0 Tracer des arcs rampants

Allons bon, qu'est-ce que c'est encore que cette histoire d'arcs rampants ?

Ben d'une part, je ne pouvais pas ne pas parler, du monument qu'est le traité des coniques d'Apollonius. D'autre part, comme il est à peu près illisible de nos jours, que je n'ai pas vraiment d'images à vous montrer, ni d'anecdote sur Apollonius à vous raconter, cela promettait d'être épouvantablement ennuyeux.

Alors j'ai choisi de mettre l'accent sur la postérité d'Apollonius, et plus particulièrement sur les applications de ses coniques. Mais avant cela, voyons d'où peut bien venir cette histoire.

histoires de géométrie

Tracer des arcs rampants

les coniques d'Apollonius

hist-math.fr Bernard Ycart

1 Cônes antiques

L'objet « cône » est probablement aussi vieux que la poterie. On retrouve des cônes antiques en terre cuite, aussi bien en Égypte qu'en Mésopotamie, datant au moins de 2000 ans avant notre ère.

Plus intéressante est la question de son utilisation comme modèle de représentation scientifique. Quand pour la première fois a-t-on dit qu'un objet, naturel ou virtuel, était un cône ? Si j'avais à parier, je miserais sur l'optique.

Regardez les deux premières définitions de l'optique d'Euclide, dans une traduction de 1663.

Cônes antiques

Cône funéraire égyptien, cône mésopotamien d'Enmetena (ca 2000 av. J.-C.)

2 Optique

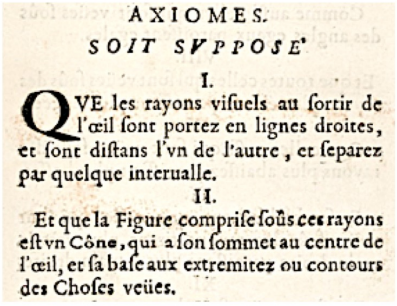
« Soit supposé, premièrement, que les rayons visuels au sortir de l'œil sont portés en lignes droites et sont distants l'un de l'autre et séparés par quelque intervalle. »

Eh oui, pour Euclide les rayons visuels partent de l'œil et non pas le contraire. Ce sont les savants arabes, et en particulier al-Haytham qui inverseront la vision.

« Deuxièmement, que la figure comprise sous ces rayons est un cône, qui a son sommet au centre de l'œil, et sa base aux extrémités ou contours des choses vues. »

Optique

Euclide (ca 325–265 av. J.-C.)



AXIOMES.

SOIT SVPPOSÉ

I.

QVE les rayons viſuels au ſortir de l'œil ſont portez en lignes droites, et ſont diſtans l'vn de l'autre, et ſeparez par quelque interualle.

II.

Et que la Figure compriſe ſoûs ces rayons eſt vn Cône, qui a ſon ſommet au centre de l'œil, et ſa baſe aux extremitez ou contours des Choſes veües.

3 Hadès enlevant Perséphone

Tenez en parlant d'optique. Restez indifférents au malheur de cette pauvre Perséphone qui se fait enlever par le dieu des Enfers, et concentrez-vous sur les roues du chariot. Elles ont bien l'air elliptiques non ?

La fresque date d'au moins vingt ans avant la naissance d'Euclide. Cela voudrait-il dire que les Grecs avaient compris qu'un cercle vu en oblique doit être une ellipse ? Eh bien non, pas exactement. Dans son optique, Euclide consacre une bonne dizaine de théorèmes à détailler la vision d'un cercle, d'une sphère et d'un cône, en fonction de la distance et de l'angle de vision. Puis vient, plutôt comme un corollaire, le Théorème quarante.

Hadès enlevant Perséphone
Fresque de la tombe de Verginia (ca 340 av. J.-C.)

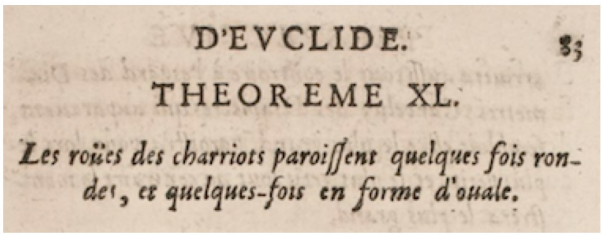
4 Les roues des chariots

« Les roues des chariots paraissent quelques fois rondes, et quelques fois en forme d'ovale. »

Cela ne sonne pas vraiment avec toute la rigueur d'un énoncé euclidien : vous ne trouvez pas ? D'autant que le traducteur s'est un peu laissé emporter : le mot grec utilisé par Euclide signifie « distordu », et pas ovale. Si Euclide avait compris que les roues des chariots doivent être vues et dessinées comme des ellipses, il l'aurait dit. Qu'est-ce qui lui a manqué ? Mystère. Peut-être le concept de projection. En tout cas pas la notion d'ellipse.

