Une histoire de mathématiques à écouter sur

hist-math.fr

0 La légende de Sissa

Mais si, vous le connaissez ce gag ! Un grain de blé sur la première case d'un échiquier, et puis on double à chaque case.

1 Page d'écriture

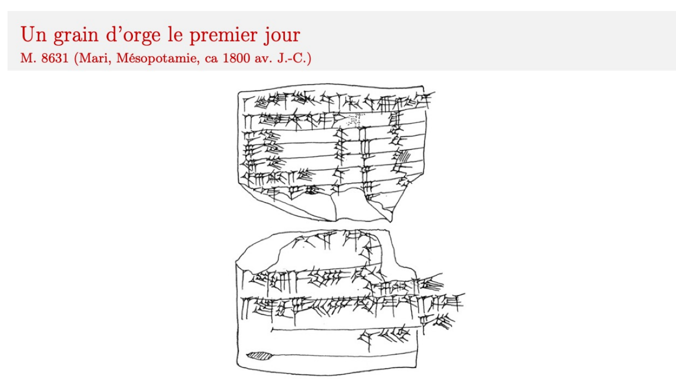
Deux et deux quatre
Quatre et quatre huit
Huit et huit font seize
Et seize et seize qu'est-ce qu'ils font ?
Ils ne font rien seize et seize
Et surtout pas trente-deux, de toute façon

Seize et seize ne peuvent rien contre l'oiseau-lyre de Prévert. D'où vient cette drôle de table d'addition ? De loin, de très loin.

2 Un grain d'orge le premier jour

Au moins de Mari, au nord-ouest de la Mésopotamie, à peu près au temps d'Hammurabi.

Le recto de cette tablette explique : « J'ai ajouté un grain d'orge à un autre le premier jour, 4 grains d'orge le second jour, 8 le troisième jour, etc. »



3 30 doublements successifs

30 doublements successifs

M8631 (Mari, Mésopotamie, ca 1800 av. J.-C.)

Le verso de la tablette donne le poids des grains par jour jusqu'à 30 jours, donc des quantités impressionnantes.

Un cas isolé cette tablette ? Pas du tout ! Le problème du doublement court dans toutes les civilisations qui se sont occupées de mathématiques.

talents	mines	shekels	grains	jour
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1 43	33 2/3	7	4	26
3 27	7 1/2	4	8	27
6 54	15	8	16	28
13 48	30	16 1/6	2	29
27.37	1/2	2 1/3	4	30

4 Suàn Shù Shū

Suàn Shù Shū

Livre sur les nombres et le calcul (ca 200 av. J.-C.)

Le Suan Shu Shu est le plus ancien livre chinois de mathématiques qui nous soit parvenu. Il a été découvert récemment dans la tombe d'un fonctionnaire du second siècle avant notre ère. Vous imaginez, vous faire enterrer avec un livre de maths ? Peu importe. Voici un des exercices qu'on y trouve.

5 Une femme douée pour tisser

Une femme douée pour tisser

Suàn Shù Shū (200 av. J.-C.)

Dans un village voisin vit une femme douée pour tisser. Elle double sa production chaque jour. Tout en tissant elle dit : « le cinquième jour, j'avais tissé cinq chí ».

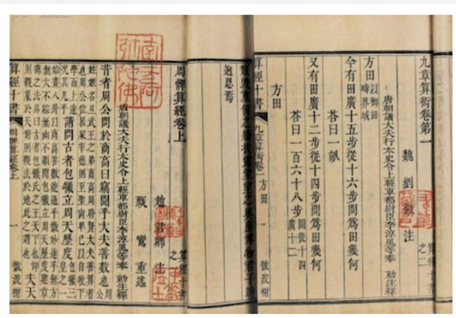
On demande quelle était la production de chaque jour.

Dans un village voisin vit une femme douée pour tisser. Elle double sa production chaque jour. Tout en tissant elle dit : « le cinquième jour, j'avais tissé cinq chí ».

