0 La sinusoïde

histoires d'astronomie

La sinusoïde

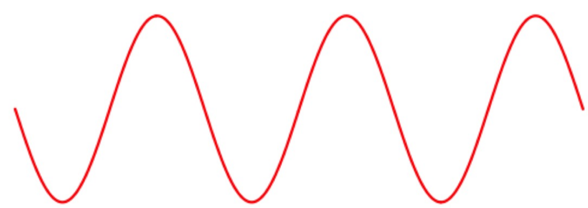
fonctions trigonométriques

hist-math.fr Bernard Ycart

Voir la trigonométrie comme l'étude des fonctions trigonométriques et identifier ces dernières à leurs courbes représentatives, en particulier la sinusoïde, c'est mettre l'histoire sens dessus dessous. Ce ne serait pas la première fois que cela nous arrive, non ?

1 Sinusoïde

Sinusoïde



On pourrait penser que, la sinusoïde étant particulièrement sinueuse, c'est une étymologie plausible pour le mot sinus. Mais non : sinus est la traduction latine du mot arabe jayb qui signifie poche, qui lui-même est une déformation du mot sanscrit jiba qui signifie corde. En plus, l'idée de courbe représentative date du dix-septième siècle, et ne s'est véritablement imposée qu'au dix-huitième, en même temps que la notion de fonction se clarifiait petit à petit.

D'un autre côté, les Grecs calculent des cordes depuis le second siècle avant notre ère, et les Indiens ont introduit le sinus vers la fin du cinquième siècle. La sinusoïde est donc beaucoup plus récente que le sinus. En plus, nous allons voir qu'elle n'a pas été interprétée d'abord, comme courbe représentative de la fonction sinus.

Mais revenons au début. Le début, c'est l'astronomie grecque, magistralement incarnée pour les siècles à venir par Ptolémée.

2 Ptolémée (ca 85–165)

Ptolémée (ca 85–165)

Pedro Berruguette, Juste de Gand (1476)

Vous vous souvenez que son Almageste, ou plutôt sa « Composition Mathématique », contient une table de cordes précise au demi-degré.

Ces cordes lui servent à répondre à toute une série de questions astronomiques, par l'intermédiaire d'un résultat impressionnant de puissance, véritable couteau suisse des calculs astronomiques. Regardez son énoncé dans le livre I de l'Almageste.

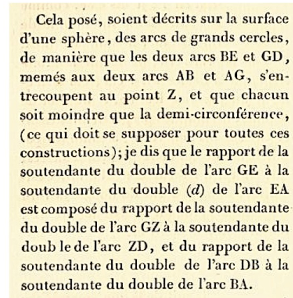
3 rapports de soutendantes

« Soient décrits sur la surface d'une sphère, des arcs de grands cercles, de manière que les deux arcs BE et CD, » etc.

Même avec la figure que donne Ptolémée, c'est très difficile à suivre. Il est question de trois rapports, faisant intervenir les « soutendantes du double » de six arcs différents. La soutendante c'est la corde ; la corde du double d'un arc, c'est le double du sinus de cet arc. Ce théorème, que Ptolémée énonce sans l'attribuer expressément, nous l'appelons « théorème de Ménélaüs », ou Menelaos en grec. Le voici sous forme moderne.

rapports de soutendantes

Ptolémée (ca 85–165) Composition Mathématique, Livre I, chapitre XI


Cela posé, soient décrits sur la surface d'une sphère, des arcs de grands cercles, de manière que les deux arcs BE et GD, memés aux deux arcs AB et AG, s'entrecoupent au point Z, et que chacun soit moindre que la demi-circonférence, (ce qui doit se supposer pour toutes ces constructions); je dis que le rapport de la soutendante du double de l'arc GE à la soutendante du double (*d*) de l'arc EA est composé du rapport de la soutendante du double de l'arc GZ à la soutendante du double de l'arc ZD, et du rapport de la soutendante du double de l'arc DB à la soutendante du double de l'arc BA.

4 Théorème de Menelaos

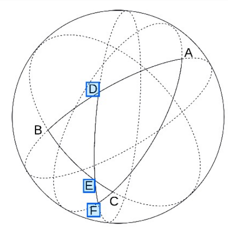
Considérez un triangle sphérique, formé par trois grands cercles. Ici par exemple ABC. Considérez un autre grand cercle qui coupe les trois grands cercles précédents. Ici le côté AB est coupé en D, le côté BC en E et le côté CA en F. Eh bien le produit des trois rapports de sinus que vous voyez vaut 1.

