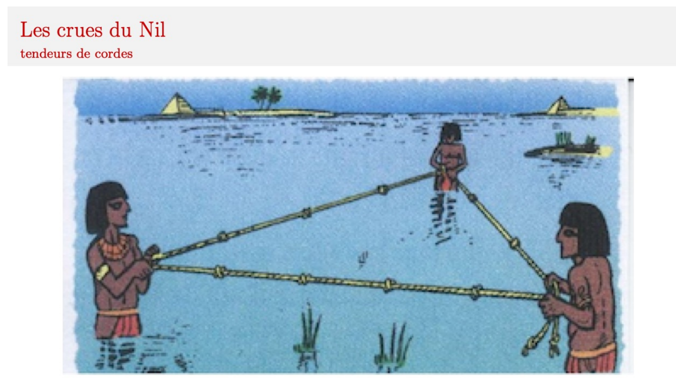
Une histoire de mathématiques à écouter sur

hist-math.fr

0 Les tendeurs de cordes

Vous connaissez un théorème plus célèbre que le théorème de Pythagore, vous ? En plus, il a de vraies applications, dans la vie de tous les jours, et depuis des temps immémoriaux ! Depuis le temps des Pharaons.

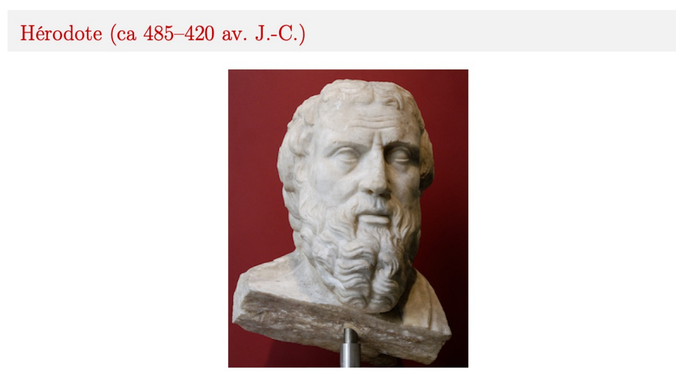
1 Les crues du Nil



Rendez-vous compte : chaque crue du Nil effaçait les limites des champs, et il fallait les retracer chaque année. Alors les Égyptiens sortaient leur outil miracle, la corde à 13 nœuds. Ils tendaient la corde comme sur l'illustration, de manière à former un triangle de côtés 3, 4, et 5. Donc un triangle rectangle d'après le théorème de Pythagore. C'est magique !

Le problème est qu'on n'a aucune trace, ni dans l'archéologie, ni dans les textes, de cette fameuse corde à treize nœuds. Alors d'où vient la légende des crues du Nil et des tendeurs de cordes ?

2 Hérodote (ca 485–420 av. J.-C.)



À l'origine, elle vient d'Hérodote, le père de l'Histoire, il vivait après Thalès et Pythagore, mais avant Platon et Euclide.

3 Histoire, Livre II Euterpe

« Si le fleuve enlevait à quelqu'un une partie de sa portion, (il veut dire du terrain qui lui était attribué), il allait trouver le roi, et lui exposait ce qui était arrivé. Ce prince envoyait sur les lieux des arpenteurs pour voir de combien l'héritage était diminué, afin de ne faire payer la redevance qu'à proportion du fonds qui restait. Voilà, je crois, l'origine de la géométrie, qui a passé de ce pays en Grèce. »

Que l'arpentage ait été à l'origine de problèmes concrets, c'est probable. Mais réduire l'origine de la « géo-métrie » à la mesure de la terre, comme on l'a fait pendant des siècles à la suite d'Hérodote, c'est un peu court. L'astronomie a certainement joué un plus grand rôle que l'arpentage ; l'architecture aussi.

Histoire, Livre II Euterpe
Hérodote (ca 485–420 av. J.-C.)