Voici les définitions qu'il donne du cône au début du livre onze des éléments.

Les roues des chariots
Euclide, Optique (ca 300 av. J.-C.)



D'EVCLIDE. 83

THEOREME XL.

Les roües des charriots paroiſſent quelques fois rondes, et quelques-fois en forme d'ouale.

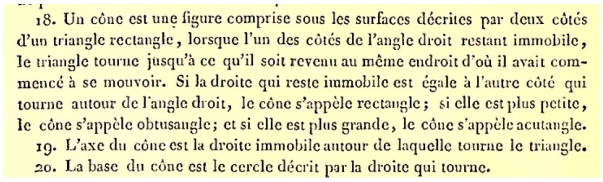
5 Éléments, Livre XI, Définitions

« Un cône est une figure comprise sous les surfaces décrites par deux côtés d'un triangle rectangle, lorsque l'un des côtés de l'angle droit restant immobile, le triangle tourne jusqu'à ce qu'il soit revenu au même endroit d'où il avait commencé à se mouvoir. Si la droite qui reste immobile est égale à l'autre côté qui tourne autour de l'angle droit, le cône s'appelle rectangle ; si elle est plus petite, le cône s'appelle obtusangle ; si elle est plus grande, le cône s'appelle acutangle.

L'axe du cône est la droite immobile autour de laquelle tourne le triangle. La base du cône est le cercle décrit par la droite qui tourne. »

Pourquoi cette distinction entre trois sortes de cônes ?

Éléments, Livre XI, Définitions
Euclide (ca 325–265 av. J.-C.)



18. Un cône est une figure comprise sous les surfaces décrites par deux côtés d'un triangle rectangle, lorsque l'un des côtés de l'angle droit restant immobile, le triangle tourne jusqu'à ce qu'il soit revenu au même endroit d'où il avait commencé à se mouvoir. Si la droite qui reste immobile est égale à l'autre côté qui tourne autour de l'angle droit, le cône s'appèle rectangle ; si elle est plus petite, le cône s'appèle obtusangle ; et si elle est plus grande, le cône s'appèle acutangle.
19. L'axe du cône est la droite immobile autour de laquelle tourne le triangle.
20. La base du cône est le cercle décrit par la droite qui tourne.

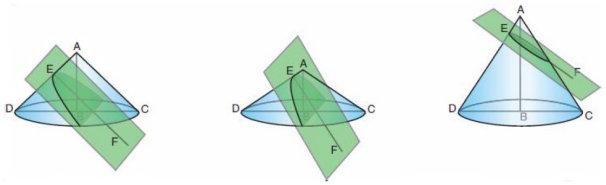
6 Coniques de Ménechme ou d'Aristée ?

Comme inventeur des coniques, plusieurs auteurs pointent du doigt Ménechme, qui serait tombé dessus en cherchant la duplication du cube. D'après Pappus, ce serait plutôt Aristée, qui aurait écrit un livre sur les coniques avant Euclide. Mais ce livre a été perdu.

Qui que soit le responsable, Ménechme, Aristée, tous considéraient des sections d'un cône par un plan perpendiculaire à une génératrice. Si le cône est obtusangle, c'est à dire que l'angle au sommet est obtus, ou comme dit Euclide que le rayon du cercle est plus long que la hauteur, l'intersection est une hyperbole. C'est l'image du milieu. Si le cône est rectangle l'intersection est une parabole, à gauche ; s'il est acutangle, l'intersection est une ellipse, à droite.

Toujours d'après Pappus, Euclide aurait lui aussi écrit sur les coniques, avec la même définition à base de cônes obtusangles et acutangles. Jusqu'à Archimède, qui lui aussi garde les dénominations anciennes. Et cela, voyez-vous, c'est intéressant, parce qu'avec Apollonius, les définitions changent. Or Apollonius est presque contemporain d'Archimède. Peut-être un peu plus jeune. Donc on peut être à peu près certain que la vision des coniques que nous avons toujours, est bien due à Apollonius. Voici la toute première définition de son livre.

Coniques de Ménechme ou d'Aristée ?
Ménechme (ca 380–320 av. J.-C.), Aristée l'Ancien (ca 370–300 av. J.-C.)



7 Surfaces coniques

« Si, d'un certain point, est menée une droite de jonction à la circonférence d'un cercle qui n'est pas dans le même plan que le point, qu'elle est prolongée de part et d'autre et que, le point restant fixe, elle tourne autour de la circonférence du cercle pour revenir à l'origine de son mouvement, j'appelle *surface conique* la surface décrite par la droite et qui est composée de deux surfaces opposées par le sommet, dont chacune s'accroît indéfiniment lorsque la droite qui décrit la surface est prolongée indéfiniment ; j'appelle *sommet* de la surface le point immobile, et *axe* la droite menée par le point et le centre du cercle. »

Surfaces coniques
Apollonius de Pergé (ca 240–190 av. J.-C.)