On trouve ce théorème dans un traité de géométrie sphérique de Menelaos. C'était aussi un astronome-mathématicien d'Alexandrie, mais d'une génération antérieure à Ptolémée. On le sait, car il y a plusieurs références aux observations de Menelaos dans l'Almageste.

Il est difficile d'imaginer le nombre d'applications de ce théorème. Quel que soit le calcul astronomique que l'on souhaite effectuer, il y a toujours une configuration de quatre grands cercles qui va permettre de se ramener à un rapport de sinus. Encore faut-il la trouver, cette configuration de quatre cercles.

Théorème de Menelaos

Menelaos (ca. 70–130) Spheriques



$$\frac{\sin DA}{\sin DB} \times \frac{\sin EB}{\sin EC} \times \frac{\sin FC}{\sin FA} = 1$$

5 Kitāb Mānālāwus fī al ashkāl al kurīyah

Voici une traduction arabe des Sphériques de Menelaos, avec plusieurs configurations de grands cercles. Elle date de la fin du treizième siècle. À cette époque-là, la trigonométrie était pratiquement achevée.

Sa naissance, au neuvième et dixième siècles, est en grande partie le résultat des tentatives pour simplifier l'application du théorème de Menelaos. Tous les grands noms de la science arabe y ont participé.

Kitāb Mānālāwus fī al ashkāl al kurīyah

IO Islamic 1148 (1291)

6 Abū al Ḥasan Thābit ibn Qurra (ca. 826–901)

Parmi eux, Thabit ibn Qurra au neuvième siècle. Son « Traité sur la figure secteur » est un de ses titres de gloire. Il y démontre rigoureusement le théorème de Ménélaos. Écoutez son introduction.

Abū al Ḥasan Thābit ibn Qurra (ca. 826–901)

Risāla fī al shakl at-qaṭṭā

7 Traité sur la figure secteur

« Je ne connais aucune des figures géométriques avec lesquelles on opère dans la science des étoiles qui ait donné plus de peine aux gens que cette figure, ni aucune qui soit plus fameuse que celle-ci. Ainsi leur raison de l'étudier réside dans notre connaissance de la multiplicité de son utilité et dans sa nécessité dans la science de la sphère et de ce qu'elle est le fondement sur lequel s'appuie la pensée en bon nombre de travaux sur la science des étoiles. »

Traité sur la figure secteur

Thābit ibn Qurra (ca. 826–901)

Je ne connais aucune des figures géométriques avec lesquelles on opère dans la science des étoiles qui ait donné plus de peine aux gens que cette figure, ni aucune qui soit plus fameuse que celle-ci. Ainsi leur raison de l'étudier réside dans notre connaissance de la multiplicité de son utilité et dans sa nécessité dans la science de la sphère et de ce qu'elle est le fondement sur lequel s'appuie la pensée en bon nombre de travaux sur la science des étoiles.

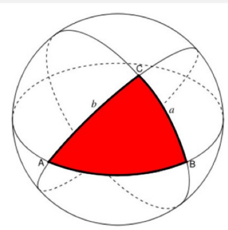
8 Loi des sinus

Avec Thabit ibn Qurra commence, entre autres, la mise au point de la « loi des sinus » pour les triangles sphériques. Elle allait rendre caduc le théorème de Ménélaos dans la plupart des applications. On peut la voir comme le succès phare de l'effort collectif dans le développement de la trigonométrie.

Écoutez al-Biruni, au tout début du onzième siècle, évoquer les querelles de priorité qui n'ont pas manqué d'accompagner cette découverte. Le livre dont est extraite cette citation s'appelle « Les clés de la science de l'astronomie ».

Loi des sinus

triangle sphérique



$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$$

9 Kitab maqalīd 'ilm al-hay'ah

« Une âpre rivalité oppose ceux qui sont en compétition. Ils se jalousent mutuellement. Querelles et disputes l'emportent au point que chacun envie l'autre et se glorifie de ce qui n'est pas de lui. Tel pille les découvertes d'autrui, se les attribue et en tire profit, et il voudrait encore que l'on feigne de ne pas s'en apercevoir ; mieux, qui dénonce son imposture est aussitôt pris à partie et exposé à sa vindicte. »

Cela sent le vécu.

