Une histoire de mathématiques à écouter sur

hist-math.fr

0 Le comput pascal

Je vous ai eu dit que, mathématiquement parlant, il ne s'était pas passé grand-chose en Europe entre Boèce au cinquième siècle et les traductions arabes au douzième. C'est vrai à une exception près : le comput, c'est-à-dire le calcul de la date de Pâques. Pourquoi était-ce aussi important, et quelle place le comput a-t-il dans l'histoire des mathématiques ? C'est ce que nous allons voir.

histoires d'astronomie

Le comput pascal

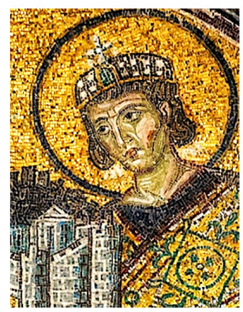
congruences et calendriers

hist-math.fr Bernard Ycart

1 Constantin I^{er} (272–337)

Le christianisme est devenu religion officielle, avec l'empereur Constantin premier, au début du quatrième siècle. Oui, enfin ça c'est le résumé hagiographique, outrageusement simplifié. Constantin a bien unifié politiquement l'empire romain, à qui il a donné une nouvelle capitale, Constantinople. Dans cet empire, les religions ont continué à cohabiter, religions parmi lesquelles le christianisme restait minoritaire. Mais qu'importe : Constantin avait bien compris que pour maintenir la stabilité de l'empire, il fallait réaliser l'unité du christianisme, menacée par des interprétations et des pratiques différentes.

Constantin I^{er} (272–337)

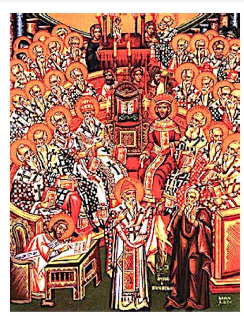


2 Concile de Nicée (mai–juillet 325)

En 325, alors qu'il n'a aucune fonction officielle dans l'église, dont il n'est même pas membre officiellement, il convoque un concile à Nicée en Turquie, où il réunit des centaines d'évêques pour supprimer deux sources de dissensions, l'arianisme et la date de Pâques. Pour l'arianisme, demandez à Google, je n'ai pas bien compris. Pour la date de Pâques, l'enjeu était de bien différencier aux yeux des païens, le christianisme du judaïsme. Or une partie des Chrétiens, en particulier en Asie mineure, fêtaient la Pâques chrétienne en même temps que la Pâques juive. Le risque de confusion était d'autant plus grand que si la date était la même, l'objet religieux lui, était totalement différent. Les Juifs fêtaient l'Exode hors d'Égypte, tandis que les Chrétiens célébraient la mort du Christ, ou sa résurrection c'est selon.

Écoutez Constantin. Il s'adresse aux évêques après le concile, pour bien imprimer son message.

Concile de Nicée (mai–juillet 325)
Constantin I^{er} (272–337)



3 Célébration de la fête de Pâques

« Que pouvons-nous faire de plus conforme à la bienséance, et à l'honnêteté, que d'observer tous de la même sorte, cette fête, où nous avons tous reçu l'espérance de l'immortalité ? On a jugé que cela aurait été une pratique indigne de la sainteté de l'Église, de la solenniser selon la coutume des Juifs, qui ont les mains souillées, et l'esprit aveuglé par leurs crimes. [. . .] Ils sont si éloignés en ce point là-même de la vérité, qu'il arrive souvent, qu'ils célèbrent deux fois la fête de Pâques dans la même année. »

L'important était donc surtout de se démarquer des Juifs. Pourquoi leur arrivait-il de fêter Pâques, ou plutôt Pessah, deux fois dans la même année ? Parce que la date officielle est le 14 du mois de Nissan dans le calendrier hébraïque. Or c'est un calendrier lunisolaire. Une année fait douze mois lunaires, soit 354 jours. Il en manque 11, d'où l'ajout certaines années, de mois complémentaires. Ajoutez à cela que le 14 Nissan peut tomber n'importe quel jour de la semaine, et pas forcément un dimanche, le jour du Seigneur pour les Chrétiens.

