

0 La géométrie d'Escher

Vous avez déjà vu des gravures d'Escher, ses rubans de Möbius, ses escaliers sans fin, la main qui se dessine elle-même. Eh bien le héros du jour, c'est lui. Oh, non pas qu'il ait marqué l'histoire de la géométrie par ses théorèmes. Il n'a jamais prétendu faire des mathématiques. Mais à sa façon, il a tout de même influencé la discipline au vingtième siècle. Il a surtout officialisé le rapport aux mathématiques d'une partie de la géométrie longtemps considérée comme l'apanage des artistes ou des artisans, les pavages du plan.

histoires de géométrie

La géométrie d'Escher

pavages du plan



hist-math.fr

Bernard YCART

1 Mauritz Cornelis Escher (1898–1972)

Vous le voyez ici vers la fin de sa carrière. Il pose devant deux de ses réalisations emblématiques. Il regarde sa gravure intitulée Limite Circulaire IV. Elle représente, avec des anges et des diables entrelacés, un pavage du plan hyperbolique, nous y reviendrons. Posée sur cette gravure, une sphère en bois sculpté. Les motifs représentent les mêmes anges et les mêmes diables entrelacés. Deux pavages aux mêmes motifs, un en géométrie hyperbolique, l'autre en géométrie sphérique.

Mauritz Cornelis Escher (1898–1972)



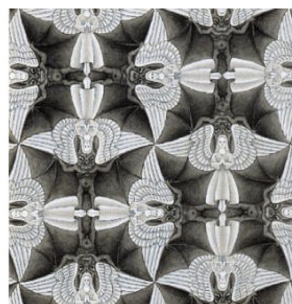
2 Regular division of the plane 45 (1940)

Entre les deux, la géométrie euclidienne. Voici les mêmes motifs comme pavage du plan euclidien. C'est par là qu'Escher avait commencé, alors qu'il était encore étudiant.

Écoutez-le raconter.

Regular division of the plane 45 (1940)

Mauritz Cornelis Escher (1898–1972)



3 Regular division of the plane 69

« Au fil des années, j'ai dessiné environ cent cinquante de ces pavages. »

Regular division of the plane 69

Mauritz Cornelis Escher (1898–1972)

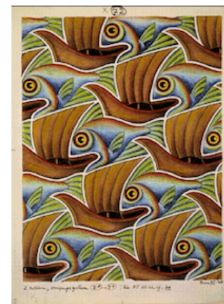


4 Regular division of the plane 72

« Au début, je les concevais de manière tout à fait intuitive, poussé par un plaisir irrésistible à répéter les mêmes formes, sans vides, sur une feuille de papier. »

Regular division of the plane 72

Mauritz Cornelis Escher (1898–1972)



5 Regular division of the plane 94

« Ces premiers dessins me prenaient beaucoup de temps, car je n'avais jamais entendu parler de cristallographie. »

Regular division of the plane 94

Mauritz Cornelis Escher (1898–1972)



6 Regular division of the plane 118

« Donc j'ignorais que mon jeu était basé sur des règles qui avaient fait l'objet de recherches scientifiques. »

Tout l'enjeu de notre histoire est là : quelles sont ces recherches scientifiques ?

Que les pavages soient aussi anciens qu'universels, je n'aurai pas de mal à vous en convaincre.

Regular division of the plane 118

Mauritz Cornelis Escher (1898–1972)



7 Mosaïque sumérienne

Ces piliers recouverts de mosaïque datent probablement d'avant l'invention de l'écriture, donc des mathématiques. Bien sûr, il fallait savoir compter et tracer des lignes pour répéter des motifs géométriques sur un pavage ou une mosaïque. Mais peut-on considérer pour autant que les artisans qui réalisaient cela étaient des mathématiciens ?

Mosaïque sumérienne
Uruk IV (ca 3400-3100 av. J.-C.)



