

0 Le palimpseste d'Archimède

Non, non, non, pas question ! Vous ne m'entendrez pas raconter une n -ième version de la mort d'Archimède. Tenez plutôt : avec toutes les fois où je vous ai déjà parlé de lui, je ne vous ai pas encore dit ce que signifiait son nom, ou plutôt son surnom. « Archi » c'est le maître et « medomai » signifie réfléchir, élaborer, inventer. Donc Archimède, c'est le « maître inventeur ». Et s'il y a quelqu'un dans l'histoire qui a mérité ce surnom-là, c'est bien lui. Écoutez plutôt Plutarque, qui écrit trois siècles après la mort d'Archimède.

Les illustrations qui suivent dépendent plus de l'imagination du peintre que de la vérité historique.

1 Il ramène à lui la galère

« Archimède ayant fait tirer à terre, avec un grand travail, et à force de bras, une des galères du roi, ordonna qu'on y mît la charge ordinaire, avec autant d'hommes qu'elle en pourrait contenir ; ensuite, s'étant assis à quelque distance, sans employer d'effort, en tirant doucement de la main le bout d'une machine à plusieurs poulies, il ramène à lui la galère, qui glissait aussi légèrement et avec aussi peu d'obstacle que si elle avait fendu les flots. »

Alors pensez donc :

2 Toutes sortes de machines

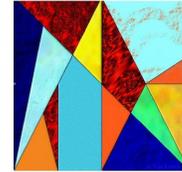
« Le roi, émerveillé d'un tel pouvoir de l'art, engagea Archimède à lui faire toutes sortes de machines et de batteries de siège, soit pour l'attaque, soit pour la défense des places. »

Et voilà Archimède promu ingénieur militaire en chef!

histoires de géométrie

Le palimpseste d'Archimède

division de figures



hist-math.fr

Bernard YCART

Il ramène à lui la galère

G. Parigi, Stanzino delle matematiche (1600)



Toutes sortes de machines

T.R. Spence, Archimedes directing the defenses of Syracuse (1895)



3 Avec des mains de fer

« Du côté de la mer, il avait placé sur les murailles d'autres machines qui, abaissant tout à coup sur les galères de grosses antennes en forme de crocs, et cramponnant les vaisseaux, les enlevaient par la force du contrepoids, les laissaient retomber ensuite, et les abîmaient dans les flots ; il en accrochait d'autres par la proue avec des mains de fer ou des becs de grue, et, après les avoir dressées sur leur poupe, il les enfonçait dans la mer. »

Avec des mains de fer

G. Parigi, Stanzino delle matematiche (1600)



4 Archimède brûlait des navires de fort loin

Et encore, Plutarque ne dit rien des miroirs ardents qui brûlaient les navires à distance. Oui, bon : ces miroirs ardents, plus grand-monde n'y croit. Écoutez plutôt Descartes :

« Vous pouvez voir que ceux qui ne sont qu'à demi savants en optique se laissent persuader de beaucoup de choses qui sont impossibles, et que, ces miroirs dont on a dit qu'Archimède brûlait des navires de fort loin devaient être extrêmement grands, ou plutôt qu'ils sont fabuleux. »

Fabuleux ou pas, vous imaginez bien que tous les écrits d'Archimède ont été étudiés avec la dernière attention. Le problème, c'est qu'il y a très peu de sources provenant directement d'Archimède. L'original grec avait figuré dans deux manuscrits, évidemment des copies de copies, qui ne contenaient pas les mêmes textes. Certains écrits d'Archimède dont on avait des traductions partielles en arabe, n'y figuraient pas. D'autres que l'on ne connaissait que par des citations, semblaient définitivement perdus.

Ce, jusqu'à une découverte sensationnelle.

5 Le palimpseste d'Archimède

Un livre de prières du treizième siècle, copié sur parchemin. Mais pas n'importe quel parchemin : du parchemin recyclé. Comment s'y prend-on pour recycler du parchemin ?

On choisit un vieux livre, on en découpe les feuilles, on les gratte le plus qu'il est possible sans les trouser. Comme il reste encore des traces, on re-blanchit les pages à la chaux, puis on écrit par-dessus, perpendiculairement aux anciennes lignes. Cela s'appelle un « palimpseste ». Étymologiquement : « qu'on a gratté de nouveau ».