Célébration de la fête de Pâques

Constantin I[er], Concile de Nicée (325)

Que pouvons-nous faire de plus conforme à la bienséance, et à l'honnêteté, que d'observer tous de la même sorte, cette fête, où nous avons tous reçu l'espérance de l'immortalité ? On a jugé que cela aurait été une pratique indigne de la sainteté de l'Église, de la solenniser selon la coutume des Juifs, qui ont les mains souillées, et l'esprit aveuglé par leurs crimes. [. . .] Ils sont si éloignés en ce point là-même de la vérité, qu'il arrive souvent, qu'ils célèbrent deux fois la fête de Pâques dans la même année.

4 La date de Pâques

Ni Constantin, ni le concile de Nicée n'ont défini explicitement la date de Pâques. Il se peut que ce soit la pratique de l'église d'Alexandrie, antérieure au concile, qui se soit progressivement imposée. Le prestige des astronomes d'Alexandrie y a peut-être aidé, mais il aura fallu un bon nombre de siècles pour que la date de Pâques soit la même dans toute la chrétienté.

Bref, la définition qui a prévalu jusqu'à nos jours est « le dimanche qui suit le quatorzième jour de la Lune qui atteint cet âge à l'équinoxe de printemps ou après ». Prenez la première pleine lune après le 21 mars, et le premier dimanche qui la suit : selon les années cela peut tomber entre le 22 mars et le 25 avril. Cette définition relie symboliquement trois cycles, solaire, lunaire, et hebdomadaire. Déjà, cela ne facilite pas la prévision. Vous pensez peut-être qu'un peu d'astronomie devrait permettre de savoir la date de la pleine lune qui suit l'équinoxe de printemps. Mais non, ce serait trop simple. Aussi bien la définition de l'équinoxe que celle des mois lunaires, sont des conventions plutôt que des prévisions astronomiques.

La date de Pâques

Dimanche, après la pleine lune, après l'équinoxe de printemps

5 Calendrier Julien (45 av. J.-C.)

À partir de 45 avant Jésus-Christ, le calendrier Julien est en vigueur : 365 jours et un de plus tous les quatre ans. C'est légèrement trop, mais on ne s'en inquiétera que bien plus tard. La lune aussi est conventionnelle. Les dates de début de chaque nouvelle lune sont calculées de sorte que 235 lunaisons coïncident exactement avec 19 années : c'est le cycle métonique.

Calendrier Julien (45 av. J.-C.)

Jules César (100–44 av. J.-C.)

6 Comput Écclésiastique

La date de Pâques est le résultat d'une suite de calculs arithmétiques de congruence. Il y a cinq cycles, qui sont représentés par cinq roues dans l'horloge astronomique de la cathédrale de Strasbourg. De gauche à droite et de haut en bas, vous voyez le cycle solaire, le nombre d'or, l'indiction, l'épacte, la lettre dominicale.

Le cycle solaire est le rang d'une année dans un cycle de 28 ans ; 28 c'est 7 fois 4 : dans le calendrier julien, les jours de la semaine se retrouvent aux mêmes dates au bout de 28 ans.

Le nombre d'or est le rang d'une année dans le cycle métonique de 19 ans. Cela n'a rien à voir avec le nombre d'or « un demi de un plus racine de cinq » qui est beaucoup plus connu.

L'indiction est le vestige d'un cycle romain, modulo 15 celui-là.

L'épacte indique l'âge de la lune ecclésiastique au premier janvier, en convenant de désigner par 0 son âge le jour où elle est nouvelle. De la valeur de l'épacte, on déduit la date de la pleine lune qui survient le 21 mars ou immédiatement après. Puis par la lettre dominicale on obtient la date du dimanche suivant.

Pour la lettre dominicale, on fait correspondre les sept premières lettres à chacun des jours, en commençant par A pour le premier janvier, puis en répétant le cycle tous les 7 jours. La lettre dominicale de l'année est celle qui correspond aux dimanches.