6 Jiushang suanshu

Jiushang suanshu

Les neuf chapitres sur les procédures mathématiques (ca 100)



Les « neuf chapitres » sont le livre chinois le plus célèbre, souvent et longuement commenté au fil des siècles. On y retrouve la dame douée pour tisser. On y trouve aussi des souris voraces.

7 deux souris voraces

Supposons que l'on ait un muret de 5 chí d'épaisseur, que deux souris creusent de part et d'autre. La grande souris creuse le premier jour 1 chí, la petite souris également. Tandis que la grande creuse chaque jour deux fois plus que la veille, la petite creuse moitié moins. On demande au bout de combien de jours elles se rencontrent et combien elles auront respectivement creusé.

Les problèmes de doublement ont traversé les siècles, jusqu'au temps de Charlemagne.

deux souris voraces
Jiushang suanshu (ca 100)

Supposons que l'on ait un muret de 5 chí d'épaisseur, que deux souris creusent de part et d'autre. La grande souris creuse le premier jour 1 chí, la petite souris également. Tandis que la grande creuse chaque jour deux fois plus que la veille, la petite creuse moitié moins. On demande au bout de combien de jours elles se rencontrent et combien elles auront respectivement creusé.

8 Alcuin (735–804)

Celui qui était chargé de la culture et de l'éducation s'appelait Alcuin. C'est le personnage du milieu sur cette image. C'était un clerc anglais que Charlemagne avait attiré à sa cour. Il a écrit un petit recueil de 56 exercices amusants ; l'ancêtre des récréations mathématiques.

Son titre : les « Propositions pour affûter les jeunes » : « De acuendo juvenes ».

Alcuin (735–804)

9 Propositio XIII : de rege

« Il était une fois un roi qui ordonna à un serviteur d'aller dans les 30 villes du royaume et de recruter des soldats de façon que son armée ait plus d'hommes que jamais. À la première ville, le serviteur y va seul. À la deuxième, il est accompagné d'un autre. À la troisième, trois autres sont venus avec lui. Qui peut dire combien d'hommes furent recrutés dans les 30 villes ? »

Voici la solution que donne Alcuin. J'ai tout laissé en latin, pour voir ce que donnent les puissances de deux en chiffres romains.

Propositio XIII : de rege
Alcuin, Propositiones ad acuendos juvenes (ca 794)

Quidam rex jussit famulo suo colligere de XXX villis exercitum, eo modo ut ex uquaque villa tot homines sumeret quotquot illuc adduxisset. Ipse tamen as villam primam solus venit ; ad secundam cum altero ; jam ad tertiam tres venerunt.

Dicat, qui potest, quot homines fuissent collecti de XXX villis.

10 Solutio

« En partant de la première ville, ils étaient 2, de la deuxième 4, de la troisième 8, de la quatrième 16, etc. » Comme vous le constatez, Alcuin ne dépasse pas deux puissance 15 qui fait 32 768. Dans les 30 villes, le roi aurait trouvé tout de même plus d'un milliard de soldats.

Reste que c'est bien le même problème que celui de la tablette mésopotamienne. Seul l'habillage change. Retrouvons-le en Inde au douzième siècle, dans la Lilavati de Bhaskara.

Solutio
Alcuin, Propositiones ad acuendos juvenes (ca 794)

In prima igitur mansione duo fuerunt ; in secunda IIII, in tertia VIII, in quarta XVI, in quinta XXXII, in sexta LXIIII, in septima CXXVIII, in octava CCLVI, in nona DXII, in decima $\overline{\text{I}}$ XXIIII, in undecima $\overline{\text{II}}$, in duodecima $\overline{\text{IIII}}$ XCVI, in quarta decima $\overline{\text{XVI}}$ CCCLXXXIIII. In quinta decima $\overline{\text{XXXII}}$ DCCLXVIII, etc.

$$2^{30} = 1{,}07\ 10^9\ .$$

11 doubler l'aumône chaque jour

« Combien de *niṣka* a-t-il donné à un mendiant pendant un mois, celui qui a initialement donné un couple de *varāṭaka* et promis un accroissement du double chaque jour ? »

Le prix en *niṣka*s est imposant.