Archimède brûlait des navires de fort loin

G. Parigi, Stanzino delle matematiche (1600)



Le palimpseste d'Archimède



6 Une page du palimpseste

Cela donne ceci : le nouveau texte est lisible, mais on devine tout de même des lignes en-dessous. Quelques unes de ces lignes, scrupuleusement retranscrites, ont suffi à un spécialiste en 1906 pour reconnaître un trésor : le livre de prières du treizième siècle avait été recopié par-dessus un manuscrit des œuvres d'Archimède.

Une page du palimpseste

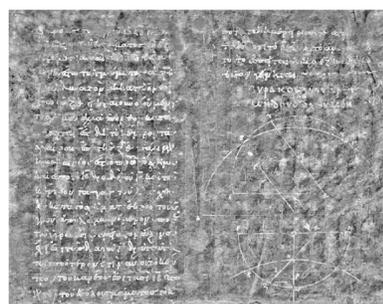


7 Reconstitution par analyse d'image

Ce n'est que tout récemment que les techniques d'analyse d'image ont permis de reconstituer la plus grande partie du texte effacé, et de retrouver intégralement certains des traités d'Archimède que l'on croyait partiellement ou totalement perdus.

Le plus important de ces traités est la « Méthode » : un livre théorique où Archimède décrit et illustre ses techniques de mécanique pour calculer, entre autres, des centres de gravité. Mais il y avait aussi dans le palimpseste, quelques pages d'un petit traité que l'on ne connaissait que par une traduction arabe partielle, le Stomachion.

Reconstitution par analyse d'image



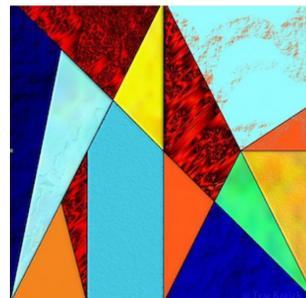
8 Le Stomachion d'Archimède

Enfin, Stomachion ou « Ostomachion », selon les étymologies proposées. Les anglo-saxons ont tendance à considérer que Stomachion viendrait de estomac parce que le jeu provoquerait des brûlures d'estomac. Je n'y crois pas une seconde. Ostomachion, c'est-à-dire « combat des petits os » me paraît plus réaliste. Mais peu importe : de quoi s'agit-il ?

D'un puzzle composé de 14 pièces, onze triangles et trois quadrilatères. Les 14 pièces s'assemblent en un carré comme dans la version originale, vue ici par une artiste contemporaine. Qu'en fait Archimède ? Voici deux extraits adaptés de son texte.

Le Stomachion d'Archimède

Teja Krasek



9 Le Stomachion

« J'ai jugé nécessaire : premièrement de m'intéresser dans ma recherche au rapport des figures à la figure totale qu'elles divisent, et aussi aux angles de ces figures.[...]

De plus le nombre des figures que l'on peut reconstituer n'est pas petit, car chaque pièce peut être tournée et positionnée différemment ; de même, deux pièces prises ensemble vues comme une seule ; de sorte que dans ces transpositions de nombreuses figures sont reconstituées. »

Le Stomachion

Archimède (ca 287-212 av. J.-C.)

J'ai jugé nécessaire : premièrement de m'intéresser dans ma recherche au rapport des figures à la figure totale qu'elles divisent, et aussi aux angles de ces figures.[...]

De plus le nombre des figures que l'on peut reconstituer n'est pas petit, car chaque pièce peut être tournée et positionnée différemment ; de même, deux pièces prises ensemble vues comme une seule ; de sorte que dans ces transpositions de nombreuses figures sont reconstituées.

10 Le Stomachion d'Archimède

Pour la première partie, le programme est clair. Il s'agit, étant donnée la description du découpage, d'en déduire la proportion de chaque pièce au carré total, ainsi que ses angles.

Sur cette figure, extraite des curiosités géométriques de Fourrey, les surfaces de chaque pièce sont marquées en quarante-huitièmes de la figure totale. Les angles peuvent aussi se calculer.

Mais tout cela était trop simple pour constituer un but digne d'Archimède. Il se pourrait, que la seconde affirmation fasse référence au nombre de manières de reconstituer le carré initial. Si c'est bien ce que dit Archimède, il a raison ; il n'est effectivement pas petit : 17 152 ! Et dans ce cas, nous aurions là le plus ancien problème de combinatoire au monde.

En tout cas, Archimède n'a jamais prétendu être l'inventeur du jeu, qui existait selon toute vraisemblance, longtemps avant lui.