Kitab maqalīd 'ilm al-hay'ah

Al-Bīrūnī (973-1048)

Une âpre rivalité oppose ceux qui sont en compétition. Ils se jalousent mutuellement. Querelles et disputes l'emportent au point que chacun envie l'autre et se glorifie de ce qui n'est pas de lui. Tel pille les découvertes d'autrui, se les attribue et en tire profit, et il voudrait encore que l'on feigne de ne pas s'en apercevoir ; mieux, qui dénonce son imposture est aussitôt pris à partie et exposé à sa vindicte.

10 Qanun al-Masudi (1108)

Ces figures, extraites d'un autre de ses livres d'astronomie, vous montrent l'importance de la géométrie sphérique à l'époque.

Qanun al-Masudi (1108)

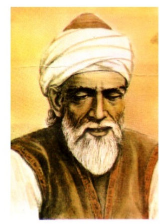
Al-Bīrūnī (973-1048)

11 Abu al-Wāfā (940–998)

S'il fallait isoler un nom, Abu al-Wafa dans la seconde moitié du dixième siècle, pourrait être l'auteur à qui la trigonométrie doit le plus. Son livre est intitulé « Révision de l'Almageste », par référence à Ptolémée. En plus du cas général de la formule des sinus, il propose aussi de fixer le rayon du cercle à 1, de manière à transformer les lignes trigonométriques, sinus, cosinus et autres, en rapports sans unités. Abu al-Wafa est aussi celui qui a introduit officiellement la fonction tangente, même si des rapports de sinus et de cosinus étaient calculés longtemps avant lui. Voici le passage où tangente et cotangente apparaissent pour la première fois.

Abu al-Wāfā (940–998)

Révision de l'Almageste



12 Révision de l'Almageste

« Le rapport de la tangente à la mesure égale le rapport du sinus au cosinus. Et le rapport de la cotangente à la mesure égale le rapport du cosinus au sinus. Et le rapport de la cotangente à la mesure égale le rapport de la mesure à la tangente. Il est évident que si nous prenons la mesure égale à un, le rapport du sinus au cosinus est la tangente, et le rapport du cosinus au sinus est la cotangente. »

Révision de l'Almageste

Abu al-Wāfā (940-998)

Le rapport de la tangente à la mesure égale le rapport du sinus au cosinus. Et le rapport de la cotangente à la mesure égale le rapport du cosinus au sinus. Et le rapport de la cotangente à la mesure égale le rapport de la mesure à la tangente. Il est évident que si nous prenons la mesure égale à un, le rapport du sinus au cosinus est la tangente, et le rapport du cosinus au sinus est la cotangente.

13 Naṣīr ad-Dīn aṭ-Tūsī (1201-1274)

À partir de l'an mille, commencent à apparaître des ouvrages entièrement consacrés à la trigonométrie. L'un des plus connus est le « Livre sur la figure secteur » de al-Tusi. C'est le même titre que celui d'ibn Qurra, presque quatre siècles auparavant. Mais désormais, la trigonométrie est une science mature. Al-Tusi donne de très nombreuses formules, mais il ne cherche pas à en faire un catalogue mémorisable.

Naṣīr ad-Dīn aṭ-Tūsī (1201-1274)

14 Livre sur la figure secteur

Livre sur la figure secteur
Naṣīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī (1201-1274)

« Sachez que le but qu'on s'est proposé par cette analyse n'est point de limiter les procédés à suivre pour trouver les inconnues, [. . .] car en définitive, la personne intelligente qui se sera bien pénétrée des démonstrations saura toujours beaucoup plus facilement retrouver les procédés de ce calcul qu'elle ne saurait servilement retenir ces formules. »

Sachez que le but qu'on s'est proposé par cette analyse n'est point de limiter les procédés à suivre pour trouver les inconnues, [. . .] car en définitive, la personne intelligente qui se sera bien pénétrée des démonstrations saura toujours beaucoup plus facilement retrouver les procédés de ce calcul qu'elle ne saurait servilement retenir ces formules.

15 Georg von Peuerbach (1423–1461)

La transmission des conquêtes de la trigonométrie arabe à l'Europe s'est opérée selon le schéma habituel. Les traductions en latin du Moyen-Âge ont été lues et assimilées, mais les savants de la Renaissance ont souvent préféré citer Ptolémée, plutôt que les Arabes.

Parmi ces savants, Georg von Peuerbach. C'est un Autrichien, que l'on peut voir comme un des précurseurs de Copernic et Kepler. Il est mort jeune, mais a tout de même laissé un « Traité sur les propositions de Ptolémée à propos des sinus et des cordes ». Tant pis pour l'anachronisme : Ptolémée n'a jamais parlé de sinus.