8 Tombe de Nefsekherou

Ce magnifique plafond date du règne de Ramsès II.

Tombe de Nefsekherou
Nécropole El-Khoba, Thèbes (ca. 1250 av. J.-C.)



9 Dallage de Pella

Ce dallage date du temps de Platon.

Dallage de Pella
Macédoine (IV^e siècle av. J.-C.)



10 Thermes de Caracalla

Les thermes de Caracalla ont été bâtis au début du troisième siècle.

Bien sûr, les pavages n'ont pas été l'apanage des seuls Romains. Il en existait sous toutes les civilisations.

Thermes de Caracalla
Rome (216)



11 Jardin chinois

Dans ce jardin chinois, autant le dallage au sol que les portes de la maison sont décorés de motifs périodiques.

Jardin chinois



12 Taj Mahal

Les pavages du Taj Mahal sont à la mesure de la beauté de l'édifice.

Taj Mahal

Agra, Uttar Pradesh (1631–1648)

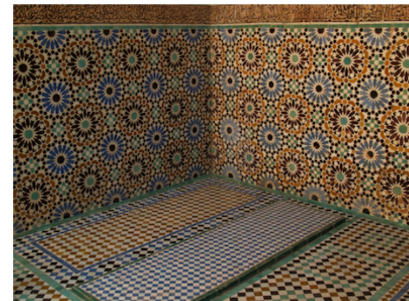


13 Tombeaux saadiens, Marrakech, Maroc

Reste que ces magnifiques mosaïques sont le plus souvent associées dans notre esprit aux artistes arabes.

Tombeaux saadiens, Marrakech, Maroc

Ahmed al-Mansur Saadi (1578-1603)



14 Alicatado, palais de l'Alhambra

Le palais de l'Alhambra à Grenade, symbolise plus que tout autre, la beauté et la diversité de la mosaïque décorative chez les Arabes.

Alicatado, palais de l'Alhambra

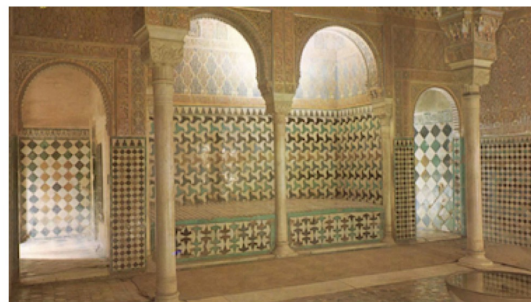
Sultans Nasrides (xiv^e siècle)



15 Baño de la mezquita

On y trouve, parfois dans une seule pièce, des pavages construits selon plusieurs règles différentes, qui s'harmonisent parfaitement, comme ici, dans le bain de la mosquée.

Baño de la mezquita
Alhambra, Grenade (xiv^e siècle)



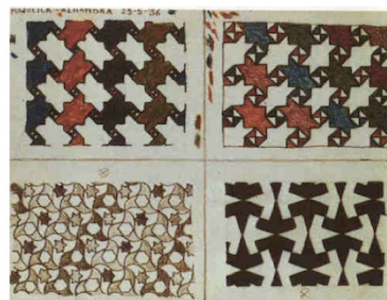
16 Notes sur les mosaïques de l'Alhambra

Escher a effectué deux visites à l'Alhambra. Sa seconde visite, au printemps 1936, a été déterminante pour la suite de sa carrière. Écoutez ce qu'il en dit.

« C'est la source d'inspiration la plus riche que j'aie rencontrée, et elle ne s'est pas épuisée. Les Maures étaient des maîtres. Ils décoraient les murs et les plafonds, particulièrement à l'Alhambra en Espagne, en plaçant des pièces de céramique multicolores, sans laisser d'espace entre elles. »

Oui, en effet, les Maures étaient des maîtres. Mais que savaient-ils en mathématiques ? Il semble qu'il y ait eu parmi eux, des rencontres fréquentes entre des architectes ou des artisans, et des mathématiciens. Omar Khayyam, et Jamshid al-Kashi par exemple, témoignent de telles rencontres. Avant eux, Abu l-Wafa avait écrit un traité, intitulé « Livre des constructions géométriques nécessaires à l'artisan ».