11 Ausone

Ausone est un auteur latin du quatrième siècle. Il était originaire de la région de Bordeaux, et bien sûr, grand amateur de vins.

Il a écrit un poème intitulé le Centon nuptial. Un centon, ce n'est pas une figurine de crèche, c'est un poème patchwork, où on recycle des morceaux de vers classiques pour en détourner le sens et fabriquer un nouveau poème. Chez Ausone, la victime du détournement est Virgile, que les lettrés de son époque connaissaient tous par cœur. Pour expliquer son but, Ausone utilise une analogie.

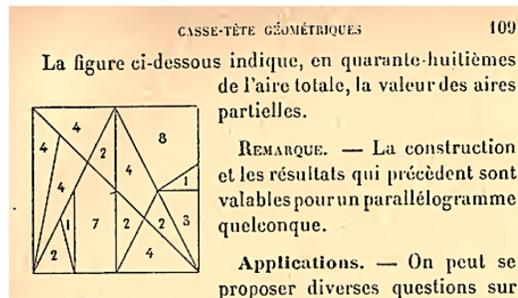
12 Centon Nuptial

« Je vais te définir le *Centon*. C'est un échafaudage poétique construit de morceaux détachés et de divers sens ; [...] C'est comme qui dirait le jeu que les Grecs appellent *Ostomachion*. Ce sont des osselets qui forment en tout quatorze figures géométriques : il y en a d'équilatérales, de triangulaires, à lignes droites, à angles droits ou obtus [...]. Des divers assemblages de ces osselets se dessinent mille sortes d'images : un éléphant monstrueux, un lourd sanglier, une oie qui vole, un mirmillon sous les armes, un chasseur à l'affut, un chien qui aboie, une tourterelle, un canthare, et un nombre infini d'autres figures qui varient selon l'habileté du joueur. »

Vous avez reconnu le but du jeu ?

Le Stomachion d'Archimède

E. Fourrey, *Curiosités géométriques* (1910)



Ausone

Decimus Magnus Ausonius (ca 309-394)



Centon Nuptial

Decimus Magnus Ausonius (ca 309-394)

Je vais te définir le *Centon*. C'est un échafaudage poétique construit de morceaux détachés et de divers sens ; [...] C'est comme qui dirait le jeu que les Grecs appellent *Ostomachion*. Ce sont des osselets qui forment en tout quatorze figures géométriques : il y en a d'équilatérales, de triangulaires, à lignes droites, à angles droits ou obtus[...]. Des divers assemblages de ces osselets se dessinent mille sortes d'images : un éléphant monstrueux, un lourd sanglier, une oie qui vole, un mirmillon sous les armes, un chasseur à l'affut, un chien qui aboie, une tourterelle, un canthare, et un nombre infini d'autres figures qui varient selon l'habileté du joueur.

13 Tangram

C'est une sorte de tangram. On ne peut pas parler d'ancêtre, car il ne semble pas que les inventeurs du tangram aient connu le stomachion. En tout cas le tangram est beaucoup plus simple. Il n'y a que 7 pièces : cinq triangles rectangles isocèles, un carré et un parallélogramme d'angles 45 et 135 degrés.

On ne connaît pas l'origine exacte, mais il semble que le tangram ne remonte pas au-delà du dix-huitième siècle.

Tangram

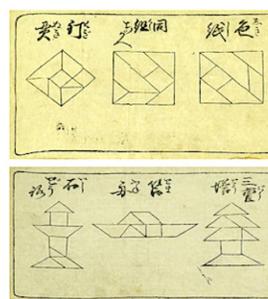


14 Chie-no-ita (1743)

La plus ancienne trace connue vient du Japon de l'époque Edo. Elle date de 1743, et les sept pièces ne sont pas tout à fait les mêmes que celles du tangram actuel. Le nom japonais signifie « plaquettes de la sagesse ».

Chie-no-ita (1743)

Gan Riōken

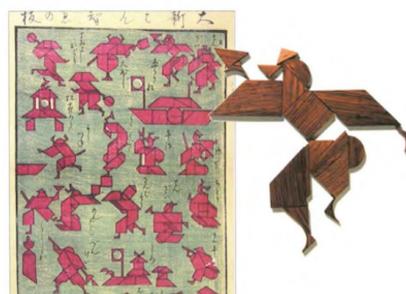


15 Chie-no-ita (1795)

Des versions plus compliquées sont apparues au Japon, vers la fin du dix-huitième siècle.