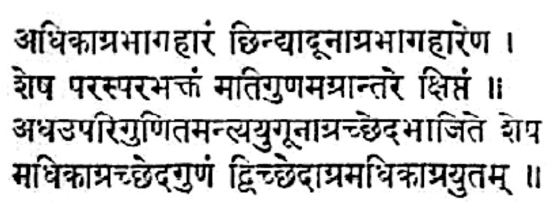
N'ayez pas peur, nous n'allons pas détailler le calcul de la date de Pâques cette année. Nous cherchons juste à savoir quelle était la perception qu'avaient les computistes des différentes congruences, modulo 7, 19 ou 28.

Comput Écclésiastique
Horloge astronomique de la cathédrale de Strasbourg (1816)

7 Kuṭṭaka (Pulvérisateur)

N'imaginez pas pour autant des problèmes compliqués de coïncidence entre planètes comme pour l'astronomie indienne, et des calculs à base de pulvérisateur, c'est-à-dire d'algorithme d'Euclide et d'identité de Bézout. Contrairement aux Indiens, les calculs étaient limités à la seule question de la date de Pâques, et ils se faisaient en général grâce à des tables croisant les différents cycles.

Kuṭṭaka (Pulvérisateur)
Āryabhaṭīya (499)


अधिकाग्रभागहारं छिन्द्यादूनाग्रभागहारेण ।
शेष परस्परभक्तं मतिगुणमग्रान्तरे क्षिप्तं ॥
अधउपरिगुणितमन्त्ययुगूनाग्रच्छेदभाजिते शेष ।
मधिकाग्रच्छेदगुणं द्विच्छेदाग्रमधिकाग्रयुतम् ॥

8 Bède le Vénérable (672–735)

Le computiste le plus influent a été Bède le Vénérable, un moine anglo-saxon, considéré comme le plus grand savant de son temps. Il est surtout connu comme poète, historien et théologien. Deux de ses écrits, « De temporibus » et « De temporibus ratione » portent sur la chronologie, et les calendriers. Ils contiennent un peu d'astronomie et l'explication du comput. Pour vous donner une idée des mathématiques, je vais vous lire trois extraits, illustrés par des tables tirées d'un manuscrit du dixième siècle.

Bède le Vénérable (672–735)
De temporibus ratione (725)

9 l'épacte d'une année donnée

« Si tu veux connaître ce qu'est l'épacte d'une année donnée, prends le nombre d'années du Seigneur, par exemple dans la présente huitième indiction, 725. Divise par 19 : 19 fois 30 fait 570 et 19 fois 8 est 152, avec un reste de 3. Multiplie ce reste par 11, cela fait 33. Soustrais 30, et le reste est 3. L'épacte, c'est-à-dire l'incrément lunaire, fait 3. »

Bède ne donne que des recettes sous forme d'exemples très simples. Même la division euclidienne de 725 par 19 est décomposée. Il est conscient de la notion de multiple commun.

l'épacte d'une année donnée
Bède, De temporibus ratione (725)

10 28 cycles de 19 ans

« Prends bien note du fait que, à cause du cycle solaire, qui court sur 28 ans, il est nécessaire que 28 cycles de 19 ans s'écoulent avant que la suite d'observations de Pâques se répète à l'identique. [. . .] Donc la suite entière de dates pascales s'achèvera au bout de 532 ans. »

Vous l'aurez compris, même si les calculs accumulés finissent par atteindre un certain niveau de complexité, les mathématiques restent au niveau de la division euclidienne et de la multiplication d'entiers. Plus que sur le raisonnement, le savoir-faire des computistes repose sur les tables comme celle que vous voyez, et sur la mémorisation. Comme le dit Bède : « Le computiste avisé doit mémoriser les quatorzièmes jours des lunes du premier mois, de même qu'il mémorise les épactes annuelles. »

Tout de même, Bède signale un autre outil.