Notes sur les mosaïques de l'Alhambra
Mauritz Cornelis Escher (1898–1972)

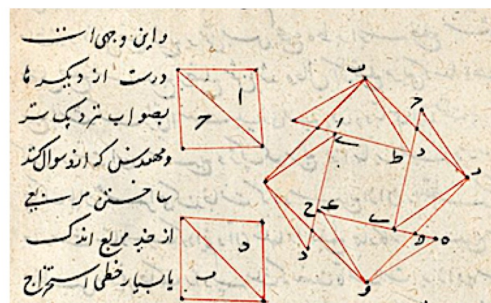


17 Livre des constructions géométriques...

Il y décrit des constructions géométriques. Une bonne partie concerne des découpages de figures, que je vous raconte ailleurs. La figure que vous voyez illustre la méthode pour former un carré à partir de trois carrés identiques. Abu l-Wafa coupe deux des carrés selon leur diagonale, pour les placer autour du troisième. Il profite de l'occasion pour critiquer le savoir-faire de ses interlocuteurs.

« Les artisans ont proposé un certain nombre de méthodes, dont certaines peuvent être justifiées, et d'autres sont incorrectes. Mais les méthodes qui ne peuvent pas être justifiées ressemblent à la vérité en apparence, de sorte que quelqu'un qui les regarderait pourrait penser qu'elles sont correctes. Nous allons présenter ces méthodes afin que celles qui sont correctes puissent être distinguées des autres, et que quelqu'un qui s'intéresse au problème ne commette pas une erreur en acceptant une méthode fausse, si Dieu le veut. »

Livre des constructions géométriques...
Abū l-Wafā' al-Būzjānī (940-998)

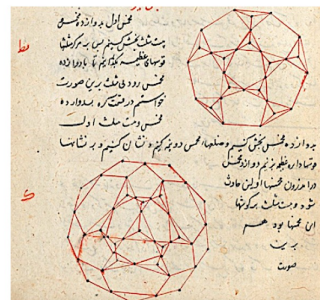


18 Livre des constructions géométriques...

Dans le même livre des constructions géométriques, Abu l-Wafa s'intéresse aussi à la sphère. Il reprend la construction des polyèdres réguliers, sous un angle original. Il explique en fait comment découper la sphère en polygones réguliers, c'est-à-dire comment réaliser un pavage de la sphère.

Livre des constructions géométriques...

Abū l-Wafā' al-Būzjānī (940-998)



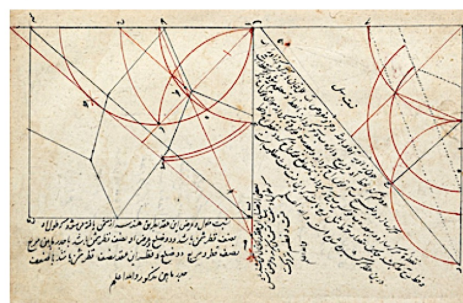
19 Imbrications de figures similaires ou correspondantes

Peu de traités comme celui d'Abu l-Wafa ont été conservés. Celui-ci figure dans le même manuscrit Persan du seizième siècle. Il décrit encore des constructions géométriques pour découper un carré et réaliser des pavages.

Il est possible que d'autres traités, plus mathématiques, aient été écrits; mais ils ont été perdus, ou bien on ne les a pas encore retrouvés.

Imbrications de figures similaires ou correspondantes

Anonyme (ca 1300)



20 Unterweysung der Messung (1525)

L'équivalent du traité précédent pour la Renaissance européenne pourrait être les « Instructions pour la mesure à la règle et au compas », d'Albrecht Dürer. Le livre est destiné à ses collègues peintres et graveurs. Bien sûr, la construction de pavages décoratifs y est traitée en détail, mais pas de manière mathématique.