Si le fleuve enlevait à quelqu'un une partie de sa portion, il allait trouver le roi, et lui exposait ce qui était arrivé. Ce prince envoyait sur les lieux des arpenteurs pour voir de combien l'héritage était diminué, afin de ne faire payer la redevance qu'à proportion du fonds qui restait. Voilà, je crois, l'origine de la géométrie, qui a passé de ce pays en Grèce.

4 Harpedonatai

Qu'il y ait eu des tendeurs de corde en Égypte ne fait pas de doute. Au point que le mot qui désigne les arpenteurs, « Harpedonatai » signifie « tendeurs de corde ». Les arpenteurs étaient convoqués non seulement pour borner les terrains agricoles, mais aussi pour la construction des monuments, comme les pyramides.

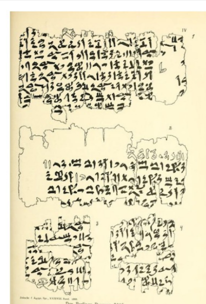
Le problème est que dans les représentations qui nous sont parvenues, comme sur cette image, les cordes qu'ils tendent sont toujours lisses : aucune trace de la fameuse corde à treize nœuds.

Harpedonatai
tendeurs de cordes

5 Papyrus de Berlin 6619

D'ailleurs dans les rares documents portant sur les mathématiques égyptiennes, on n'a trouvé qu'un seul passage qui ait un quelconque rapport avec le théorème de Pythagore. C'est un petit exercice dans le Papyrus de Berlin.

Papyrus de Berlin 6619
ca 1800 av. J.-C.



6 Papyrus de Berlin 6619

« On te dit que la surface d'un carré qui est de 100 coudées carrées est égale à celle de deux carrés plus petits. Le côté d'un de ces carrés est la moitié plus le quart de l'autre. Quels sont les côtés des deux carrés inconnus ? »

Le plus petit côté est 6, soit la moitié plus le quart de l'autre côté qui fait 8 ; la somme des deux carrés fait bien cent. C'est le fameux triplet 3, 4, 5, multiplié par deux. Constatez qu'il n'est absolument pas question de triangle ni d'angle droit.

Il s'agissait juste de trouver trois entiers tels que la somme des carrés des deux plus petits soit le carré du plus grand. C'est ce qu'on appelle un « triplet pythagoricien ». C'est un problème exclusivement arithmétique, et c'est d'ailleurs le seul que l'on puisse relier sans ambigüité à l'école de Pythagore. Rien ne permet d'affirmer que Pythagore savait qu'un triplet pythagoricien peut être vu comme les trois côtés d'un triangle rectangle. A fortiori, rien ne prouve que Pythagore savait démontrer que les côtés d'un triangle rectangle formaient toujours un triplet pythagoricien.

Mais revenons au triplet 3, 4, 5 : a-t-il vraiment été utilisé pour tracer des angles droits ? Oui, mais pas avec la corde à treize nœuds. La première trace qu'on en ait, se trouve dans l'Architecture de Vitruve, au premier siècle avant Jésus-Christ.

Papyrus de Berlin 6619
ca 1800 av. J.-C.

On te dit que la surface d'un carré qui est de 100 coudées carrées est égale à celle de deux carrés plus petits. Le côté d'un de ces carrés est la moitié plus le quart de l'autre. Quels sont les côtés des deux carrés inconnus ?

6 , 8 , 10 .

7 Sur l'Architecture (ca 15 av. J.-C.)

« Pythagore a de même inventé et fait connaître la manière de tracer un angle droit [. . .].
On prend trois règles qui ont de longueur, l'une trois pieds, l'autre quatre, la troisième cinq. On les dispose de manière que, se joignant par leurs extrémités, elles présentent un triangle qui donnera une équerre juste. »

Vous le voyez, il n'est pas question de corde, mais de trois règles. Le procédé est attribué à Pythagore.

« Dès qu'il eut fait cette découverte, Pythagore ne doutant point qu'il ne la dût à une inspiration des Muses, leur rendit de très grandes actions de grâces, et leur immola, dit-on, des victimes. »

On ne sait pas vraiment de quoi Pythagore était si fier, mais la tradition du sacrifice est rapportée également par Diogène Laërce.