Georg von Peuerbach (1423–1461)
Tractatus super propositiones Ptolemæi de Sinubus et Chordis

16 Johan Müller, dit Regiomontanus (1436–1476)

Parmi ses élèves, figure un jeune homme extrêmement brillant, auteur, lui, d'un condensé de l'Almageste de Ptolémée. Son nom de famille est Müller, mais comme il est natif de Königsberg, la montagne du Roi, il signe en latin Ioannis de Monte Regio, d'où Regiomontanus.

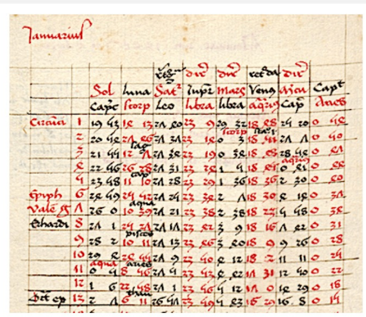
Sur ce frontispice, il est représenté à droite, en train de dialoguer avec Ptolémée.

Johan Müller, dit Regiomontanus (1436–1476)
Epytoma in Almagestum Ptolemei (1496)

17 Regiomontanus, Almanach (1448)

Il semble avoir été un enfant très précoce, puisqu'à l'âge de douze ans, il écrivait déjà de sa main cet almanach pour l'année 1448.

Regiomontanus, Almanach (1448)
Wien Nationalbibliothek MS 4988



18 Alienor de Portugal (1436–1467)

Alienor de Portugal (1436–1467)
Regiomontanus, Horoscope (1452)

Tous les mathématiciens de son temps, gagnaient leur vie en établissant des horoscopes pour les puissants. Et à l'époque en Allemagne, il n'y a pas plus puissant que l'empereur du Saint-Empire romain germanique. La réputation de jeune prodige de Regiomontanus lui attire une commande prestigieuse : l'empereur lui demande un thème astral pour sa jeune épouse, Alienor de Portugal. Elle n'a que seize ans, comme Regiomontanus. Écoutez-le.

19 Horoscope d'Alienor de Portugal (1452)

« Vous avez expressement souhaité, seigneur glorieux, que j'établisse l'horoscope d'une très noble princesse à partir de la position des étoiles à l'heure de sa naissance. Vraiment, vous avez posé un lourd fardeau sur mes épaules ; car une telle chose exige des calculs laborieux et étendus, puisqu'il faut naturellement prendre en compte tout ce qui concerne les étoiles, de sorte qu'une telle étude ne pourrait être fournie par un homme expérimenté en peu de jours. »

Les étoiles ont parlé : Alienor vivra 49 ans, elle donnera à l'empereur deux fils et une fille. Le premier né ne vivra pas longtemps, les deux autres n'atteindront pas non plus l'âge adulte. Bon, il faut croire que tout ce qui concerne les étoiles n'a pas été pris en compte, car l'impératrice est morte à trente ans, après avoir eu cinq enfants, dont deux ont atteint l'âge adulte. Que voulez-vous, la précision des calculs astronomiques n'était pas encore ce qu'elle est maintenant.

Horoscope d'Alienor de Portugal (1452)
Johan Müller, dit Regiomontanus (1436–1476)

Vous avez expressement souhaité, seigneur glorieux, que j'établisse l'horoscope d'une très noble princesse à partir de la position des étoiles à l'heure de sa naissance. Vraiment, vous avez posé un lourd fardeau sur mes épaules ; car une telle chose exige des calculs laborieux et étendus, puisqu'il faut naturellement prendre en compte tout ce qui concerne les étoiles, de sorte qu'une telle étude ne pourrait être fournie par un homme expérimenté en peu de jours.

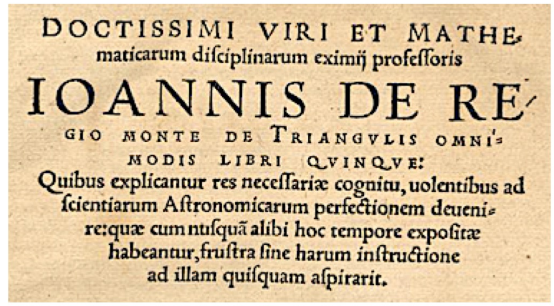
20 Bauernring

Bauernring
Johan Müller, dit Regiomontanus (1436–1476)

L'invention du cadran solaire portatif dit « anneau du paysan » est attribuée à Régiomontanus, mais ce n'est pas certain. Il s'agit de deux anneaux concentriques coulissants. L'anneau central est percé d'un trou qui laisse passer une tache lumineuse permettant de lire l'heure sur une graduation à l'intérieur. Même s'il n'en est pas l'inventeur, Regiomontanus connaissait cet ustensile qui est apparu en son temps, et il en a produit au moins une version perfectionnée.