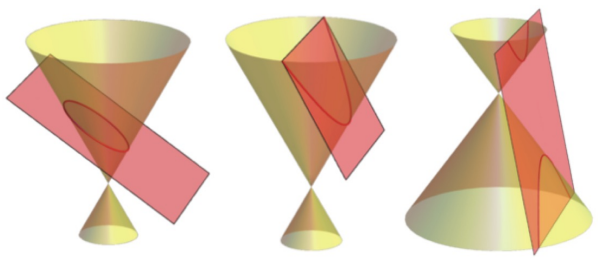
Si, d'un certain point, est menée une droite de jonction à la circonférence d'un cercle qui n'est pas dans le même plan que le point, qu'elle est prolongée de part et d'autre et que, le point restant fixe, elle tourne autour de la circonférence du cercle pour revenir à l'origine de son mouvement, j'appelle *surface conique* la surface décrite par la droite et qui est composée de deux surfaces opposées par le sommet, dont chacune s'accroît indéfiniment lorsque la droite qui décrit la surface est prolongée indéfiniment ; j'appelle *sommet* de la surface le point immobile, et *axe* la droite menée par le point et le centre du cercle.

8 Coniques d'Apollonius

Par rapport à ses prédécesseurs, Apollonius introduit plusieurs nouveautés. Une surface conique est désormais doublement infinie. Les trois sortes de coniques ne se distinguent plus par l'angle au sommet du cône, mais par l'inclinaison du plan d'intersection.

Mais il y a plus important : voici sa quatrième définition.

Coniques d'Apollonius
Apollonius de Pergé (ca 240–190 av. J.-C.)



9 Droites coupées et droites ordonnées

« J'appelle *diamètre* de toute ligne courbe située dans un seul plan, une droite menée de la ligne courbe et coupant en deux parties égales toutes les droites menées dans la ligne parallèlement à une certaine droite ; j'appelle *sommet* de la ligne, l'extrémité, située sur la ligne, de la droite ; enfin je dis que chacune des parallèles est *abaissée sur le diamètre de manière ordonnée.* »

Que veut-il dire par là ? Je vous le montre sur une parabole.

Droites coupées et droites ordonnées
Apollonius de Pergé (ca 240–190 av. J.-C.)

J'appelle *diamètre* de toute ligne courbe située dans un seul plan, une droite menée de la ligne courbe et coupant en deux parties égales toutes les droites menées dans la ligne parallèlement à une certaine droite ; j'appelle *sommet* de la ligne, l'extrémité, située sur la ligne, de la droite ; enfin je dis que chacune des parallèles est *abaissée sur le diamètre de manière ordonnée*.

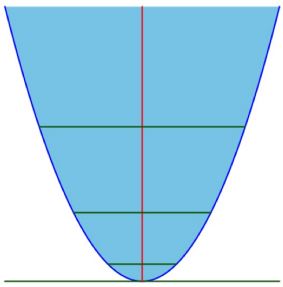
10 Droites coupées par des droites ordonnées

La définition est tout à fait générale. Apollonius dit : « considérons toutes les parallèles à une même droite, qui coupent notre courbe ». Sur le dessin, ce sont les segments verts horizontaux. Ils sont coupés en deux parties égales par un diamètre, ici par la verticale rouge. Apollonius qualifie d'ordonnés les segments verts parce qu'ils sont effectivement dans l'ordre le long du diamètre rouge.

Non mais dites voir, cela ne vous dit rien cette histoire d'ordonnée ? Et les segments verts coupés en deux : vous savez comment on dit coupé en latin ? Abscissa, tout simplement. Eh oui ! Voilà d'où viennent l'abscisse et l'ordonnée. Les mots au moins, parce que du temps d'Apollonius, il n'était pas encore question de repérage dans le plan. Cela ne viendra qu'avec la Géométrie de Descartes en 1637. Curieusement d'ailleurs, Descartes n'emploie pas les mots abscisse et ordonnée.

Même si les droites ordonnées et coupées d'Apollonius restent purement géométriques, ce qu'il en fait est tout de même étonnamment proche des coordonnées cartésiennes. Je vous résume l'énoncé de la proposition 11 du livre 1.

Droites coupées par des droites ordonnées
Apollonius de Pergé (ca 240–190 av. J.-C.)



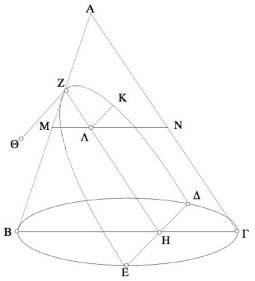
11 Livre I, Proposition 11

Considérons une section de cône Δ, Z, E, de sorte que le diamètre de la section soit parallèle au côté $A\Gamma$. Menons depuis le point Z un segment $Z\Theta$ perpendiculaire à ZH, et tel que le rapport de $Z\Theta$ à ZA soit égal au rapport du carré de $B\Gamma$ au produit de BA par $A\Gamma$.