Il faut dire que les Indiens avaient une longue tradition, à la fois des doublements successifs, et de la manipulation des très grands nombres.

Cette tradition avait une origine religieuse. Le Vishnu Purana est un texte sacré de l'hindouisme, impossible à dater exactement. Voici la vision du monde qu'il décrit, traduite par Brahmagupta au septième siècle.

doubler l'aumône chaque jour
Bhāskara, Līlāvatī (1150)

Combien de *niṣka* a-t-il donné à un mendiant pendant un mois, celui qui a initialement donné un couple de *varāṭaka* et promis un accroissement du double chaque jour ?

Réponse : 2147483646 *varāṭaka* ou 104857 *niṣka*, 9 drachmes, 9 *paṇas*, 2 *kākiṇis* et 6 *varāṭaka*.

12 Vishnu Purana

« D'autres maintiennent que la Terre est plate comme un miroir, entourée d'une mer, celle-ci entourée d'une île, etc. chacune étant ronde comme un collier. Chaque mer et chaque terre a une taille double de celle qu'elle entoure. La terre extérieure est soixante-quatre fois plus large que la terre centrale, et la mer qui entoure la terre extérieure est soixante-quatre fois plus grande que la mer qui entoure la terre centrale. »

Déjà au dixième siècle, al-Uqlidisi considérait les problèmes de doublement comme très anciens ; al-Uqlidisi veut dire l'Euclidien : vous devinez à quoi il passait sa vie ? Il vivait environ un siècle après al-Khwarizmi et il a écrit comme lui un livre d'arithmétique sur la numération indienne.

Vishnu Purana
vu par Brahmagupta (598–670)

D'autres maintiennent que la Terre est plate comme un miroir, entourée d'une mer, celle-ci entourée d'une île, &c. chacune étant ronde comme un collier. Chaque mer et chaque terre a une taille double de celle qu'elle entoure. La terre extérieure est soixante-quatre fois plus large que la terre centrale, et la mer qui entoure la terre extérieure est soixante-quatre fois plus grande que la mer qui entoure la terre centrale.

13 Kitab al-Fusul fi al-Hisab al-Hindi (ca 952)

« C'est une question que beaucoup de gens posent. Certains demandent de doubler 30 fois, d'autres de doubler 64 fois.

[. . .] Ils s'efforcent de mémoriser une procédure et la reproduisent sans connaissance ni schéma ; d'autres s'efforcent d'appliquer un schéma en hésitant, se trompent, ou se mettent à douter. »

Voyez, ce qui est curieux là-dedans, ce n'est pas qu'on retrouve partout des doublements. C'est comme le dit al-Uqlidisi qu'il y en a le plus souvent 30 dans les versions anciennes, ou 64, dans les versions plus modernes.

Kitab al-Fusul fi al-Hisab al-Hindi (ca 952)
Al-Uqlidisi (ca 920–980)

C'est une question que beaucoup de gens posent. Certains demandent de doubler 30 fois, d'autres de doubler 64 fois.

[. . .] Ils s'efforcent de mémoriser une procédure et la reproduisent sans connaissance ni schéma ; d'autres s'efforcent d'appliquer un schéma en hésitant, se trompent, ou se mettent à douter.

14 Leonardo Pisano (Fibonacci) (ca 1170–1250)

Fibonacci, qui connaissait la tradition mathématique des Arabes, reprend le problème dans son Liber Abaci.

Leonardo Pisano (Fibonacci) (ca 1170–1250)

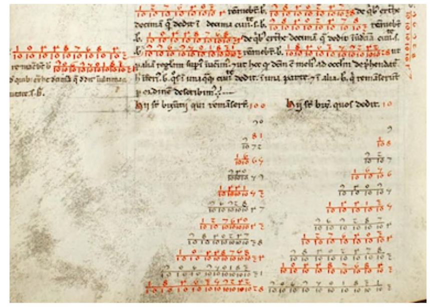
15 Liber Abaci (1202)

Par rapport à Alcuin, il a l'avantage de la numération décimale. Et comme vous le voyez, il ne se prive pas de l'utiliser pour écrire de gros calculs.