21 De triangulis omnimodis (1464)

De triangulis omnimodis (1464)
Johan Müller, dit Regiomontanus (1436–1476)

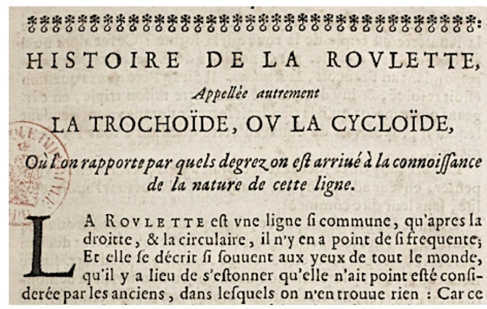

DOCTISSIMI VIRI ET MATHE-
maticarum disciplinarum eximij professoris
IOANNIS DE RE-
GIO MONTE DE TRIANGVLIS OMNI-
MODIS LIBRI QVINQVE:
Quibus explicantur res necessariæ cognitu, uolentibus ad scientiarum Astronomicarum perfectionem deueniere: quæ cum nusquã alibi hoc tempore expositæ habeantur, frustra sine harum instructione ad illam quisquam aspirarit.

Il est aussi le « doctissime » auteur d'un livre sur les triangles de tous les modes, qui selon le sous-titre, « explique toutes les choses qu'il est nécessaire de connaître pour perfectionner les sciences de l'astronomie ». On y retrouve toutes les formules de la trigonométrie arabe, pour les triangles plans aussi bien que sphériques.

Par contre, on n'y trouve aucune représentation de courbe, c'était beaucoup trop tôt. La sinusoïde n'est apparue qu'au dix-septième siècle, et encore, pas du tout sous ce nom là.

22 Histoire de la Roulette (10 octobre 1658)

Histoire de la Roulette (10 octobre 1658)
Blaise Pascal (1623–1662)

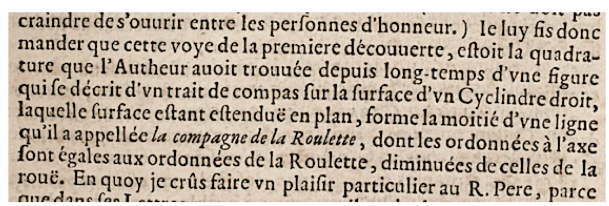

HISTOIRE DE LA ROVLETTE,
Appellée autrement
LA TROCHOÏDE, OV LA CYCLOÏDE,
Où l'on rapporte par quels degrez on est arriué à la connoissance de la nature de cette ligne.
LA ROVLETTE est vne ligne si commune, qu'apres la droitte, & la circulaire, il n'y en a point de si frequente; Et elle se décrit si souuent aux yeux de tout le monde, qu'il y a lieu de s'estonner qu'elle n'ait point esté considerée par les anciens, dans lesquels on n'en trouue rien : Car ce

Elle avait été baptisée par Roberval : « Compagne de la roulette ». Voici pourquoi. La roulette c'est pour nous la cycloïde, la courbe décrite par un point d'un cercle roulant sans glisser sur un plan. Elle a joué un grand rôle dans le développement de l'analyse au dix-septième siècle, et j'ai consacré toute une histoire au défi que Pascal avait lancé en 1658 à son propos.

Dans son « Histoire de la roulette », Pascal raconte que Roberval est le premier à avoir démontré, vers 1634, que la surface sous une arche de cycloïde vaut trois fois la surface du cercle qui l'engendre.

23 la compagne de la roulette

la compagne de la roulette
Pascal, Histoire de la roulette (1658)

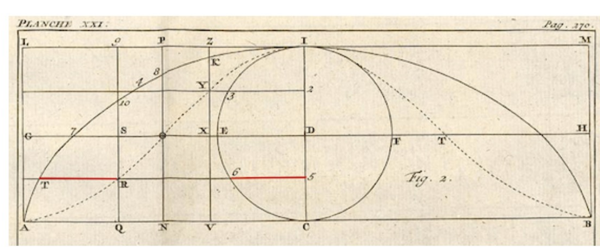

craindre de s'ouurir entre les personnes d'honneur.) Ie luy fis donc mander que cette voye de la premiere découuerte, estoit la quadrature que l'Autheur auoit trouuée depuis long-temps d'vne figure qui se décrit d'vn trait de compas sur la surface d'vn Cylindre droit, laquelle surface estant estenduë en plan, forme la moitié d'vne ligne qu'il a appellée *la compagne de la Roulette*, dont les ordonnées à l'axe sont égales aux ordonnées de la Roulette, diminuées de celles de la rouë. En quoy je crûs faire vn plaisir particulier au R. Pere, parce