Chie-no-ita (1795)

Daishinpan



16 Chie-no-ita (ca 1800)

Pourtant si l'on en croit cette estampe, les Geishas ont continué à pratiquer la version traditionnelle.

Chie-no-ita (ca 1800)

Kitagawa Utamaro (1753-1806)



17 Ch'i ch'iao hsin p'u (1823)

Le tangram tel que nous le connaissons passe en Chine au début du dix-neuvième. Et dès 1817, la folie du casse-tête chinois balayait l'Europe.

Ch'i ch'iao hsin p'u (1823)



18 La Casse-tête omanie (1818)

Vous voyez ici une trace de cet engouement éphémère et excessif. Dans les pièces du tangram sont dessinés : un magasin de jeux que l'on dévalise, un mari qui néglige sa femme, une femme qui néglige son bébé, une auberge où tout part à vau-l'eau. Et tout cela parce que chacun passe son temps à jouer au tangram.

La folie a duré environ un an entre 1817 et 1818. Voici une trace de son début dans la presse.

La Casse-tête omanie (1818)

ou la fureur du jeu



19 Un nouveau jeu

« Un nouveau jeu est depuis quelque temps en vogue dans plusieurs cafés, et fait désertier les dames, les dominos, et les échecs. Il se nomme « énigmes chinoises » (ce nom indique son origine), et consiste à former des combinaisons données au moyen de sept figures géométriques. Ce jeu, assez difficile pour être piquant, ne l'est pas assez pour fatiguer, et amuse l'esprit en lui offrant de petits problèmes à résoudre. »

Non seulement il amuse l'esprit, mais il peut aussi l'instruire. C'est ce qu'ont tout de suite pensé certains professeurs de mathématiques.

Un nouveau jeu

Journal de France (29 juillet 1817)

—Un nouveau jeu est depuis quelque temps en vogue dans plusieurs cafés, et fait désertier les dames, les dominos, et les échecs. Il se nomme *énigmes chinoises* (ce nom indique son origine), et consiste à former des combinaisons données, au moyen de sept figures géométriques, savoir : cinq triangles, un carré et un rhombe, de telle façon que les sept figures entrent dans chaque combinaison. Ce jeu, assez difficile pour être piquant, ne l'est pas assez pour fatiguer, et amuse l'esprit en lui offrant de petits problèmes à résoudre.

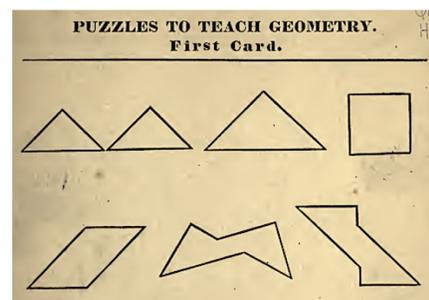
Il se vend chez Grossin, rue Saint-Honoré, n. 314, et au Petit-Dunkerque, rue de Richelieu.

20 Puzzles to teach geometry (1848)

Quitte à simplifier notablement l'ensemble des pièces.

Puzzles to teach geometry (1848)

Thomas Hill (1818-1891)

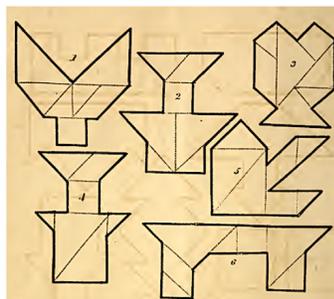


21 The fashionable Chinese Puzzle (1880)

Si la folie s'est calmée assez vite, le jeu s'est installé et n'a jamais cessé d'être pratiqué un peu partout dans le monde. Ces figures sont extraites d'un des premiers recueils de problèmes en anglais, dont on dit que Lewis Carroll, grand amateur de casse-têtes, l'avait dans sa bibliothèque.

The fashionable Chinese Puzzle (1880)

John Ropes (1836–1899)



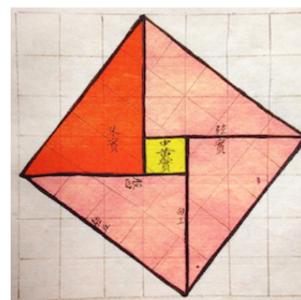
22 Zhoubi Suanjing (1^{er} siècle)

Ce qui est étonnant dans le cas du tangram, c'est qu'il soit apparu si tard. Parce qu'après tout, la fameuse démonstration chinoise du théorème de Pythagore (qui est beaucoup plus ancienne), est une sorte de puzzle, pas très loin du tangram.