28 cycles de 19 ans
Bède, De temporibus ratione (725)

11 la main humaine a 19 jointures

« Il semble utile de rappeler que certains, afin de simplifier les calculs, ont transféré les deux cycles, lunaire et solaire, sur les jointures des doigts. Du fait que la main humaine a 19 jointures si on y ajoute le bout des doigts, en appliquant chaque année sur une de ces jointures, ils commencent le cycle lunaire à l'intérieur de la main gauche, à la base du pouce, et le terminent à la pointe du petit doigt. »

L'illustration que vous voyez est tirée d'un manuscrit de la BNF datant du quinzième siècle. Il faut dire qu'entre Bède au huitième siècle et la Renaissance, les techniques de comput ont été fidèlement reproduites de manuscrit en manuscrit. On les retrouve dans les livres d'astrologie bien sûr, mais aussi dans les éphémérides.

la main humaine a 19 jointures
Bède, De temporibus ratione (725)

12 Le Kalendrier des Bergiers (1493)

Le Kalendrier des Bergiers (1493)
BNF, Vélins 518 In-folio

Voici le « Calendrier des Bergers » pour l'année 1493. C'est un livre très richement enluminé qui a eu un grand succès. Sur l'illustration du prologue, l'auteur s'est représenté. Les premières lignes au-dessous de l'image disent : « Prologue de l'auteur qui a mis le compost et calendriers des bergers en forme, comme s'il était un berger gardant ses brebis aux champs qui ne serait pas clerc et n'aurait aucune connaissance des écritures, mais qui parlerait seulement par son sens naturel et son entendement. »

13 Icy parle le bergier

Icy parle le bergier
Le Kalendrier des Bergiers (1493)

Et de filer la métaphore en se représentant en berger, jouant de la cornemuse au bénéfice de ses aides et de ses chiens. « Ici parle le berger par un prologue contenant la division de son compost et calendrier. »

14 Figure perpetuelle pour trouuer pasques

Ce que l'auteur désigne par « compost » est bien le comput mis au point longtemps auparavant par des religieux comme Bède le Vénérable. La présentation est très simplifiée et mise sous forme de tables, facilement lisibles, permettant de trouver directement le nombre d'or et la lettre dominicale pour une année donnée.

Vient ensuite la table que vous voyez. Son titre est « figure perpétuelle pour trouver Pâques et les autres fêtes mobiles qui veut ». En bas, un autre texte précise : « sur la lettre dominicale prochaine sous le nombre d'or qui court, est le jour de Pâques pour l'an du nombre d'or. Deux symboles signifient Mars ou Avril, le nombre d'après les lettres est le quantième jour du mois. Ayant trouvé cela, on peut facilement savoir les autres fêtes mobiles. » C'est-à-dire le Carême, l'Ascension et la Pentecôte.

Figure perpetuelle pour trouuer pasques
Le Kalendrier des Bergiers (1493)

15 chauderons et chaudieres pleines de huiles boullians

L'astronomie et le comput ne sont pas les seuls objectifs. Est aussi fournie une longue description des péchés à éviter, et pour bien enfoncer le clou, Lazare ressuscité décrit longuement les tortures auxquelles il a vu les pécheurs exposés en enfer.

« Cinquièmement, dit Lazare, j'ai vu des chaudrons et chaudières pleines d'huile bouillante et de plomb et autres métaux fondus dans lesquels étaient plongés les avaricieux et avaricieuses jusqu'à la gorge. »

Curieusement aucune mesure du même ordre n'est prévue contre ceux qui n'auraient pas bien assimilé le comput.

chauderons et chaudieres pleines de huiles boullians
Le Kalendrier des Bergiers (1493)

16 Calendrier grégorien (1582)

Et c'est fort heureux, car le calcul de la date de Pâques allait se compliquer encore un siècle plus tard avec la réforme du calendrier. Certes, elle était devenue nécessaire. À force d'accumuler les années bissextiles depuis Jules César, le calendrier ecclésiastique avait fini par prendre dix jours de retard sur l'astronomie. La réforme avait pour but d'une part de corriger ce retard, d'autre part d'éviter les erreurs futures.

C'est ainsi qu'il n'y avait eu qu'une seule nuit entre le 4 et le 15 octobre 1582. La seconde mesure demandait que toutes les années multiples de quatre soient bissextiles, sauf les multiples de cent, mais en incluant les multiples de 400. Fort bien, mais le cycle de 28 ans au bout duquel les jours se reproduisent à l'identique n'était plus valable qu'à l'intérieur d'un siècle donné.