« Cette voie de la première découverte, était la quadrature que l'auteur avait trouvée depuis longtemps d'une figure qui se décrit d'un trait de compas sur la surface d'un cylindre droit, laquelle surface étant étendue en plan, forme la moitié d'une ligne qu'il a appelée la *compagne de la Roulette*, dont les ordonnées à l'axe sont égales aux ordonnées de la Roulette, diminuées de celles de la roue. »

Regardez la figure de Roberval lui-même.

24 Quadrature de la roulette (1634)

Quadrature de la roulette (1634)
Gilles Personne de Roberval (1602–1675)



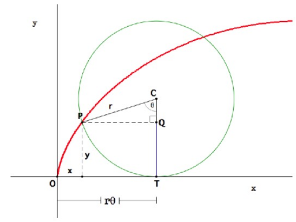
Entre l'arche de cycloïde et le cercle qui est au milieu, vous voyez une courbe tracée en pointillés. C'est cette courbe, que Roberval appelle la compagne de la roulette. Il l'obtient en reportant à partir de la cycloïde, pour chaque ordonnée, un segment horizontal égal à l'intersection avec le demi-cercle : les deux segments rouges sont égaux. La courbe obtenue, est, comme le dit Pascal, la développée d'un cercle tracé sur un cylindre, c'est-à-dire pour nous une sinusoïde.

25 Coordonnées paramétriques de la cycloïde

Il nous est plus facile de comprendre pourquoi, sur une paramétrisation par l'angle de rotation du cercle. Si θ désigne cet angle, et r le rayon du cercle, la distance parcourue par le point de contact sur l'axe des x est $r\theta$. Pour obtenir l'abscisse du point sur la courbe, il faut diminuer $r\theta$ de la distance PQ qui est $r\sin\theta$. L'ordonnée est la longueur du segment TQ, soit $r(1-\cos\theta)$.

Disons pour simplifier que le rayon du cercle r vaut 1. Décomposez l'abscisse en θ d'un côté, $-\sin\theta$ de l'autre. La courbe paramétrique donnée par $x = -\sin\theta$, $y = (1-\cos\theta)$ est le cercle. Il reste la courbe $x = \theta$, $y = (1-\cos(\theta))$, soit $y = (1-\cos x)$. C'est bien une sinusoïde, mais elle ne sera baptisée ainsi que presque un siècle plus tard…

Coordonnées paramétriques de la cycloïde



$$\begin{cases} x = r(\theta - \sin\theta) \\ y = r(1-\cos\theta) \end{cases}$$

26 Bernard Forest de Bélidor (1763–1844)

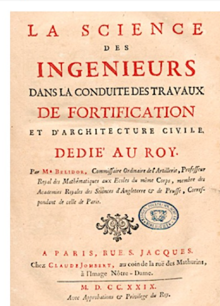
Bernard Forest de Bélidor (1698–1761)

par cet homme, Bernard Forest de Bélidor. C'est un ingénieur militaire, qui enseigne les mathématiques dans une école militaire.

Il est l'auteur de plusieurs livres : « Nouveau cours de mathématiques à l'usage de l'artillerie et du génie », « Architecture hydraulique, ou l'art de conduire, d'élever et de ménager les eaux pour les différents besoins de la vie », « Le bombardier français, ou nouvelle méthode de jeter les bombes avec précision ». Le livre qui nous intéresse est le suivant.

27 La science des ingénieurs (1729)

La science des ingénieurs (1729)
Bernard Forest de Bélidor (1698–1761)



LA SCIENCE
DES
INGENIEURS
DANS LA CONDUITE DES TRAVAUX
DE FORTIFICATION
ET D'ARCHITECTURE CIVILE.
DEDIE' AU ROY.

Par M. Belidor, Commissaire Ordinaire de l'Artillerie, Professeur Royal des Mathématiques aux Ecoles du même Corps, membre des Academies Royales des Sciences d'Angleterre & de Prusse, Correspondant de celle de Paris.