Mais comme je vous parle ailleurs des démonstrations de Pythagore, je vais vous en montrer une autre, chinoise également, que je trouve tout aussi belle. Voici le problème quatorze du dernier chapitre, dans les Neuf chapitres sur l'art du calcul.

Zhoubi Suanjing (1^{er} siècle)

Théorème de Pythagore



23 Chapitre 9 : base et hauteur, problème 14

« Supposons que la base vaille $5 bu$ et la hauteur $12 bu$. On demande combien vaut le côté du carré inscrit à l'intérieur de la base.

Réponse : le côté du carré vaut $3 bu \frac{9}{17}$ de bu .

Procédure : On somme la base et la hauteur, ce qui fait le diviseur. Base et hauteur sont multipliées l'une par l'autre, ce qui fait le dividende. Et en effectuant la division du dividende par le diviseur, on obtient le côté du carré en bu . »

Le triangle dont il est question est rectangle et les deux côtés de l'angle droit sont de longueur 12 et 5. Le résultat et l'algorithme de calcul pour le côté du carré inscrit sont parachutés. Jusque-là on ne voit pas bien où est la géométrie, ni où est la démonstration. Mais écoutez plutôt le commentaire de Liu Hui.

J'ai reconstitué la figure dont il parle, avec ses propres couleurs.

Chapitre 9 : base et hauteur, problème 14

Neuf chapitres sur l'art du calcul

Supposons que la base vaille $5 bu$ et la hauteur $12 bu$. On demande combien vaut le côté du carré inscrit à l'intérieur de la base.

Réponse : le côté du carré vaut $3 bu \frac{9}{17}$ de bu .

Procédure : On somme la base et la hauteur, ce qui fait le diviseur. Base et hauteur sont multipliées l'une par l'autre, ce qui fait le dividende. Et en effectuant la division du dividende par le diviseur, on obtient le côté du carré en bu .

24 des surfaces, chacune en deux exemplaires

« Quand base et hauteur sont multipliées l'une par l'autre, cela fait des surfaces vermillon, bleu-vert et jaunes, chacune en 2 exemplaires. »

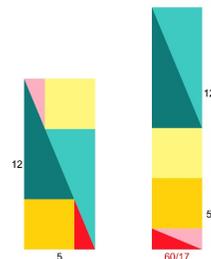
C'est le rectangle de gauche, qui contient le triangle initial et son double, donc deux carrés jaunes dont on cherche le côté, deux triangles rouges et deux bleus. Ensuite Liu Hui dit :

« Si on fait en sorte que les longueurs des surfaces jaunes forment la longueur aux extrémités, que les surfaces qui sont vermillon et bleu-vert, chacune selon les catégories qui leur correspondent, se conforment aux deux transverses qui leur correspondent, en tout, cela engendre la surface d'un rectangle. Le côté du carré inscrit, jaune, en fait la largeur ; la somme de la base et de la hauteur en fait la longueur. C'est pourquoi sommer base et hauteur en fait le diviseur. »

Oui, bon, d'accord cela mérite explication. Liu Hui parle du rectangle de droite, dans lequel on a rangé les six morceaux de celui de gauche, de sorte que la largeur soit le côté du carré jaune. La hauteur est 12 plus 5 et la surface est toujours 12 fois 5. Et voilà : élégant non ?

des surfaces, chacune en deux exemplaires

Liu Hui, Commentaires aux Neuf Chapitres sur l'art du calcul (263)



25 Partage de trapèze

Le schéma de pensée consistant à découper une figure pour en former une autre de même surface est non seulement extrêmement ancien, mais on peut considérer qu'il est fondateur d'une grande partie des mathématiques, à la fois comme outil de démonstration, et comme source de problèmes. Je vous raconte ailleurs comment les Mésopotamiens résolvait ce que nous considérons comme des équations algébriques, à l'aide de découpages. Les problèmes de division de terrain en parties égales sont au moins aussi anciens. Vous voyez ici un problème de division d'un champ trapézoïdal, datant environ du vingt-cinquième siècle avant notre ère.

Partage de trapèze

Tablette IM 58945, Nippur (ca. 2400 av. J.-C.)