En particulier, pour le fameux problème des grains de blés sur l'échiquier.

Liber Abaci (1202)

Leonardo Pisano (Fibonacci) (ca 1170–1250)



16 un grain de blé sur la première case

« Mettons que tu souhaites doubler sur l'échiquier, en commençant par un grain de blé sur la première case, et que tu veuilles connaître combien de bâteaux seront nécessaires pour transporter le blé, si chaque bâteau porte 500 *modia* de Pise, dont chacune est 24 sestaris, chacun pesant 140 livres, chacune pesant 12 onces, chaque once pesant 25 deniers de cantera, chacun est équivalent à 6 caroubes, et chaque caroube pèse 4 grains de blé. »

Fibonacci fait son calcul et arrive à plus de 170 millions de navires. Il conclut : « on voit ainsi que le nombre de navires est pratiquement infini et innombrable ».

un grain de blé sur la première case

Fibonacci, Liber Abaci (1202)

Mettons que tu souhaites doubler sur l'échiquier, en commençant par un grain de blé sur la première case, et que tu veuilles connaître combien de bâteaux seront nécessaires pour transporter le blé, si chaque bâteau porte 500 *modia* de Pise, dont chacune est 24 sestari, chacun pesant 140 livres, chacune pesant 12 onces, chaque once pesant [un gramme et demi], soit 6 caroubes, et chaque caroube pèse 4 grains de blé.

[...] on voit aisément que le nombre de navires est pratiquement infini et innombrable.

17 Dictionnaire biographique (1256–1274)

Le problème de l'échiquier était connu, bien avant Fibonacci. Mais la légende de Sissa, d'où vient-elle ? Elle est publiée, semble-t-il pour la première fois, dans ce dictionnaire biographique de Ibn Khallikan. Une œuvre monumentale de près de 900 notices.

J'ai choisi pour l'illustrer, des miniatures du magnifique « livre des jeux », ordonné par Alphonse X, dit le sage, roi de Castille. Il est à peu près contemporain du dictionnaire d'Ibn Khallikan.

C'est parti pour la légende.

Dictionnaire biographique (1256–1274)

Shams ad-Dîn ibn Khallikân (1211–1282)

18 Libro de axedrez, dados e tablas (1283)

« On dit que, quand Sissa inventa le jeu et le présenta à Shihrâm, ce dernier fut frappé d'admiration et rempli de joie ; il ordonna que des échiquiers soient placés dans les temples, et considéra ce jeu comme la meilleure chose qui puisse être apprise [...]. Il manifesta aussi sa gratitude et sa joie pour la faveur que le ciel lui avait accordée en illustrant son règne d'une telle invention, et il dit à Sissa : « Dis-moi ce que tu désires ». »

Libro de axedrez, dados e tablas (1283)

Alfonso x el sabio (1221–1284)

19 que le nombre de grains soit progressivement doublé

« Je demande », répondit Sissa, « que l'on place un grain de blé dans le premier carré de l'échiquier, deux dans le second, et que le nombre de grains soit progressivement doublé jusqu'à atteindre le dernier carré. Quelle que soit cette quantité, je demande que vous me l'accordiez ».

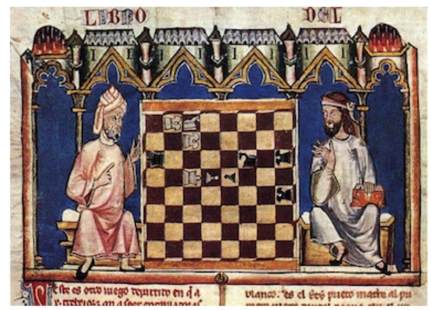
« Le roi, qui pensait lui faire un cadeau considérable, s'exclama qu'une telle récompense serait trop faible, et reprocha à Sissa de demander une récompense inadaptée. »

que le nombre de grains soit progressivement doublé
Alfonso x, libro de axedrez, dados e tablas (1283)