A PARIS, RUE S. JACQUES.
Chez Claude Jombert, au coin de la ruë des Mathurins, à l'Image Nôtre-Dame.
M. D. CC. XXIX.
Avec Approbations & Privilege du Roy.

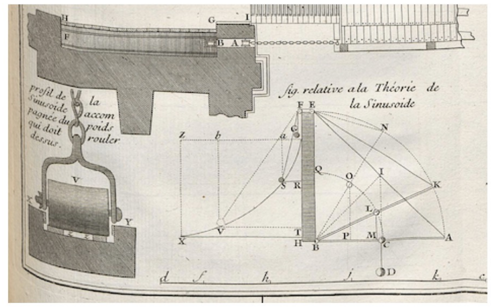
« La science des ingénieurs dans la conduite des travaux de fortification et d'architecture civile ». Six cent pages tout de même.

28 Contrepoids d'un pont-levis

Au milieu de considérations diverses sur la mécanique et les fortifications, Bélidor pose un problème tout simple : comment faire pour qu'un pont-levis soit en équilibre, quel que soit son angle d'inclinaison. Le poids à équilibrer est le poids du pont-levis horizontal, multiplié par le cosinus de l'angle qu'il fait avec l'horizontale. Pour le contrebalancer il suffit de placer un poids équivalent de l'autre côté du mur, sur une courbe telle que la tangente au point atteint quand le pont-levis est incliné de θ, soit proportionnelle au cosinus de θ. Donc l'ordonnée de la courbe sera proportionnelle à la primitive du cosinus, qui est le sinus.

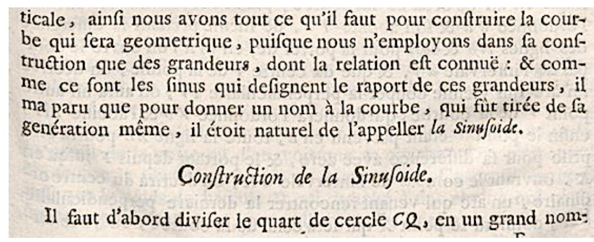
Regardez le titre : « figure relative à la théorie de la sinusoïde ».

Contrepoids d'un pont-levis
Bélidor, La science des ingénieurs (1729)



29 il étoit naturel de l'appeller *la Sinusoide*

il étoit naturel de l'appeller *la Sinusoide*
Bélidor, La science des ingénieurs (1729)


ticale, ainſi nous avons tout ce qu'il faut pour conſtruire la courbe qui ſera geometrique, puiſque nous n'employons dans ſa conſtruction que des grandeurs, dont la relation eſt connuë : & comme ce ſont les ſinus qui deſignent le raport de ces grandeurs, il m'a paru que pour donner un nom à la courbe, qui fût tirée de ſa génération même, il étoit naturel de l'appeller *la Sinuſoide.*

Conſtruction de la Sinuſoide.

Il faut d'abord diviſer le quart de cercle CQ, en un grand nom-

Dans le texte, Bélidor explique longuement le calcul de la courbe, puis il dit : « Nous avons tout ce qu'il faut pour construire la courbe qui sera géométrique, puisque nous n'employons dans sa construction que des grandeurs dont la relation est connue : et comme ce sont les sinus qui désignent le rapport de ces grandeurs, il m'a paru que pour donner un nom à la courbe, qui fût tiré de sa génération même, il était naturel de l'appeler *la sinusoïde.* »

30 Recherches sur la courbe... (1747)

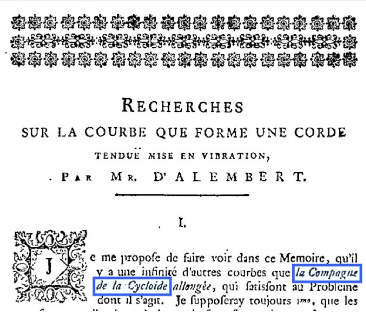
Je vous ai déjà parlé des cordes vibrantes, et de la controverse qu'elles ont suscité entre d'Alembert et Euler sur la nature des fonctions et des solutions d'équations différentielles. Regardez le début de ce mémoire de d'Alembert : « Recherches sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration ». Il date de 1747, soit dix-huit ans après le livre de Bélidor, que d'Alembert n'avait probablement pas lu.

« Je me propose de faire voir dans ce mémoire qu'il y a d'autres courbes que la *Compagne de la Cycloïde allongée*, qui satisfont au problème dont il s'agit. »

Le problème dont il s'agit est l'équation des ondes. Tout le monde sait bien alors, qu'elle admet pour solution les fonctions sinus, avec une fréquence multiple de la fréquence de base. Mais d'Alembert s'exprime en termes de courbes, et pour lui, ce que nous appelons la fonction sinus est encore une courbe, la compagne de la cycloïde.