Sur l'Architecture (ca 15 av. J.-C.)
Vitruve (ca 99–15 av. J.-C.)

Pythagore a de même inventé et fait connaître la manière de tracer un angle droit [. . .].
On prend trois règles qui sont de longueur, l'une trois pieds, l'autre quatre, la troisième cinq. On les dispose de manière que, se joignant par leurs extrémités, elles présentent un triangle qui donnera une équerre juste. Dès qu'il eut fait cette découverte, Pythagore ne doutant point qu'il ne la dût à une inspiration des Muses, leur rendit de très grandes actions de grâces, et leur immola, dit-on, des victimes.

8 un sacrifice en action de grâce

« Apollodore *le Calculateur* rapporte qu'il immola une hécatombe, lorsqu'il eut découvert que le carré de l'hypoténuse dans le triangle rectangle est égal aux carrés des deux autres côtés ; sur quoi furent composés ces vers : *Pythagore trouva cette ligne célèbre pour laquelle il offrit aux Dieux une brillante hécatombe.* »

Une hécatombe vraiment ? Étymologiquement : cent bêtes sacrifiées ! Allons donc, ça ne ressemble pas du tout à Pythagore, le végétarien. Même que Ciceron s'en offusque.

un sacrifice en action de grâce
Diogène Laërce, Vie des philosophes (ca 220)

Apollodore *le Calculateur* rapporte qu'il immola une hécatombe, lorsqu'il eut découvert que le carré de l'hypoténuse dans le triangle rectangle est égal aux carrés des deux autres côtés ; sur quoi furent composés ces vers : *Pythagore trouva cette ligne célèbre pour laquelle il offrit aux Dieux une brillante hécatombe.*

9 il refusa d'immoler une victime

il refusa d'immoler une victime

Ciceron, De la nature des Dieux, livre III, (ca 50 av. J.-C.)

« Comment veut-on me faire accroire que Pythagore eût pu sacrifier un bœuf en l'honneur des Muses, lorsqu'il est constant, au contraire, qu'il refusa d'immoler une victime sur l'autel d'Apollon Délien, voulant éviter ainsi de répandre le sang ? »

Comment veut-on me faire accroire que Pythagore eût pu sacrifier un bœuf en l'honneur des Muses, lorsqu'il est constant, au contraire, qu'il refusa d'immoler une victime sur l'autel d'Apollon Délien, voulant éviter ainsi de répandre le sang ?

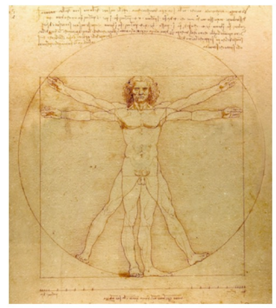
10 l'homme de Vitruve

De Vitruve vous connaissez les proportions du corps humain, magnifiquement illustrées par Léonard de Vinci. Voici ce qu'en dit Vitruve.

« Le centre du corps est naturellement au nombril. Qu'un homme, en effet, soit couché sur le dos, les mains et les pieds étendus, si l'une des branches d'un compas est appuyée sur le nombril, l'autre, en décrivant une ligne circulaire, touchera les doigts des pieds et des mains. Et de même qu'un cercle peut être figuré avec le corps ainsi étendu, de même on peut y trouver un carré : car si on prend la mesure qui se trouve entre l'extrémité des pieds et le sommet de la tête, et qu'on la rapporte à celle des bras ouverts, on verra que la largeur répond à la hauteur, comme dans un carré fait à l'équerre. »

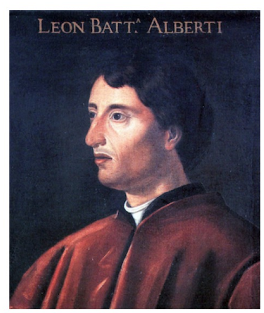
l'homme de Vitruve

Leonardo da Vinci (1452–1519)