Unterweysung der Messung (1525)

Albrecht Dürer (1471–1528)



21 Harmonices Mundi (1619)

La première mathématisation des pavages en Europe, est due à Kepler. Je vous ai déjà parlé de ses « Harmonies du Monde ». Le titre fait référence à la théorie de Platon sur l'harmonie du monde qui est engendrée par les quatre éléments associés aux polyèdres réguliers.

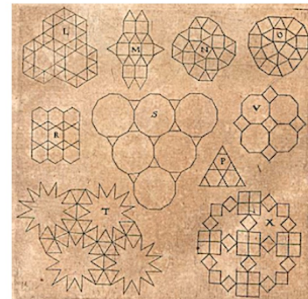
Le livre deux commence par des définitions rigoureuses des pavages par des figures congruentes. Kepler vise à la plus grande généralité en donnant des définitions qui englobent les pavages du plan, de l'espace à trois dimensions, et de la sphère, c'est-à-dire les polyèdres réguliers.

Concernant le plan, Kepler base sa classification sur une discussion combinatoire du nombre de polygones réguliers qui peuvent être placés autour de chaque sommet. Si on considère une seule sorte de polygone, on peut placer six triangles équilatéraux, quatre carrés ou trois hexagones. Ce n'est pas vraiment une nouveauté : déjà Pappus en parlait comme d'une évidence. Kepler trouve ensuite six manières de paver le plan avec des polygones de deux sortes, puis quatre manières avec des polygones de trois sortes.

Sur cette figure, vous voyez en haut à gauche un hexagone et quatre triangles autour de chaque sommet, puis deux carrés et trois triangles, en-dessous deux hexagones et deux triangles, puis deux dodécagones et un triangle, etc. Comme vous le voyez en bas à gauche, Kepler ne se limite pas aux polygones convexes.

Harmonices Mundi (1619)

Johannes Kepler (1571–1630)



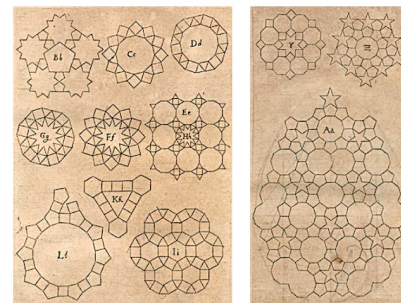
22 Harmonices Mundi (1619)

Il en vient ensuite aux pavages à trois sortes de polygones, avec des figures plus décoratives. Nous n'allons pas détailler sa discussion qui est plutôt longue, et qui de toutes façons n'était pas complète.

Le moins que l'on puisse dire, c'est que le travail de Kepler sur les pavages n'a pas passionné les foules.

Harmonices Mundi (1619)

Johannes Kepler (1571–1630)

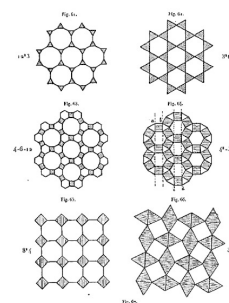


23 Mémoire sur les figures isocèles (1881)

Quand Albert Badoureaux reprend exactement les mêmes raisonnements plus de deux siècles et demi après, il cite quelques travaux sporadiques sur la cristallographie au dix-neuvième siècle, mais il ne semble pas du tout conscient de l'antériorité de Kepler.

Mémoire sur les figures isocèles (1881)

Albert Badoureaux (1851–1923)

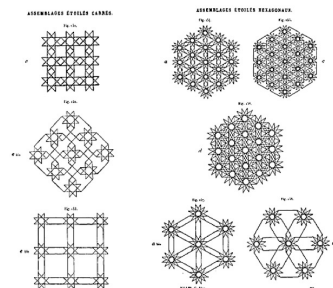


24 Mémoire sur les figures isocèles (1881)

Badoureau ne mentionne pas non plus la notion de groupe. Pourtant, au moment où il écrit, il y a déjà neuf ans que Klein a annoncé, dans son programme d'Erlangen, que la géométrie devait désormais devenir l'étude des invariants par un certain groupe de transformations.