Soit maintenant K un point quelconque sur la section, Λ le point où la perpendiculaire au diamètre est coupée par le diamètre. Alors le carré de $K\Lambda$ a la même surface que le rectangle de côtés $Z\Theta$ et $Z\Lambda$.

Maintenant, souvenez-vous de la figure précédente. Le segment coupé $K\Lambda$ est une abscisse. Le segment $Z\Lambda$ est une ordonnée. Apollonius vient tout benoîtement de vous dire que pour tout point K sur la courbe, le carré de son abscisse est égal à son ordonnée multipliée par une constante. C'est bien l'équation générale d'une parabole ça non ?

Livre I, Proposition 11
Apollonius de Pergé (ca 240–190 av. J.-C.)

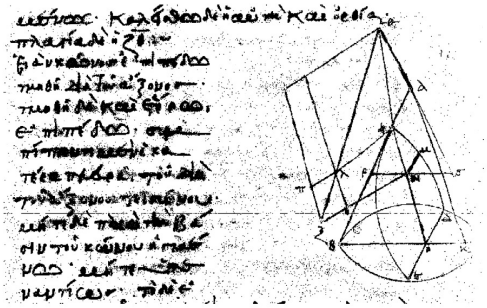


12 Livre I, Proposition 12

La proposition suivante recommence le même travail, mais avec une section qui intersecte les deux nappes. Cette fois-ci, le carré de l'abscisse n'est plus égal au rectangle identifié précédemment, car il le dépasse d'un autre rectangle, qui s'écrit en fonction du carré de l'ordonnée. Commme il y a dépassement, Apollonius qualifie la courbe d'hyperbole.

Dans la proposition 13, c'est l'autre cas qui est traité, celui de la section bornée. Apollonius refait sa comparaison et trouve entre le carré de l'abscisse et le rectangle construit sur l'ordonnée, un déficit. C'est la signification du mot « ellipse ».

Livre I, Proposition 12
Apollonius de Pergé (ca 240–190 av. J.-C.)



13 Livre I, Propositions 11, 12, 13

Le bilan de ces trois propositions onze, douze et treize, est que Apollonius a écrit la caractérisation générale d'une conique par son équation cartésienne. Impressionnant non ?

Attention aux anachronismes tout de même. L'équation sous forme moderne, celle que vous voyez, unifie les trois cas particuliers grâce à la notion d'excentricité. Pour une parabole elle vaut 1, elle est inférieure à un pour une ellipse, d'où le déficit, supérieure à 1 pour l'hyperbole, d'où le dépassement. Apollonius ne manipule que des longueurs ou des aires, qui sont donc forcément positives. De plus il n'est pas question pour lui de noter des longueurs par des symboles comme nous. L'algèbre de Descartes est encore loin.

Livre I, Propositions 11, 12, 13
Apollonius de Pergé (ca 240–190 av. J.-C.)

$$x^2 = 2py + (e^2 - 1)y^2$$

14 Coniques, traduction des frères Banū Mūsā

Ce que je viens de vous dire ne rend pas vraiment justice à Apollonius. Ce ne sont que les résultats les plus élémentaires du premier livre, dans une œuvre gigantesque qui comportait huit livres. Les quatre premiers nous sont parvenus en grec et en arabe, les trois suivants seulement en arabe, et le huitième a été perdu.

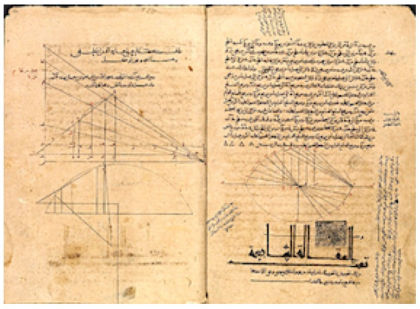
Les premières traductions arabes datent de la Maison de la Sagesse, et en particulier des frères Banu Musa. Les coniques d'Apollonius ont été considérées dès le début par les Arabes comme une œuvre majeure, au même titre que les Éléments d'Euclide.

Voici comment un auteur arabe du douzième siècle en parle :

« Apollonius, le grand géomètre, a développé, dans son ouvrage intitulé *le Traité des Coniques*, la plupart des caractères merveilleux et des admirables propriétés de ces trois courbes. En pénétrant dans leur nature la plus intime par les spéculations les plus diverses, il remplit d'admiration les intelligences, en même temps qu'il étonne les esprits par des inventions et des artifices particuliers fondés sur la théorie des coniques. »

Il ne manquait qu'une chose ; un instrument pour les tracer, autrement qu'en interpolant des points particuliers. Cet intrument, un savant du dixième siècle l'a inventé : il s'agit d'al-Quhi. Il donne nettement l'impression de ne pas croire vraiment qu'un dispositif aussi simple soit nouveau.