11 Leon Battista Alberti (1404–1472)

Leon Battista Alberti (1404–1472)

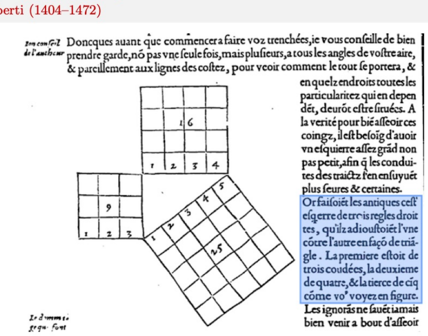


Bien mais Vitruve, c'était avant Jésus-Christ, et une invention aussi mirifique que la corde à treize nœuds a pu être faite après. On lit un peu partout que les maçons du Moyen-Âge utilisaient cette fameuse corde. Il me semble que si c'était le cas, Leon Battista Alberti, un architecte et mathématicien de la Renaissance, grand admirateur de Vitruve, l'aurait su. Or voici ce qu'il dit.

12 De re aedificatoria (1452)

De re aedificatoria (1452)

Leon Battista Alberti (1404–1472)



Doncques auant que commencer a faire voz trenchées, ie vous conſeille de bien prendre garde, nõ pas vne ſeule fois, mais pluſieurs, a tous les angles de voſtre aire, & pareillement aux lignes des coſtez, pour veoir comment le tout ſe portera, & en quelz endroits toutes les particularitez qui en dependẽt, deurõt eſtre ſituées. A la verité pour biẽ aſſeoir ces coingz, il eſt beſoĩg d'auoir vn eſquierre aſſez grãd non pas petit, afin q̃ les conduites des traictz ſ'en enſuyuẽt plus ſeures & certaines. Or faiſoiẽt les antiques ceſt eſqerre de trois regles droittes, qu'ilz adiouſtoiẽt l'vne cõtre l'autre en façõ de triãgle. La premiere eſtoit de trois coudées, la deuxieme de quatre, & la tierce de cĩq cõme vo' voyez en figure. Les ignorãs ne ſauẽt iamais bien venir a bout d'aſſeoir

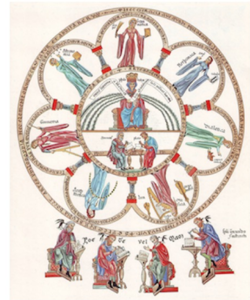
« Les anciens faisaient cette équerre de trois règles qu'ils ajustaient l'une contre l'autre en façon de triangle. La première était de trois coudées, la deuxième de quatre, et la troisième de cinq comme vous le voyez sur la figure. »

Toujours pas question de corde à treize nœuds.

13 Les sept arts libéraux

Le seul indice contraire se trouve dans cette représentation des sept arts libéraux, extraite du Jardin des Délices, un magnifique manuscrit du douzième siècle. L'Arithmétique a la tête à l'envers, à gauche de la Musique. Elle tient à la main une sorte d'arc.

Les sept arts libéraux
Herrad de Landsberg, Hortus Deliciarum (1185)



14 Arithmétique

La voici à l'endroit. On dirait bien que l'arc est une corde à nœuds, sauf qu'il y en a plus de treize.

Arithmétique
Herrad de Landsberg, Hortus Deliciarum (1185)

15 Chaîne d'arpenteur

Qu'on ait eu besoin de marquer des intervalles réguliers sur un instrument de mesure est attesté depuis longtemps. Jusqu'à récemment les arpenteurs utilisaient des chaînes de dix mètres comme celle-ci, avec un maillon tous les 20 centimètres.

Chaîne d'arpenteur
décamètre

16 Équerre d'arpenteur

Mais ils ne l'utilisaient pas pour faire des triangles de 3, 4, 5. Pour les angles, ils utilisaient une équerre, qui était un instrument de visée, avec des fentes.

Ce fameux triangle de 3, 4, 5, était chargé par les Égyptiens de tout un tas de significations symboliques, selon Plutarque.