Calendrier grégorien (1582)
Grégoire XIII (1502–1585)

17 Christophorus Clavius (1538-1612)

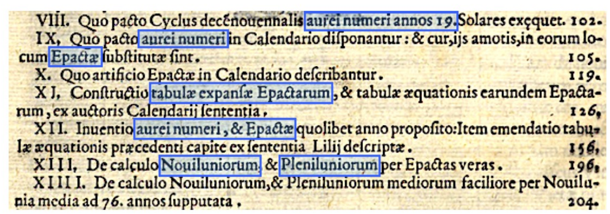
Christophorus Clavius (1538-1612)
Orbansall, collège jésuite d'Ingolstadt

Le concepteur initial de la réforme est un astronome italien, Aloysius Lilius. Mais celui qui l'a portée, puis défendue contre les nombreuses critiques, est un Jésuite allemand dont je vous parle assez souvent : Christophorus Clavius. Autant Lilius que Clavius savaient bien qu'il n'était pas pensable de proposer une réforme du calendrier, sans préciser comment calculer la date de Pâques dans la nouvelle version.

18 Romani calendarii explicatio (1603)

Clavius expliquera et défendra la réforme sans relâche, jusqu'à sa mort. Ses écrits sur le sujet comptent plusieurs milliers de pages. Dans cette « Explication du calendrier romain », il en consacre plusieurs centaines au calcul de la date de Pâques. Clairement, son but n'est pas d'innover. Au contraire, comme l'avait fait Lilius avant lui, il reprend les notions classiques de cycle métonique, nombre d'or, épacte et lettre dominicale, pour examiner pas par pas ce qui change dans le nouveau calendrier.

Romani calendarii explicatio (1603)
Christophorus Clavius (1538-1612)

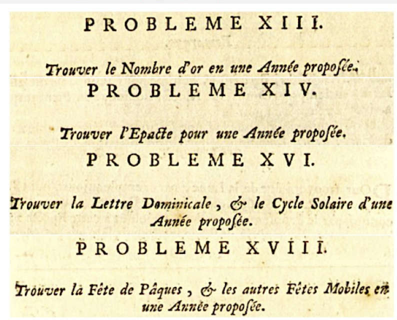


VIII. Quo pacto Cyclus decenouennalis aurei numeri annos 19. Solares exæquet. 102.
IX. Quo pacto aurei numeri in Calendario diſponantur : & cur, ijs amotis, in eorum locum Epactæ ſubſtitutæ ſint. 105.
X. Quo artificio Epactæ in Calendario deſcribantur. 119.
XI. Constructio tabulæ expanſæ Epactarum, & tabulæ æquationis earundem Epactarum, ex auctoris Calendarij ſententia. 126.
XII. Inuentio aurei numeri, & Epactæ quolibet anno propoſito: Item emendatio tabulæ æquationis præcedenti capite ex ſententia Lilij deſcriptæ. 156.
XIII. De calculo Nouiluniorum, & Pleniluniorum per Epactas veras. 196.
XIIII. De calculo Nouiluniorum, & Pleniluniorum mediorum faciliore per Nouilunia media ad 76. annos ſupputata. 204.

Pour autant, je ne vous recommande pas de lire les détails donnés à profusion par Clavius. Si vous voulez vraiment comprendre le comput à l'ancienne, je vous conseille plutôt les « Récréations Mathématiques et Physiques » de Jacques Ozanam.

19 Problèmes de Cosmographie

Problèmes de Cosmographie
Ozanam, Récréations Mathématiques et Physiques (1696)



PROBLEME XIII.
Trouver le Nombre d'or en une Année propoſée.
PROBLEME XIV.
Trouver l'Epacte pour une Année propoſée.
PROBLEME XVI.
Trouver la Lettre Dominicale, & le Cycle Solaire d'une Année propoſée.
PROBLEME XVIII.
Trouver la Fête de Pâques, & les autres Fêtes Mobiles en une Année propoſée.

Au chapitre « Cosmographie », le comput est détaillé en petits problèmes divertissants... enfin, du moins selon Ozanam. Vous voyez ici les principaux. Trouver le nombre d'or, trouver l'épacte, puis la lettre dominicale et le cycle solaire, enfin trouver la fête de Pâques. Essentiellement, la dernière étape consiste à rechercher la date de Pâques dans une table à double entrée contenant des lettres dominicales en lignes et des épactes en colonne.