Coniques, traduction des frères Banū Mūsā
Muḥammad, Aḥmad, al-Ḥasan Banū Mūsā, (ca. 820–870)



15 Le compas parfait

« Si cet instrument a existé avant nous chez les anciens, s'il en a été question et si son nom a été connu chez eux, si enfin le nom de cet instrument et les noms des choses qui s'y rattachent ont été différents de ceux que nous emploierons, nous devons être excusé à cet égard, attendu que ni l'instrument même, ni une mention de l'instrument ne sont parvenus à nous, quoiqu'il soit possible que cet intrument, avec la démonstration qu'il sert à décrire les lignes que nous venons de mentionner, ait existé, et que cependant son emploi ait été différent de celui que nous en ferons dans le second livre du présent traité. »

Tout ça pour quoi ?

Le compas parfait
Abū Sahl al-Qūhī (ca 940–1000)

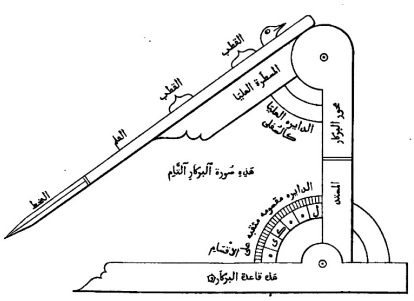
Si cet instrument a existé avant nous chez les anciens, s'il en a été question et si son nom a été connu chez eux, si enfin le nom de cet instrument et les noms des choses qui s'y rattachent ont été différents de ceux que nous emploierons, nous devons être excusé à cet égard, attendu que ni l'instrument même, ni une mention de l'instrument ne sont parvenus à nous, quoiqu'il soit possible que cet intrument, avec la démonstration qu'il sert à décrire les lignes que nous venons de mentionner, ait existé, et que cependant son emploi ait été différent de celui que nous en ferons dans le second livre du présent traité.

16 Le compas parfait

Pour ce « compas parfait », capable de tracer n'importe quelle conique. D'abord un socle horizontal ; ensuite une tige à laquelle on peut donner un angle déterminé par rapport au socle, c'est l'axe du cône. Puis articulée en haut de l'axe une autre tige qui représente la génératrice du cône. Sur cette génératrice, la plume est placée au bout d'une autre tige coulissante, que l'on peut raccourcir ou allonger de manière à ce que la plume reste en contact avec la feuille.

C'est simple mais personne n'y avait pensé avant al-Quhi.

Le compas parfait
Abū Sahl al-Qūhī (ca 940–1000)



17 De organica conicarum sectionum

Des Arabes, les intruments à tracer les coniques ont été transmis aux peintres et graveurs de la Renaissance, puis ont été perfectionnés petit à petit. Ce Franz van Schooten est resté dans l'histoire pour avoir soutenu et publié Descartes, Fermat et surtout Huygens qui avait été son élève. Il a tout de même écrit un livre « Sur les instruments pour décrire dans le plan les sections coniques. »

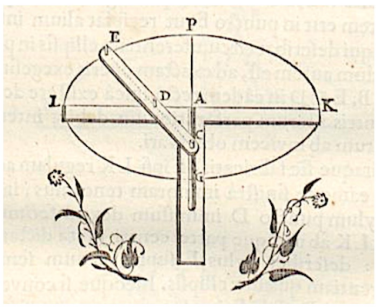
Nous allons passer en revue quelques uns de ces instruments.

De organica conicarum sectionum
Franz van Schooten (1615–1660)

18 Ellipsographe

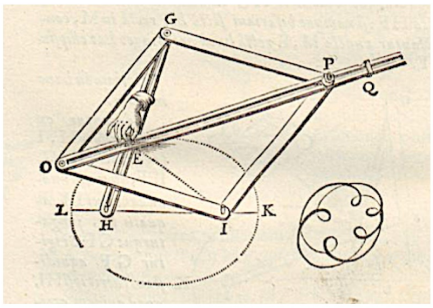
Voici un premier ellipsographe : deux règles en T et une troisième qui coulisse pour le tracé.

Ellipsographe
Franz van Schooten, De organica conicarum sectionum (1646)



19 Ellipsographe

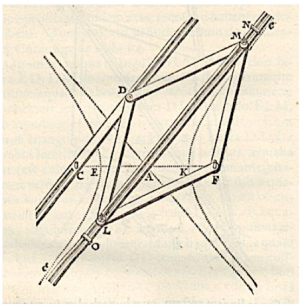
Ellipsographe
Franz van Schooten, De organica conicarum sectionum (1646)



Un autre ellipsographe, un peu plus compliqué.