20 ils étaient loin d'avoir le blé

« Sissa déclara qu'il ne désirait rien d'autre que ce qu'il avait dit, et malgré les remontrances du roi, il persista dans sa requête. À la fin le roi consentit, et ordonna qu'on lui donne cette quantité de blé. Quand les employés du gouvernement reçurent les ordres correspondants, ils calculèrent la quantité, et répondirent qu'ils étaient loin d'avoir le blé nécessaire. »

ils étaient loin d'avoir le blé
Alfonso x, libro de axedrez, dados e tablas (1283)



21 tout le blé du monde ne suffirait pas

« Ces mots furent rapportés au roi, et incapable de vérifier, il ordonna qu'on lui amène les employés. Les ayant questionnés sur le sujet, ils répondirent que tout le blé du monde ne suffirait pas. Il leur ordonna de prouver ce qu'ils disaient, et, par une série de multiplications et de calculs, ils le lui démontrèrent. Sur ce, le roi dit à Sissa : « Ton habileté à imaginer une telle requête est encore plus admirable que ton talent pour inventer le jeu des échecs ». »

Et voilà une belle légende plaquée pour des siècles à venir, sur le très vieux problème du doublement. Mais au fait, à part deux, y avait-il d'autres rapports de progression géométrique ? Oui bien sûr. Retournons à Mari, en Mésopotamie.

tout le blé du monde ne suffirait pas
Alfonso x, libro de axedrez, dados e tablas (1283)

22 progression de raison 9

On trouve sur cette tablette les cinq premiers termes d'une suite géométrique de raison 9, partant de 99. En face les termes suivants sont mentionnés : grains d'orge, épis, fourmis, oiseaux, hommes.

La reconstitution pourrait être l'énoncé suivant.

« Il y avait 649 539 grains d'orge, 9 sur chaque épi, 9 épis mangés par chaque fourmi, 9 fourmis avalées par chaque oiseau, et 9 oiseaux attrapés par chaque homme. Combien cela fait-il en tout ? »

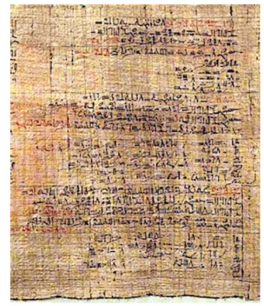
progression de raison 9
M. 7857 (Mari, Mésopotamie, ca 1800 av. J.-C.)

99×9^4	649 539	grains d'orge
99×9^3	72 171	épis
99×9^2	8 019	fourmis
99×9	891	oiseaux
99×1	99	hommes

Total : 730 719

23 le papyrus Rhind

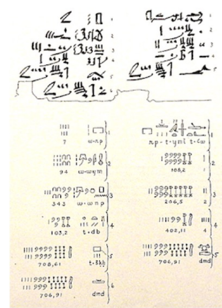
le papyrus Rhind
ca 1650 av. J.-C.



Le papyrus Rhind est le plus important des rares documents qui nous soient parvenus sur les mathématiques égyptiennes. Il a été copié par le scribe Ahmes, à partir d'une source que l'on date à environ 1800 avant Jésus-Christ, soit à peu près contemporaine de la tablette précédente.

24 problème 79

problème 79
papyrus Rhind (ca 1650 av. J.-C.)



Voici la translittération du problème 79 dans le papyrus Rhind. Difficile à lire bien sûr, mais les nombres sont reconnaissables. Il s'agit cette fois-ci d'une progression de raison 7.

25 progression de raison 7

progression de raison 7
papyrus Rhind, problème 79 (ca 1650 av. J.-C.)

7^1	7	maisons
7^2	49	chats
7^3	343	souris
7^4	2 401	épeautre
7^5	16 807	*hekat*

Total : 19 607

En face des nombres, on lit : « maisons, chats, souris, épeautre, hékat », « hékat » est une unité de mesure.

La reconstitution serait la suivante.