En clair, rien n'avait vraiment changé depuis Bède le Vénérable et Clavius.

20 Carl Friedrich Gauss (1777–1855)

La révolution allait venir, une fois de plus, de Gauss. Nous sommes au printemps 1800 : Gauss a 23 ans, ses Disquisitiones Arithmeticae sont terminées, mais pas encore publiées. Elles contiennent l'essentiel de ses trouvailles sur les résidus, et vont fonder l'arithmétique moderne. Il est fin prêt, pour n'importe quel problème de congruence.

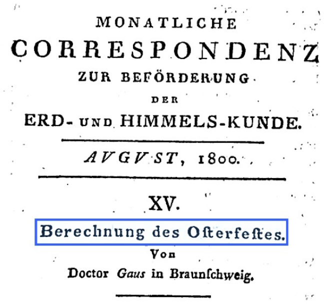
Pourquoi s'intéresse-t-il à la date de Pâques ? Selon lui, sa mère ne connaissait pas sa date de naissance. Elle savait seulement que c'était un mercredi, huit jours avant l'Ascension. Déterminer quel était le jour de l'Ascension en 1777 ne requiert pas forcément de mettre à bas quinze siècles de pratique computiste. Mais que voulez-vous, c'était Gauss.

Le tout est qu'à la date du 16 mai 1800, il note dans son journal : « Nous avons fort élégamment résolu le problème de la chronologie de la fête de Pâques. »

Carl Friedrich Gauss (1777–1855)
Portrait en 1803

21 Berechnung des Osterfest (1800)

Berechnung des Osterfest (1800)
Carl Friedrich Gauss (1777–1855)



MONATLICHE
CORRESPONDENZ
ZUR BEFÖRDERUNG
DER
ERD- UND HIMMELS-KUNDE.
AVGVST, 1800.
XV.
Berechnung des Osterfestes.
Von
Doctor Gaus in Braunschweig.

L'article est paru en août de la même année dans ce mensuel d'astronomie. Il expose une méthode très simple, beaucoup plus rapide que tout ce qui était connu jusqu'alors. Malheureusement, elle n'était pas tout à fait complète. Gauss lui-même y reviendra deux ans plus tard, et bien d'autres après lui.

22 Jean-Baptiste Joseph Delambre (1749–1822)

Je ne vais pas vous raconter toute la suite. Une fois la méthode de Gauss comprise, elle a été optimisée, détaillée, modifiée, démontrée. Mais sur le fond, c'est bien de Gauss que venait la percée décisive.

Jean-Baptiste Delambre est l'un des deux héros de l'épopée du mètre. Il est l'auteur d'un monumental traité d'astronomie, dont le tome trois paraît en 1814. Il y ajoute un chapitre 38 intitulé : « Du calendrier » Vers la fin, il annonce : « Nous terminerons ce chapitre par deux méthodes différentes, pour trouver le jour de Pâques pour une année quelconque. » En fait ce sont deux variantes de la formule de Gauss. Voici la première.

Jean-Baptiste Joseph Delambre (1749–1822)
Astronomie théorique et pratique, Tome 3 (1814)

23 Vous aurez pour le jour de Pâques…

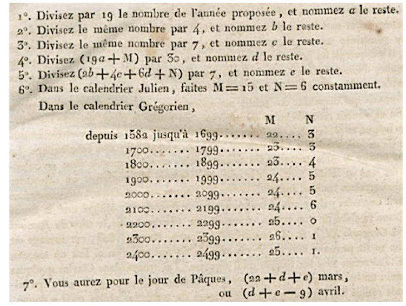
Disons que x est le millésime courant : $x = 2020$ au moment où je vous parle. Définissez $a = x$ modulo 19, $b = x$ modulo 4, $c = x$ modulo 7. Ensuite, vous allez utiliser deux nombres notés M et N qui sont tabulés en dessous : de 2000 à 2099 ils valent 24 et 5. Soit $d = 19a + M$ modulo 30, puis $e = 2b + 4c + 6d + N$ modulo 7. Eh bien Pâques tombera soit le $22 + d + e$ mars, soit le $d + e - 9$ avril : magique non ?