Mémoire sur les figures isocèles (1881)

Albert Badoureau (1851–1923)

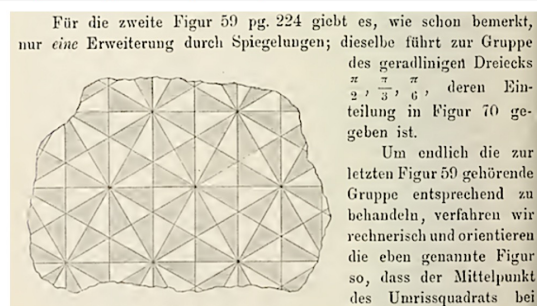


25 Theorie der automorphen Functionen (1897)

Le premier tome du livre qu'il écrit avec Robert Fricke sur la théorie des fonctions automorphes, est précisément consacré à la notion de groupe, et aux actions de sous-groupes sur les domaines plans. Certains sous-groupes de fonctions automorphes laissent invariants des pavages du plan euclidien, comme ici un pavage avec des triangles d'angles $\pi/2$, $\pi/3$ et $\pi/6$.

Theorie der automorphen Functionen (1897)

Robert Fricke (1861–1930), Felix Klein (1849–1925)



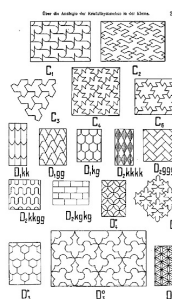
26 Kristallsymmetrie in der Ebene (1924)

Concernant les pavages réguliers, il ne manquait plus que d'identifier tous les groupes de pavages du plan euclidien. C'est fait par Georges Polya dans cet article de 1924. Il en trouve en tout dix-sept, qu'il illustre dans la planche que vous voyez. En fait le même résultat avait été démontré en 1891 par un Russe, Evgraf Fedorov, mais son article était passé inaperçu.

Il se trouve que l'article de Polya a été montré à Escher par son frère, et la figure que vous voyez a influencé les propres recherches d'Escher.

Kristallsymmetrie in der Ebene (1924)

George Polya (1887–1985)



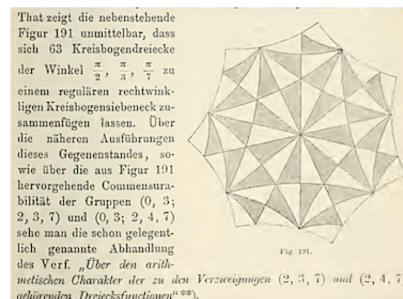
27 Theorie der automorphen Functionen (1897)

À part la théorie des groupes, une autre révolution était apparue en géométrie au cours du dix-neuvième siècle, celle des géométries non-euclidiennes. On connaissait même des modèles de cette géométrie qui conservent les angles, comme ici le disque dit de Poincaré, un des modèles inventés pour prouver la consistance de la géométrie hyperbolique.

En géométrie hyperbolique, la somme des angles d'un triangle est inférieure à π . Il est donc possible de paver le plan hyperbolique par des triangles d'angles $\pi/2$, $\pi/3$, et $\pi/7$, comme ici.

Theorie der automorphen Functionen (1897)

Robert Fricke (1861–1930), Felix Klein (1849–1925)



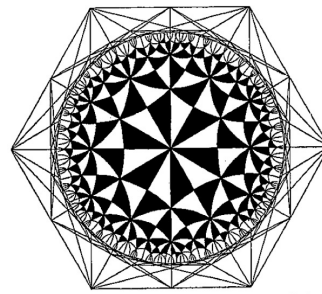
28 Crystal symmetry and its generalizations (1957)

De sorte que quand Coxeter, soixante ans plus tard, publie cette image d'un pavage hyperbolique avec des triangles d'angles $\pi/2$, $\pi/4$, $\pi/6$, ce n'était pas vraiment une nouveauté mathématique. Par contre, pour Escher, c'est une révélation. Il lui écrit ceci.