20 Hyperbolographe

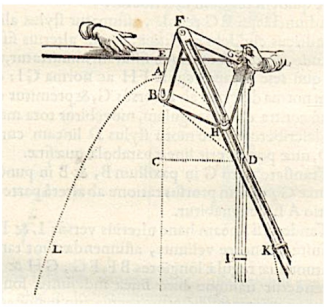
Hyperbolographe
Franz van Schooten, De organica conicarum sectionum (1646)



Presque le même instrument, qui sert ici à tracer une hyperbole.

21 Parabolographe

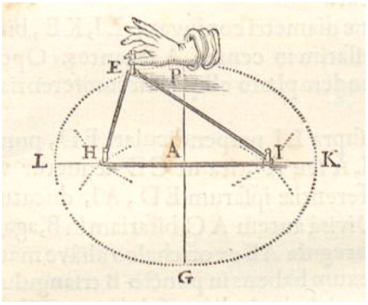
Parabolographe
Franz van Schooten, De organica conicarum sectionum (1646)



Et voici la version parabole, un tantinet encombrante si je peux me permettre.

22 Ellipse du jardinier

Ellipse du jardinier
Franz van Schooten, De organica conicarum sectionum (1646)



Parce qu'on peut trouver moins sophistiqué. Pour les ellipses, le plus simple est de tendre une ficelle en forme de triangle en conservant comme côté le segment joignant les deux foyers. L'invention semble due aux frères Banu Musa.

Cela s'appelle l'ellipse du jardinier, parce que les jardiniers tracent comme cela leurs parterres de fleurs.

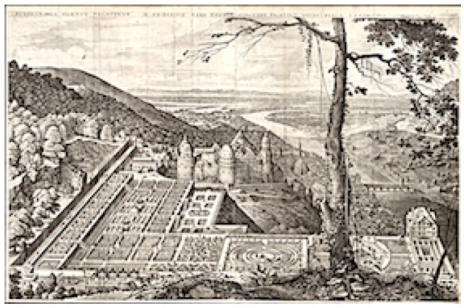
Vous connaissez mon mauvais esprit, je suis incapable d'entendre un truc comme ça sans vérifier. J'ai trouvé très peu de parterres de fleurs elliptiques sur le web.

23 Hortus Palatinus (1620)

Tout de même, Salomon de Caus a tracé un labyrinthe elliptique dans les jardins Palatins à Heidelberg. Vous le voyez au pied de l'arbre à gauche. Il a bien fait de publier cette gravure, parce que les jardins ont été complètement dévastés lors du ravage du Palatinat par les troupes de Louis XIV.

Bref, je m'éloigne. Quand on n'est pas jardinier, et qu'on vit au dix-septième siècle, pourquoi donc aurait-on besoin de coniques ? J'ai choisi pour illustrer les applications, un de ces inconnus que j'aime bien sortir de l'oubli de temps en temps.

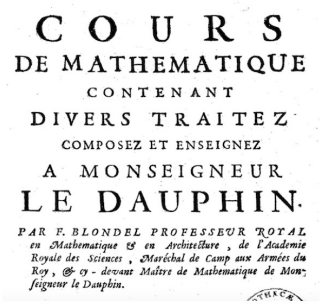
Hortus Palatinus (1620)
Salomon de Caus (1576–1626)



24 Cours de Mathématiques (1683)

Il s'appelle François Blondel, et a exercé différentes fonctions au service du roi Louis XIV. Ce cours de mathématiques est celui qu'il a enseigné à Monseigneur le Dauphin, c'est-à-dire le fils aîné du roi. Il se présente comme professeur royal en mathématiques, en architecture, membre de l'Académie royale des sciences, mais aussi maréchal de camp aux Armées du Roy, donc ingénieur militaire.

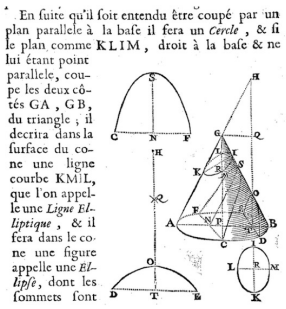
Cours de Mathématiques (1683)
François Blondel (1618–1686)


COURS
DE MATHEMATIQUE
CONTENANT
DIVERS TRAITEZ
COMPOSEZ ET ENSEIGNEZ
A MONSEIGNEUR
LE DAUPHIN.
PAR F. BLONDEL PROFESSEUR ROYAL en Mathematique & en Architecture, de l'Academie Royale des Sciences, Maréchal de Camp aux Armées du Roy, & cy-devant Maître de Mathematique de Monseigneur le Dauphin.

25 Cône coupé par un plan

Dans le cours de mathématiques qu'il destine au dauphin, Blondel parle de coniques. Certes, ce n'est qu'une teinture : quelques définitions sans aucune application. Mais s'il a estimé que l'héritier de la couronne de France devait savoir ce qu'est une ellipse, il fallait bien qu'il y voie un intérêt non ? Pour comprendre cet intérêt, il faut d'abord fouiller dans son cours d'architecture.

