On l'obtient en faisant rouler un cercle sur un autre cercle. Il peut aussi servir à la trisection de l'angle.

Remarquez que l'illustration est tirée du manuel de gravure d'Albrecht Dürer que je vous ai déjà montré. Il est paru en 1525, soit presque un siècle avant la naissance de Pascal. En plus, le Pascal du limaçon, n'est pas Blaise Pascal, mais son père, Étienne. Que voulez-vous que je vous dise, c'est comme d'habitude !

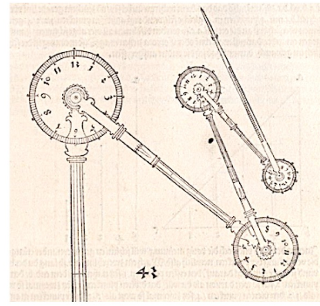
Limaçon de Pascal

Dürer, Underweysung der Messung (1525)



27 Compas à quatre tiges

Compas à quatre tiges
Dürer, Underweysung der Messung (1525)



Dans le livre de Dürer, le limaçon est un exemple d'utilisation d'une sorte de compas à quatre bras articulés, qui permet de tracer des mouvements circulaires enchaînés.

Longtemps, les courbes sont restées liées aux dispositifs mécaniques qui les produisaient. Dans ce domaine comme ailleurs, la Géométrie de Descartes introduit un véritable changement de paradigme.

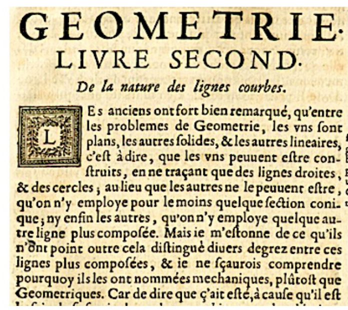
28 La Géométrie, Livre second

Au début du livre second, Descartes rappelle la classification de Pappus, pour la critiquer.

« Les anciens ont fort bien remarqué, qu'entre les problèmes de géométrie, les uns sont plans, les autres solides, et les autres linéaires. C'est-à-dire que les uns peuvent être construits en ne traçant que des lignes droites et des cercles, au lieu que les autres ne peuvent l'être que si on y emploie au moins quelque section conique, et les autres si on y emploie quelque autre ligne plus composée. Mais je m'étonne de ce qu'ils n'ont point au-delà de cela distingué divers degrés entre ces lignes plus composées, et je ne saurais comprendre pourquoi ils les ont nommées mécaniques, plutôt que géométriques. »

L'argument de Descartes est parfaitement recevable. Certes, la règle et le compas sont des mécanismes particulièrement simples, mais ce sont des intruments mécaniques tout de même. Et pour prouver sa thèse, Descartes propose un autre mécanisme, qui est plus une expérience de pensée, qu'une machine effectivement réalisable.

La Géométrie, Livre second
René Descartes (1596–1650)


GEOMETRIE.
LIVRE SECOND.
De la nature des lignes courbes.

Es anciens ont fort bien remarqué, qu'entre les problemes de Geometrie, les vns sont plans, les autres solides, & les autres lineaires, c'est à dire, que les vns peuuent estre construits, en ne traçant que des lignes droites, & des cercles; au lieu que les autres ne le peuuent estre, qu'on n'y employe pour le moins quelque section conique; ny enfin les autres, qu'on n'y employe quelque autre ligne plus composée. Mais ie m'estonne de ce qu'ils n'ont point outre cela distingué diuers degrez entre ces lignes plus composées, & ie ne sçaurois comprendre pourquoy ils les ont nommées mechaniques, plûtost que Geometriques. Car de dire que ç'ait esté, à cause qu'il est

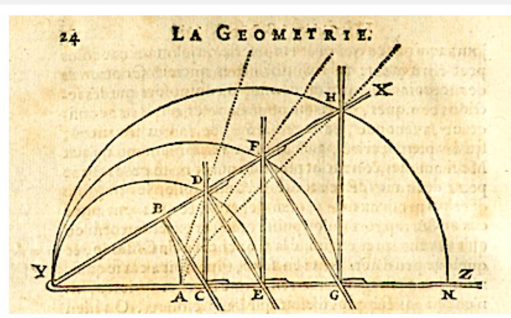
29 La Géométrie, Livre second

La voici. Il s'agit d'une sorte de compas, avec une articulation au point Y, une tige orthogonale fixée en B, et d'autres tiges qui lui sont reliées. Quand le compas est fermé, tous les points A, B, C etc. sont confondus. Quand le compas s'ouvre, le point B décrit un arc de cercle, tandis que les autres points D, F, H etc. décrivent d'autres courbes algébriques de degré supérieur à deux.

Descartes ne prétend pas faire fonctionner son compas comme un instrument mécanique. C'est un modèle théorique, destiné à établir la nécessité d'utiliser désormais pour les courbes des équations, plutôt que des mécanismes.

La vision de Descartes a prévalu, la classification des Grecs a été abandonnée. On a finalement réussi à expliquer pourquoi la quadrature du cercle, la trisection de l'angle, et la duplication du cube n'étaient pas des problèmes plans. Mais si on considère que le calcul intégral est né des quadratures, et que la notion de fonction est issue des courbes mécaniques, c'est un grand pan des mathématiques actuelles qui nous vient des trois problèmes de la géométrie grecque.

La Géométrie, Livre second
René Descartes (1596–1650)



30 références

Je vous recommande une visite au site mathcurve.com. Vous y apprendrez comme moi ce qu'est une atriphtaloïde, une catacaustique, une cochléoïde, une hypotrochoïde, une ophiuride, ou une péritrochoïde. Ça ne vous fait pas rêver, ça ?

références

- W. R. Knorr (1989) *Textual studies in ancient and medieval geometry*, Basel : Birkhäuser
- R. Rashed (1993) *Ibn al-Haytham, Les mathématiques infinitésimales du* IX^e *au* XI^e *siècle, volume 2*, London : Al-Furqān Islamic Heritage Foundation
- E. Robson (2008) The long career of a favorite figure : the *apsamikku* in Neo-Babylonian mathematics, *in M. Ross ed. From the banks of the Euphrates*, Winona Lake : Eisenbrauns, 211–226
- K. Saito (1995) Doubling the cube : a new interpretation of its significance for early Greek geometry, *Historia Mathematica*, 22, 119–137
- B. Vitrac (2007) Le cas Hippocrate : un premier scandale en géométrie ? `culturemath.ens.fr`