« Il était une fois 7 maisons. Dans chacune il y avait 7 chats, chaque chat a tué 7 souris, chaque souris aurait mangé 7 épis d'épeautre, et chaque épi aurait donné 7 hékat de grains. »

26 Sept hommes vont à Rome

Sept hommes vont à Rome
Fibonacci, Liber Abaci (1202)

Sept hommes vont à Rome ; chacun d'eux a sept mules, sur chaque mule il y a sept sacs, dans chaque sac il y a sept miches de pain, pour chaque miche de pain il y a sept couteaux, et chaque couteau a sept étuis. On cherche la somme de tout ce qui précède.

Revoici le même problème chez Fibonacci, vingt siècles plus tard.

« Sept hommes vont à Rome ; chacun d'eux a sept mules, sur chaque mule il y a sept sacs, dans chaque sac il y a sept miches de pain, pour chaque miche de pain il y a sept couteaux, et chaque couteau a sept étuis. On cherche la somme de tout ce qui précède. »

Huit siècles après Fibonacci, qu'en reste-t-il ? Eh bien c'est toujours une comptine, et en même temps une devinette, que tous les petits Anglais connaissent.

27 As I was going to S^{t} Ives

As I was going to S^{t} Ives
comptine et devinette

« En allant à Saint Ives, j'ai rencontré un homme avec sept épouses. Chaque femme avait sept sacs, dans chaque sac il y avait sept chats, chaque chat avait sept chatons. Des chatons, des chats, des sacs et des épouses, combien allaient à Saint Ives ? »

28 les routes de la soie

Pourquoi donc les mêmes problèmes ont-ils été posés dans des civilisations aussi différentes pendant autant de siècles ? Bien sûr les progressions géométriques arrivent naturellement, dès que la multiplication est acquise. La rapidité avec laquelle une progression géométrique atteint des nombres faramineux, provoque la même fascination chez n'importe qui.

les routes de la soie
de 130 av. J.-C. à 1450

On peut donc envisager que ces problèmes soient apparus indépendamment et par hasard, de multiples fois. Mais que le hasard soit tombé chaque fois sur les mêmes chiffres : doublement 30 ou 64 fois, raison 7 pour le papyrus Rhind et la comptine de Saint-Yves, c'est difficilement croyable. Il faut donc que ces problèmes aient été transmis d'une façon ou d'une autre.

On ignore quels ont pu être les contacts entre les Mésopotamiens et les Égyptiens. Pour les siècles suivants, l'hypothèse de Jens Høyrup est que certaines devinettes mathématiques ont pu circuler, avec les caravanes, le long des routes de la soie. Ces routes ont mis en contact pendant de nombreux siècles la plupart des pays où les mathématiques se sont développées : de la Chine à l'Europe, en passant par l'Inde et l'Égypte.

29 références

L'hypothèse de Høyrup, pour vraisemblable qu'elle paraisse, n'est pas démontrée : on n'a aucun témoignage qui aille en ce sens.

Bon après tout, pour vérifier une hypothèse, rien ne vaut la méthode expérimentale. On achète un ou deux chameaux, on passe prendre quelques ballots de tissus au supermarché, et cap sur Shangaï. Au bivouac, tous les soirs, on racontera des devinettes mathématiques. Vous venez ?

références

- A. B. Chace (1927) *The Rhind mathematical papyrus in two volumes*, Oberlin, Ohio : Mathematical Association of America
- J. Friberg (2005) *unexpected links between Egyptian and Babylonian mathematics*, Singapore : World Scientific
- J. Høyrup (1990) Sub-scientific mathematics. Observations on a pre-modern phenomenon, *History of Science*, 28, 63–86
- V. Kopp (2017) Jeux mathématiques à la cour de Charlemagne, *l'Histoire*, 433, 60–65
- M. Moyon (2016) *Fibonacci, Liber Abaci, textes choisis et traduits*, Paris : ACL-Kangourou
- J. Ritter (1989) Chacun sa vérité : les mathématiques en Égypte et en Mésopotamie, *in M. Serres ed. Éléments d'histoire des sciences*, Paris : Bordas, 39–61