Delambre s'exclame : « Ce peu de lignes de M. Gauss remplacerait le gros volume de Clavius, si l'auteur y avait ajouté la manière de continuer la table des M et des N, qu'il n'a étendue que jusqu'à 2499 ». Moui, mettons.

Reste qu'après Gauss, il n'y a plus besoin de connaître l'épacte, ni la lettre dominicale. Simplement, calculez ceci, ceci et encore cela, si telle chose alors telle conclusion, sinon, telle autre. Mais dites voir, ne serait-ce pas un algorithme par hasard ? Eh bien oui, même si Gauss aussi bien que Delambre n'emploient pas le mot algorithme, auquel ils préfèrent « méthode ». Les informaticiens du vingtième siècle ne s'y sont pas trompés.

Vous aurez pour le jour de Pâques…

Delambre, Astronomie théorique et pratique, Tome 3 (1814)



1°. Divisez par 19 le nombre de l'année proposée, et nommez a le reste.
2°. Divisez le même nombre par 4, et nommez b le reste.
3°. Divisez le même nombre par 7, et nommez c le reste.
4°. Divisez $(19a + \mathrm{M})$ par 30, et nommez d le reste.
5°. Divisez $(2b + 4c + 6d + \mathrm{N})$ par 7, et nommez e le reste.
6°. Dans le calendrier Julien, faites $\mathrm{M} = 15$ et $\mathrm{N} = 6$ constamment.

Dans le calendrier Grégorien,

		M	N
depuis 1582 jusqu'à	1699	22	3
1700	1799	23	3
1800	1899	23	4
1900	1999	24	5
2000	2099	24	5
2100	2199	24	6
2200	2299	25	0
2300	2399	26	1
2400	2499	25	1.

7°. Vous aurez pour le jour de Pâques, $(22 + d + e)$ mars,
ou $(d + e - 9)$ avril.

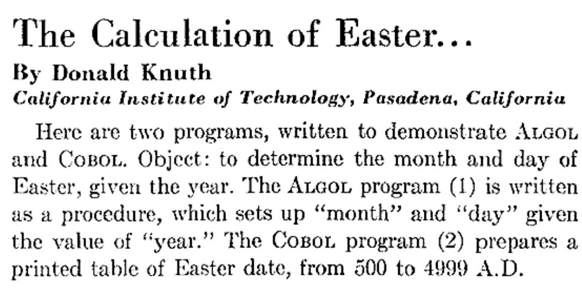
24 The calculation of Easter (1962)

Regardez le début de cet article : « Le calcul de Pâques. » Il est signé Donald Knuth, en 1962.

« Voici, dit-il, deux programmes écrits pour illustrer Algol et Cobol. Le programme Algol prend en entrée une année et retourne le mois et le jour de Pâques de cette année, le programme Cobol prépare une table de dates de Pâques, de 500 à 4999 après Jésus-Christ. »

The calculation of Easter (1962)

Donald E. Knuth



The Calculation of Easter…

By Donald Knuth

California Institute of Technology, Pasadena, California

Here are two programs, written to demonstrate ALGOL and COBOL. Object: to determine the month and day of Easter, given the year. The ALGOL program (1) is written as a procedure, which sets up "month" and "day" given the value of "year." The COBOL program (2) prepares a printed table of Easter date, from 500 to 4999 A.D.

…

25 références

Ah, dommage ! Moi qui avais précisément besoin de la date de Pâques en 5432 ! Dites vous ne voudriez pas me la calculer vite fait, c'est une question de vie ou de mort… Allez, soyez sympa : vous aurez droit à un œuf décoré !

références

- F. Daunoy (1925) La question pascale au concile de Nicée, *Échos d'Orient*, 24(140), 424–444
- P. Grosjean (1962) La date de Pâques et le concile de Nicée, *Ciel et Terre*, 78, 20–30
- D. Knuth (1962) The calculation of Easter, *Communications of the ACM*, 5(4), 209–210
- A. A. Mosshammer (2008) *The Easter computus and the origin of the Christian era*, Oxford : University Press
- P. E. Nothaft (2018) *Scandalous error ; Calendar reforms and calendrical astronomy in Medieval Europe*, Oxford : University Press
- F. Wallis (trad.) (1999) *Bede : the reckoning of time*, Liverpool : University Press