Équerre d'arpenteur

17 Traité d'Isis et d'Osiris

« Il paraît probable que c'est au plus beau des triangles, au triangle rectangle, que les Égyptiens assimilent spécialement la nature de l'Univers ; et, du reste, c'est de ce triangle que Platon semble s'être servi dans sa République, pour représenter le mariage sous une forme rectiligne. Dans ce triangle rectangle, un des côtés de l'angle droit est représenté par 3 ; la base l'est par 4, et l'hypoténuse, par 5. Or le carré de celle-ci est égal à la somme des carrés faits sur les deux côtés qui contiennent l'angle droit. Il faut donc concevoir, que le côté de l'angle droit représente le mâle, que la base du triangle représente la femelle, et que l'hypoténuse est le produit des deux ; qu'ainsi Osiris est le premier principe, qu'Isis en reçoit les influences, et que Horus est le résultat de l'opération de l'un et de l'autre. »

Ce genre de mystique des nombres était le fondement de la religion de Pythagore. Que celui-ci ait connu au moins le triplet 3, 4, 5 est attesté par Proclus.

Traité d'Isis et d'Osiris
Plutarque (ca 45–120)

Il paraît probable que c'est au plus beau des triangles, au triangle rectangle, que les Égyptiens assimilent spécialement la nature de l'Univers ; et, du reste, c'est de ce triangle que Platon semble s'être servi dans sa République, pour représenter le mariage sous une forme rectiligne. Dans ce triangle rectangle, un des côtés de l'angle droit est représenté par 3 ; la base l'est par 4, et l'hypoténuse, par 5. Or le carré de celle-ci est égal à la somme des carrés faits sur les deux côtés qui contiennent l'angle droit. Il faut donc concevoir, que le côté de l'angle droit représente le mâle, que la base du triangle représente la femelle, et que l'hypoténuse est le produit des deux ; qu'ainsi Osiris est le premier principe, qu'Isis en reçoit les influences, et que Horus est le résultat de l'opération de l'un et de l'autre.

18 méthode attribuée à Pythagore

« On commence par prendre un nombre impair pour représenter le petit côté de l'angle droit ; on l'élève au carré ; en retranchant une unité et prenant la moitié, on a pour résultat le plus grand des deux côtés de l'angle droit ; au contraire, en ajoutant une unité au carré et prenant la moitié, on a l'hypoténuse. Ainsi je prends le nombre 3 j'en forme le carré j'ai 9 ; je retranche 1, j'ai 8 ; je prends la moitié, j'ai 4 : c'est le grand côté de l'angle droit. Je reprends le carré 9 et j'ajoute 1, j'ai 10 ; je prends la moitié, j'ai 5 : c'est hypoténuse ; et j'ai un triangle rectangle formé des côtés 3, 4, 5.«

Vous voyez la formule générale et pourquoi elle marche. Cette méthode est effectivement bien dans la logique arithmétique de Pythagore. Le même Proclus attribue une méthode analogue à Platon.

méthode attribuée à Pythagore
Proclus, Commentaire sur le premier livre des Éléments (ca. 460)

on commence par prendre un nombre impair pour représenter le petit côté de l'angle droit ; on l'élève au carré ; en retranchant une unité et prenant la moitié, on a pour résultat le plus grand des deux côtés de l'angle droit ; au contraire, en ajoutant une unité au carré et prenant la moitié, on a l'hypoténuse. Ainsi je prends le nombre 3 j'en forme le carré j'ai 9 ; je retranche 1, j'ai 8 ; je prends la moitié, j'ai 4 : c'est le grand côté de l'angle droit. Je reprends le carré 9 et j'ajoute 1, j'ai 10 ; je prends la moitié, j'ai 5 : c'est hypoténuse ; et j'ai un triangle rectangle formé des côtés 3,4, 5.