26 Partages de triangles

Cette tablette-ci est beaucoup plus récente, puisqu'elle ne date que du temps d'Hammurabi. D'ailleurs vous voyez bien que la photographie est en couleurs. Bref.

La tablette porte 10 diagrammes de triangles partagés en trois morceaux par des droites parallèles, selon des proportions fixées.

Partages de triangles

Tablette MAH 16055, Nippur (ca. 1800 av. J.-C.)



27 Euclide, Livre I, Proposition 37

Les *Éléments* d'Euclide contiennent des arguments beaucoup plus élaborés que des découpages de figures. On a parfois l'impression qu'Euclide va chercher des démonstrations compliquées, quand précisément un découpage serait plus clair et plus rapide. Souvenez-vous par exemple de sa démonstration du théorème de Pythagore.

On trouve tout de même chez Euclide des traces de découpages, par exemple dans les propositions 34 à 38 du livre un. Elles énoncent l'égalité des surfaces des parallélogrammes ou des triangles de bases et de hauteurs égales.

C'est particulièrement flagrant sur la version colorée de Byrne.

Il faut dire qu'en plus des *Éléments*, Euclide avait aussi écrit un livre intitulé « Sur la division des figures planes ». Il ne nous est pas parvenu, mais on peut le reconstituer grâce à une traduction partielle en arabe datant du dixième siècle. Il semble que l'ouvrage d'Euclide ait été un recueil de problèmes consistant à diviser une figure polygonale donnée, en deux, ou plus de deux parties, dans des rapports de surface donnés.

Vient ensuite Héron d'Alexandrie. Il consacre une partie de son livre sur la mesure, à ce qu'il appelle la division des domaines. L'introduction exprime bien l'importance qu'il accorde à la question, en même temps que les préjugés de son époque.

28 Metrica, Livre III

« Nous pensons que les divisions des domaines ne s'écartent pas beaucoup des mesures effectuées dans les domaines. Car attribuer un domaine égal aux égaux et un domaine plus important à ceux qui en sont dignes, selon la répartition proportionnelle, est considéré comme tout à fait utile et nécessaire. »

La tradition des problèmes de découpage, héritée des Grecs, est restée bien vivante du temps des Arabes. Pour l'illustrer, j'ai choisi un auteur persan du dixième siècle, Abu l-Wafa. Les extraits proviennent d'un magnifique manuscrit du seizième siècle, cadeau de Gallica.

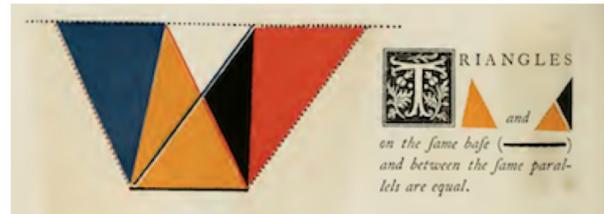
29 Livre des constructions géométriques...

Le titre complet est : « livre de ce qui est nécessaire à l'artisan en constructions géométriques ». Ce que vous voyez est la figure d'un problème typiquement euclidien : diviser un triangle en deux parties de surfaces égales, par un segment issu d'un point donné. Voici la démonstration d'Abu l-Wafa.

J'espère que vous ne m'en voudrez pas, je me suis permis de rajouter des lettres latines sur les sommets.

Euclide, Livre I, Proposition 37

O. Byrne, *The first six books of the Elements of Euclid* (1847)



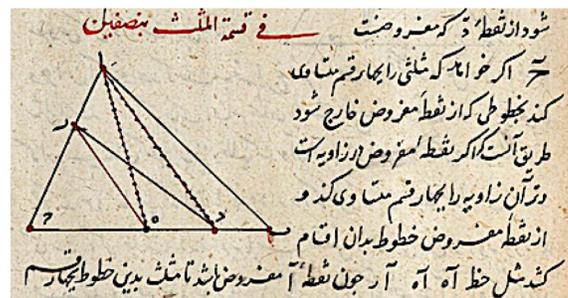
Metrica, Livre III

Héron d'Alexandrie (ca 10-75)

Nous pensons que les divisions des domaines ne s'écartent pas beaucoup des mesures effectuées dans les domaines. Car attribuer un domaine égal aux égaux et un domaine plus important à ceux qui en sont dignes, selon la répartition proportionnelle, est considéré comme tout à fait utile et nécessaire.