Cône coupé par un plan
Blondel, cours de Mathématiques (1683)


En suite qu'il soit entendu être coupé par un plan parallele à la base il fera un *Cercle*, & si le plan comme KLIM, droit à la base & ne lui étant point parallele, coupe les deux côtés GA, GB, du triangle ; il decrira dans la surface du cone une ligne courbe KMIL, que l'on appelle une *Ligne Elliptique*, & il fera dans le cone une figure appelle une *Ellipse*, dont les sommets sont

26 Porte Saint-Denis

Parce que Blondel est un architecte reconnu. Au point qu'on lui a confié les plans d'un monument à la gloire de Louis XIV, destiné à orner la porte Saint-Denis à Paris. Il en est très fier, et choisit de le reproduire en frontispice de son cours d'architecture. Ce monument est toujours là, avec légèrement moins de chaises à porteurs, et un tout petit peu plus de motos.

Pour comprendre en quoi les coniques sont utiles à un architecte, il faut se rendre au chapitre neuf du livre six, qui traite des arcs rampants.

Porte Saint-Denis
Blondel, cours d'Architecture (1675)

27 Arcs rampants

Un arc rampant, en architecture, c'est une voûte qui relie deux piliers, qui non seulement peuvent être à deux niveaux différents, mais peuvent même n'être pas verticaux, et bien sûr pas forcément parallèles.

Arcs rampants
Casa Castellarnau, Tarragona (XV^e siècle)

28 Livre VI, chapitre IX : Des arcs rampants

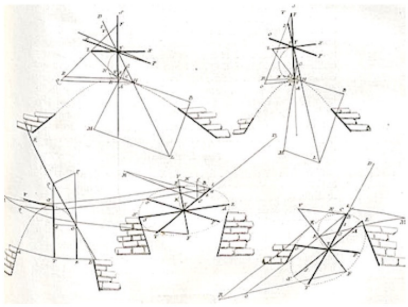
Le problème consiste à trouver un profil qui non seulement rejoigne les deux piliers, mais qui en plus ait aux deux points de contacts, ses tangentes dans la direction des piliers.

Blondel dit : « J'ai jugé que ces arcs pour être justes et corrects, devaient être l'une des sections coniques, c'est-à-dire une ellipse qui est la plus ordinaire, ou une parabole, ou une hyperbole ; selon la diversité des sujetions qui peuvent être proposées. »

En fait d'autres avaient la même idée, comme Philippe de La Hire .

Blondel n'est pas seulement architecte, il est aussi ingénieur militaire, et l'auteur d'un livre de balistique, « l'art de jeter les bombes. »

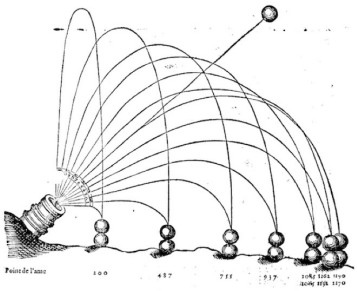
Livre VI, chapitre IX : Des arcs rampants
Blondel, cours d'Architecture (1675)



29 Trajectoires des boulets de canon

Oh certes, depuis le siècle précédent, et les travaux de Tartaglia en particulier, on connaissait le moyen d'orienter un canon de manière à optimiser son tir. On connaissait aussi la forme de la trajectoire d'un boulet, et on disposait de tables empiriques permettant de déterminer la portée en fonction du poids du projectile, de la quantité de poudre et de l'angle de tir. Oui, mais au seizième siècle, il n'y avait pas encore de théorie mathématique de la chute des corps.

Trajectoires des boulets de canon
Blondel, l'art de jeter les bombes (1683)

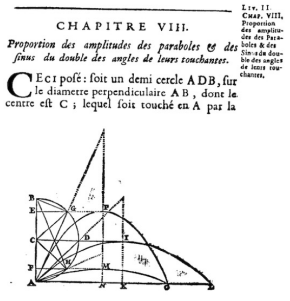


30 Amplitudes des paraboles

Depuis Galilée, puis son élève Torricelli, on sait que la trajectoire d'un corps pesant doit être une parabole. Certes, on se rend bien compte que la parabole est trop symétrique pour coller aux observations, et on soupçonne bien la résistance de l'air d'y être pour quelque chose.

Mais tout de même, le modèle parabolique explique bien pourquoi l'angle optimal de tir est de 45 degrés, alors Blondel enseigne fidèlement la théorie de Galilée.

Amplitudes des paraboles
Blondel, l'art de jeter les bombes (1683)


CHAPITRE VIII.

Proportion des amplitudes des paraboles & des sinus du double des angles de leurs touchantes.