Au point qu'on peut se demander d'ailleurs comment le terme de sinusoïde a fini par s'imposer.

Recherches sur la courbe... (1747)
Jean Le Rond d'Alembert (1717–1783)


RECHERCHES
SUR LA COURBE QUE FORME UNE CORDE
TENDUË MISE EN VIBRATION,
PAR MR. D'ALEMBERT.

I.

Je me propoſe de faire voir dans ce Memoire, qu'il y a une infinité d'autres courbes que *la Compagne de la Cycloïde allongée*, qui ſatisfont au Problème dont il s'agit. Je ſuppoſeray toujours 1^{mo}, que les

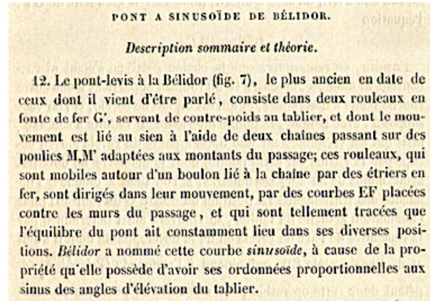
31 Pont à sinusoïde de Bélidor

Jean-Victor Poncelet, vous vous souvenez ? La géométrie projective, la retraite de Russie ? Ah ça vous revient ! Eh bien en tant que professeur de mécanique industrielle, il a écrit entre autres un « Traité de la construction des ponts-levis ».

« Le pont-levis à la Bélidor, consiste dans deux rouleaux en fonte, servant de contre-poids au tablier. Ces rouleaux, sont dirigés dans leur mouvement par des courbes placées contre les murs du passage, et qui sont tellement tracées que l'équilibre du pont ait constamment lieu dans ses diverses positions. Bélidor a nommé cette courbe sinusoïde, à cause de la propriété qu'elle possède d'avoir ses ordonnées proportionnelles aux sinus des angles d'élévation du tablier. »

Pont à sinusoïde de Bélidor

Jean-Victor Poncelet, Traité de la construction des pont-levis (1845)



PONT A SINUSOÏDE DE BÉLIDOR.

Description sommaire et théorie.

12. Le pont-levis à la Bélidor (fig. 7), le plus ancien en date de ceux dont il vient d'être parlé, consiste dans deux rouleaux en fonte de fer G', servant de contre-poids au tablier, et dont le mouvement est lié au sien à l'aide de deux chaînes passant sur des poulies M,M' adaptées aux montants du passage; ces rouleaux, qui sont mobiles autour d'un boulon lié à la chaîne par des étriers en fer, sont dirigés dans leur mouvement, par des courbes EF placées contre les murs du passage, et qui sont tellement tracées que l'équilibre du pont ait constamment lieu dans ses diverses positions. *Bélidor* a nommé cette courbe *sinusoïde*, à cause de la propriété qu'elle possède d'avoir ses ordonnées proportionnelles aux sinus des angles d'élévation du tablier.

32 références

Ah ! Il en aura fallu des tours et des détours pour en arriver aux fonctions trigonométriques telles que nous les pratiquons. En même temps, elle en fait bien, des tours et des détours, la sinusoïde. C'est même sa caractéristique principale. D'ailleurs si je vous racontais à nouveau son histoire, ça donnerait une bonne idée de sa périodicité. Non, c'est n'importe quoi, je vais plutôt arrêter.

références

- A. Djebbar (2004) La phase arabe de l'histoire de la trigonométrie, *in É. Hébert ed. Instruments scientifiques à travers l'histoire*, Paris : Ellipses, 415–434
- J.-P. Le Goff (2008) La sinusoïde n'est pas celle que vous croyez, *Le Miroir des Maths*, Caen : IREM, n^os 2–5
- R. Nadal, A. Taha, P. Pinel (2004) Le contenu astronomique des Sphériques de Ménélaos, *Archive for History of Exact Sciences*, 58(5), 381–437
- R. Rashed (2006) *Les mathématiques infinitésimales du IX^e au XI^e siècle Volume* V, London : Al-Furqān Islamic Heritage Foundation
- G. van Brummelen (2013) *Heavenly mathematics : the forgotten art of spherical trigonometry*, Princeton : University Press
- E. Zinner (1990) *Regiomontanus : his life and work*, Amsterdam : North-Holland