$$(2m+1)^2 + \frac{1}{4}((2m+1)^2 - 1)^2 = \frac{1}{4}((2m+1)^2 + 1)^2 \ .$$

19 méthode attribuée à Platon

« Prenant donc le nombre pair donné, on le pose comme l'un des côtés de l'angle droit, puis on le divise par 2 et l'on forme le carré de la moitié ; en ajoutant une unité, on a l'hypoténuse ; au contraire en retranchant une unité, on a le second côté de l'angle droit. Ainsi je prends le nombre 4 ; je le divise par 2, et je forme le carré, ce qui reproduit le même nombre 4. Retranchant une unité, j'ai 3 ; l'ajoutant au contraire, j'ai 5 ; et je retrouve ainsi le même triangle déjà obtenu par la première méthode. »

Proclus est bien conscient que la solution d'Euclide est beaucoup plus générale. Elle se trouve dans le livre dix des Éléments.

méthode attribuée à Platon
Proclus, Commentaire sur les premier livre des Éléments (ca. 460)

Prenant donc le nombre pair donné, on le pose comme l'un des côtés de l'angle droit, puis on le divise par 2 et l'on forme le carré de la moitié ; en ajoutant une unité, on a l'hypoténuse ; au contraire en retranchant une unité, on a le second côté de l'angle droit. Ainsi je prends le nombre 4 ; je le divise par 2, et je forme le carré, ce qui reproduit le même nombre 4. Retranchant une unité, j'ai 3 ; l'ajoutant au contraire, j'ai 5 ; et je retrouve ainsi le même triangle déjà obtenu par la première méthode.

$$(2m)^2 + (m^2 - 1)^2 = (m^2 + 1)^2 \ .$$

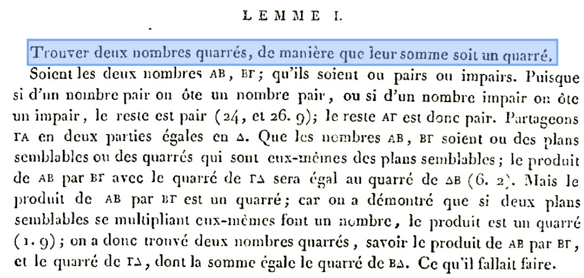
20 caractérisation d'Euclide

« Trouver deux nombres carrés, de manière que leur somme soit un carré. »

Comme d'habitude chez Euclide, il faut beaucoup réfléchir pour comprendre sa construction et constater qu'il donne la solution la plus générale possible.

caractérisation d'Euclide

Euclide, Éléments, Livre X, Proposition XXIX (ca 300 av. J.-C.)



LEMME I.

Trouver deux nombres quarrés, de manière que leur somme soit un quarré.

Soient les deux nombres AB, BΓ; qu'ils soient ou pairs ou impairs. Puisque si d'un nombre pair on ôte un nombre pair, ou si d'un nombre impair on ôte un impair, le reste est pair (24, et 26. 9); le reste AΓ est donc pair. Partageons ΓA en deux parties égales en Δ. Que les nombres AB, BΓ soient ou des plans semblables ou des quarrés qui sont eux-mêmes des plans semblables; le produit de AB par BΓ avec le quarré de ΓΔ sera égal au quarré de ΔB (6. 2). Mais le produit de AB par BΓ est un quarré; car on a démontré que si deux plans semblables se multipliant eux-mêmes font un nombre, le produit est un quarré (1. 9); on a donc trouvé deux nombres quarrés, savoir le produit de AB par BΓ, et le quarré de ΓΔ, dont la somme égale le quarré de BΔ. Ce qu'il fallait faire.

21 caractérisation d'Euclide

Même si Euclide ne le démontre pas, il s'agit bien d'une caractérisation. En termes modernes, le théorème dit que si on suppose x et y premiers entre eux et x pair, alors il faut et il suffit qu'il existe des entiers m et n de parités opposées, premiers entre eux, tels que $m > n$, $x = 2mn$, $y = m^2 - n^2$ et $z = m^2 + n^2$.