CEci posé : soit un demi cercle ADB, sur le diametre perpendiculaire AB, dont le centre est C ; lequel soit touché en A par la

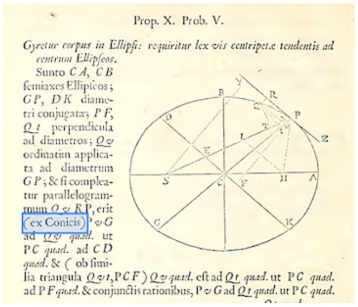
31 Trajectoire elliptique

Si je vous ai parlé de Blondel, ce n'est certes pas pour diminuer le mérite de Newton. C'est bien lui qui a compris qu'une force d'attraction inversement proportionnelle à la distance devait conduire à des trajectoires coniques, lui qui du même coup, a expliqué la première loi de Kepler sur les trajectoires elliptiques des planètes, et la chute parabolique des corps selon Galilée.

Simplement, les multiples instruments de van Schooten, comme les applications parfois un peu naïves de Blondel, prouvent que les coniques étaient parfaitement intégrées au bagage mental des intellectuels du dix-septième siècle. Les coniques d'Apollonius faisaient partie de leur formation et de leur culture, autant que les Éléments d'Euclide. D'ailleurs Newton, qui cite Apollonius à plusieurs reprises, ne le nomme pas à chaque fois. Il dit simplement : d'après les « Coniques », sous-entendu d'Apollonius.

Sa fidélité aux écrits anciens a quelque chose d'émouvant. À propos d'un lemme de géométrie, il dit : « De cette façon, le problème des quatre lignes commencé par Euclide, et continué par Apollonius se trouve résolu dans ce corollaire, non par le calcul, mais par une composition géométrique telle que celle par laquelle les anciens l'ont cherché. »

Trajectoire elliptique
Newton, Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica (1683)


Prop. X. Prob. V.

Gyretur corpus in Ellipſi: requiritur lex vis centripetæ tendentis ad centrum Ellipſeos.

Sunto *CA*, *CB* ſemiaxes Ellipſeos; *GP*, *DK* diametri conjugatæ; *PF*, *Qt* perpendicula ad diametros; *Qv* ordinatim applicata ad diametrum *GP*; & ſi compleatur parallelogrammum *Qv RP*, erit (ex Conicis) *PvG* ad *Qv quad.* ut *PC quad.* ad *CD quad.* & (ob ſimilia triangula *Qvt*, *PCF*) *Qv quad.* eſt ad *Qt quad.* ut *PC quad.* ad *PF quad.* & conjunctis rationibus, *PvG* ad *Qt quad.* ut *PC quad.*

32 Cône de lumière

La mécanique newtonienne, et son explication du mouvement des planètes suffirait à elle seule à justifier la place particulière qu'occupent le cône et les courbes qui en dérivent dans l'histoire des mathématiques.

La théorie de Newton n'a été dépassée qu'au vingtième siècle, par la relativité d'Einstein. Ceci est extrait du premier article d'Einstein sur la relativité restreinte, écrit en 1905. Regardez l'équation de l'encadré bleu. C'est celle d'un cône : celui qui porte la trajectoire d'un signal lumineux émis au temps zéro dans l'espace-temps.

Cône de lumière
Einstein, Zur Elektrodynamik bewegter Körper (1905)

Zur Zeit $t = \tau = 0$ werde von dem zu dieser Zeit gemeinsamen Koordinatenursprung beider Systeme aus eine Kugelwelle ausgesandt, welche sich im System K mit der Geschwindigkeit V ausbreitet. Ist (x, y, z) ein eben von dieser Welle ergriffener Punkt, so ist also

$$x^2 + y^2 + z^2 = V^2 t^2.$$

Diese Gleichung transformieren wir mit Hilfe unserer Transformationsgleichungen und erhalten nach einfacher Rechnung:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = V^2 \tau^2.$$

33 Galaxie d'Andromède

Tenez, à propos d'espace-temps : quelle forme diriez-vous qu'a la galaxie d'Andromède ?

Galaxie d'Andromède
Télescope Hubble (2015)

34 références

Après tout, même si les coniques d'Apollonius sont beaucoup moins célèbres de nos jours qu'au dix-septième siècle, peut-être que nous n'avons pas encore complètement abandonné le schéma mental : qu'en pensez-vous ?

références

- M. Decorps-Foulquier (2015) Apollonius et le traité des coniques, `images.math.cnrs.fr`
- R. Rashed (2005) *Geometry and dioptrics in classical Islam*, London : Al-Furqān Islamic Heritage Foundation
- R. Rashed (2008) *Apollonius de Perge, Coniques*, Berlin : Walter de Gruyter
- R. Rashed (2013) *Ibn al-Haytham's theory of conics, geometrical construction and practical geometry*, London : Routledge
- D. Raynaud (2007) Le tracé continu des coniques à la Renaissance, *Arabic Sciences and Philosophy*, 17(2), 299–345
- B. Vitrac (2004) *Apollonius de Perge et la tradition des coniques*, `culturemath.ens.fr`