« Bien que votre texte sur la symétrie cristalline soit beaucoup trop savant pour l'autodidacte des motifs que je suis, quelques unes de vos illustrations, et en particulier celle-ci, m'ont causé un vrai choc. Depuis longtemps, je m'intéresse aux motifs qui deviennent de plus en plus petits jusqu'à atteindre la limite de l'infiniment petit. »

Crystal symmetry and its generalizations (1957)

Harold Scott MacDonald Coxeter (1907–2003)



29 Circle Limit I (1958)

« J'ai essayé de trouver comment votre figure était construite géométriquement, mais je n'ai réussi qu'à trouver les centres et les rayons des grands cercles intérieurs. [...] Néanmoins, j'ai utilisé votre modèle pour une grande gravure sur bois, dont j'ai réalisé un secteur de cent vingt degrés que j'ai imprimé trois fois. »

Cette gravure, c'est la première de la série des limites circulaires, que vous voyez.

Circle Limit I (1958)

Mauritz Cornelis Escher (1898–1972)



30 Circle Limit III (1959)

Armé essentiellement de son intuition et de sa virtuosité technique, Escher va progresser rapidement. Pour cette troisième limite circulaire, ce sera au tour de Coxeter de chercher à comprendre comment Escher l'avait construite.

Circle Limit III (1959)

Mauritz Cornelis Escher (1898–1972)



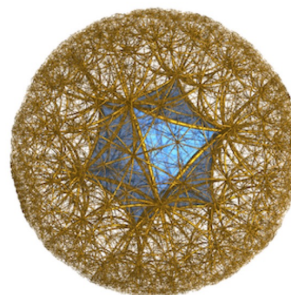
31 Order-3 icosahedral honeycomb (Sphere Model)

Escher a dit : « Bien que je sois totalement innocent d'un quelconque apprentissage ou d'une quelconque connaissance dans les sciences exactes, il semble que j'aie souvent plus en commun avec les mathématiciens qu'avec mes collègues artistes. »

Domage qu'il n'ait pas connu l'informatique graphique. On se demande ce qu'il aurait pensé du passage à la dimension supérieure en géométrie hyperbolique.

Order-3 icosahedral honeycomb (Sphere Model)

Claudio Rocchini (2007)



32 références

Vous savez, il avait beau être totalement innocent d'un quelconque apprentissage, quelque chose me dit que de nombreux mathématiciens auraient aimé avoir sa notoriété. Tenez, prenez Albert Badoureau par exemple. Comment ça : vous ne savez déjà plus qui c'est ? Ah non, je ne vais pas recommencer l'histoire au début ! Si ? Bon. Il était une fois un artiste qui voulait remplir ses feuilles de papier avec des motifs identiques...

références

- J. Bonner (2017) *Islamic geometric patterns*, New York : Springer
- H. S. M. Coxeter (1979) The non-Euclidean symmetry of Escher's picture 'Circle Limit III', *Leonardo*, 12, 19–25
- A.-M. Décaillot (2002) Géométrie des tissus, mosaïques, échiquiers, *Revue d'histoire des mathématiques*, 8, 145–206
- M. Front (2012) Pavages archimédiens du plan : une exploration favorable aux élaborations mathématiques, *Repères IREM*, 89, 5–37
- A. Özdural (2000) Mathematics and arts : connections between theory and practice in the medieval Islamic world, *Historia Mathematica*, 27, 171–201
- D. Schattschneider (2010) The mathematical side of M. C. Escher, *Notices of the AMS*, 57(6), 706–718