Trouver des triplets pythagoriciens donne lieu à d'innombrables exercices, à commencer par une bonne partie des arithmétiques de Diophante.

caractérisation d'Euclide

Euclide, Éléments, Livre X, Proposition XXIX (ca 300 av. J.-C.)

$$(m^2 - n^2)^2 + 4m^2n^2 = (m^2 + n^2)^2 .$$

22 Leonardo Pisano (Fibonacci) (ca 1170–1240)

Fibonacci l'avait tellement bien compris qu'il en fait le point de départ du Livre des Carrés.

Leonardo Pisano (Fibonacci) (ca 1170–1240)

23 Liber Quadratorum (1225)

La première ligne dit : « Ici commence le Livre des Carrés, par Leonard de Pise, en l'an 1225 ». Le livre est dédié à Frédéric II, et Fibonacci explique pourquoi dans les lignes suivantes.

Liber Quadratorum (1225)

Leonardo Pisano (Fibonacci) (ca 1170–1240)

24 Maître Jean de Palerme

« Quand Maître Dominique m'a conduit aux pieds de votre majesté céleste, prince très glorieux, seigneur Frédéric, je rencontrai Maître Jean de Palerme ; il me proposa une question qui lui était venue à l'esprit, appartenant autant à la géométrie qu'à l'arithmétique : trouver un nombre carré tel que, quand cinq est ajouté ou soustrait, on trouve encore des carrés. »

Maître Jean de Palerme

Fibonacci, Liber Quadratorum (1125)

Quand Maître Dominique m'a conduit aux pieds de votre majesté céleste, prince très glorieux, seigneur Frédéric, je rencontrai Maître Jean de Palerme ; il me proposa une question qui lui était venue à l'esprit, appartenant autant à la géométrie qu'à l'arithmétique : trouver un nombre carré tel que, quand cinq est ajouté ou soustrait, on trouve encore des carrés.

25 carrés en progression arithmétique

Donc si on oublie la valeur 5 qui n'a rien de spécial, Fibonacci cherche trois carrés x^2, y^2, z^2 en progression arithmétique, c'est-à-dire tels que $x^2 + z^2 = 2y^2$.

Mais si x^2+z^2 est pair, c'est que x^2 et z^2 ont la même parité, donc aussi x et z sont de même parité, et $z+x$ comme $z-x$ sont pairs. On trouve donc que $(z-x)/2$, $(z+x)/2$ et y forment un triplet pythagoricien.

À partir de là, Fibonacci se lance dans un développement extrêmement brillant, tellement qu'il faudra bien que je vous le raconte un jour. Il commence par donner plusieurs méthodes pour obtenir des triplets pythagoriciens, en commençant par la plus simple.

carrés en progression arithmétique

Fibonacci, Liber Quadratorum (1125)

Trouver $x^2 < y^2 < z^2$ tels que $x^2 + z^2 = 2y^2$.

Posons : $z + x = 2p$ et $z - x = 2q$.

Alors $x = p - q$ et $z = p + q$, donc :

$$x^2 + z^2 = 2p^2 + 2q^2 \ ,$$

donc :

$$p^2 + q^2 = y^2 \ .$$

26 Pour trouver deux carrés dont la somme est un carré

« Pour trouver deux carrés dont la somme est un carré, je prendrai un carré impair, qui sera un de mes deux carrés ; l'autre sera la somme des nombres impairs de l'unité jusqu'à celui que j'ai choisi. Par exemple, Je prendrai 9 comme carré, l'autre sera la somme des nombres impairs inférieurs à 9, soit 1 plus 3 plus 5 plus 7 égale 16, qui est un carré ; ajouté à 9 on obtient 25 qui est encore un carré. »

Ce que décrit Fibonacci, c'est la méthode que Proclus attribuait à Pythagore, mais sous une forme beaucoup plus naturelle.