Livre des constructions géométriques

Abū l-Wafā' al-Būzjānī (940-998)



30 Livre des constructions géométriques...

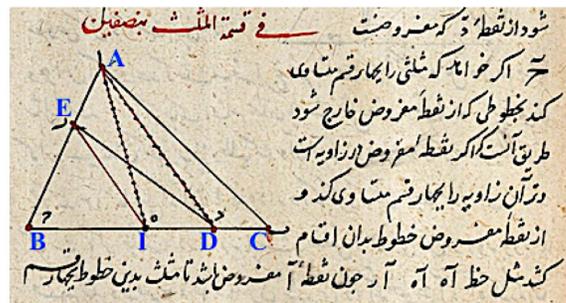
« On veut partager un triangle ABC en deux parties égales avec une ligne à partir d'un point D. On partage la ligne BC en sa moitié. Si la division tombe sur le point D, traçons AD, et le triangle ABC sera partagé par sa moitié par la ligne AD.

Et si la division ne tombe pas sur le point D, elle tombe sur un autre point comme le point I. On joint AD, AI, et on fait sortir du point I une ligne IE parallèle à la ligne AD. On rejoint DE, et le triangle ABC sera partagé en deux moitiés par la ligne DE. »

Vous ne croyez tout de même pas qu'Abu l-Wafa va vous dire pourquoi ? Il a mieux à faire : des découpages et des constructions beaucoup plus compliquées que ce triangle coupé en deux.

Livre des constructions géométriques

Abū l-Wafā' al-Būzjānī (940-998)

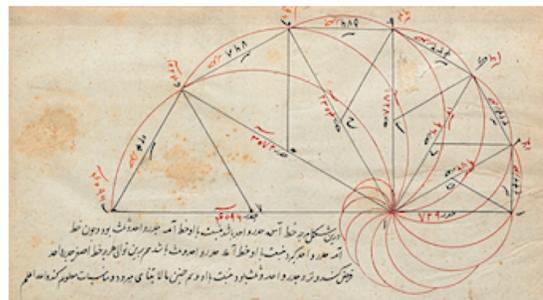


31 Livre des constructions géométriques...

Comme par exemple cette construction itérative de demi-cercles, que je trouve magnifique.

Livre des constructions géométriques

Abū l-Wafā' al-Būzjānī (940-998)

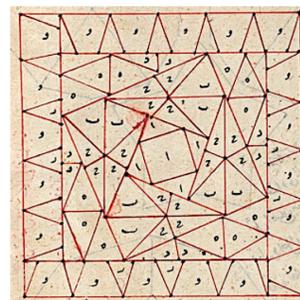


32 Livre des constructions géométriques...

Ou bien ce découpage de carré qui n'est pas sans rappeler le stomachion d'Archimède. Ah mais là, il ne s'agit plus de jouer...

Livre des constructions géométriques

Abū l-Wafā' al-Būzjānī (940-998)



33 Mosaïque

... mais de décorer. Les magnifiques mosaïques arabes, comme celles du palais de l'Alhambra, étaient d'abord des divisions de figures géométriques.

Mais bon, cette histoire est assez longue comme ça : je vous reparlerai de l'Alhambra un autre jour.

Mosaïque

Palais de l'Alhambra, Grenade, XIV^e siècle



34 références

Sur les références, vient en général le moment où je vous avoue ce que je n'ai pas osé vous dire avant. Oui mais là, je bloque. Vous vous souvenez du Centon nuptial d'Ausone ? L'Énéide de Virgile, bien classique, bien convenable, passée à la moulinette ?

D'après vous, qu'est-ce qu'il en a fait Ausone ? Rhmmm, non, n'insistez pas, je ne peux pas vous le dire. Lisez la première référence, ou mieux, allez chercher la traduction sur Gallica : c'est dans le volume deux de ses œuvres complètes, l'édition de 1843.

références

- A. Chevrier (2005) *Le Centon Nuptial d'Ausone, Formules*, 9, 13–27
- J. Friberg (2007) *Amazing traces of a Babylonian origin in Greek mathematics*, Singapore : World Publishing
- P. Legrand (2011) Un puzzle chargé d'histoire, *Bulletin de l'APMEP*, 485, 747–754
- M. Moyon (2016) Mathématiques et interculturalité : l'exemple de la division des figures planes dans l'histoire des pratiques mathématiques, *Repères IREM*, 103, 5–23
- W. Noel, R. Netz (2009) *Le codex d'Archimède*, Paris : JC Lattès