Pour trouver deux carrés dont la somme est un carré

Fibonacci, Liber Quadratorum (1125)

Pour trouver deux carrés dont la somme est un carré, je prendrai un carré impair, qui sera un de mes deux carrés ; l'autre sera la somme des nombres impairs de l'unité jusqu'à celui que j'ai choisi. Par exemple, Je prendrai 9 comme carré, l'autre sera la somme des nombres impairs inférieurs à 9, soit 1 plus 3 plus 5 plus 7 égale 16, qui est un carré ; ajouté à 9 on obtient 25 qui est encore un carré.

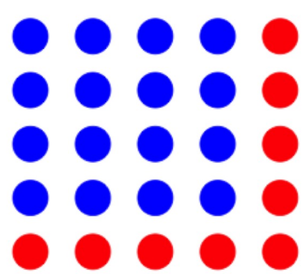
27 La méthode géométrique de Pythagore

Pour Pythagore et ses successeurs, un nombre carré était un tableau d'unités ou de jetons. On passait d'un nombre carré au suivant, en lui ajoutant ce qu'on appelait un gnomon, cette équerre rouge que vous voyez à droite. Les gnomons sont forcément impairs. De sorte que la somme d'entiers impairs successifs à partir de l'unité est un carré, vous le voyez sur la figure.

Et s'il arrive que le gnomon soit lui-même un carré, comme 9 sur la figure, on a construit un triplet pythagoricien.

Voilà : le théorème de Pythagore, ce n'était peut-être que cela pour Pythagore : une manière de construire des triplets.

La méthode géométrique de Pythagore



28 Triplets pythagoriciens

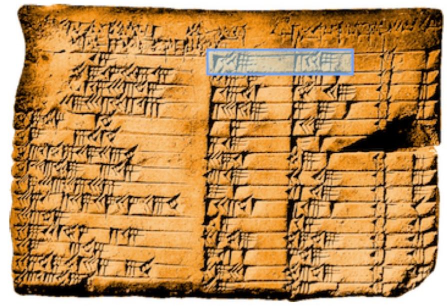
On connaît des triplets pythagoriciens beaucoup plus anciens que Pythagore : ce sont ceux qu'on trouve dans les tablettes mésopotamiennes. La plus célèbre est celle-ci : Plimpton 322.

Vous voyez une colonne assez large à gauche, puis deux colonnes plus étroites, puis une colonne où le même signe est répété, enfin une dernière colonne qui numérote les lignes de 1 à 15. Regardez les deux nombres surlignés en bleu. Le premier est 1.59 en sexagésimal soit $60 + 59 = 119$ en décimal. Le second est 2.49, soit 169. Calculez 169 au carré moins 119 au carré, vous obtenez 120 au carré : le triplet 119, 120, 169 est un triplet pythagoricien.

Les 15 lignes de la tablette sont du même type : la seconde colonne contient le plus petit côté du triangle, la troisième colonne contient l'hypoténuse. Voici les valeurs décimales.

Triplets pythagoriciens

Plimpton 322



29 Triplets pythagoriciens

La valeur a est le petit côté, la valeur c l'hypoténuse, qui sont données dans la tablette. La valeur du troisième côté, b n'apparaît pas dans la tablette. Dans chacun des 15 cas, c'est une valeur qui a une écriture sexagésimale simple.

L'interprétation qui me paraît la plus réaliste est celle d'Eleanor Robson. Elle suggère que Plimpton 322 est simplement une liste d'exercices où étant donnés le plus petit et le plus grand élément d'un triplet pythagoricien, on demande de trouver l'élément intermédiaire.

Remarquez une fois de plus qu'il n'est pas question de triangles rectangles.

La confusion entre triplets et triangles vient peut-être de ce que la plupart des illustrations du théorème de Pythagore se faisaient à l'aide de triplets entiers, le plus souvent 3, 4, 5.

Triplets pythagoriciens

Plimpton 322 : $a^2 + b^2 = c^2$

a	c	b
119	169	120
3367	4825	3456
4601	6649	4800
12709	18541	13500
65	97	72
319	481	360
2291	3541	2700
799	1249	960
481	769	600
4961	8161	6480
45	75	60
1679	2929	2400
161	289	240
1771	3229	2700

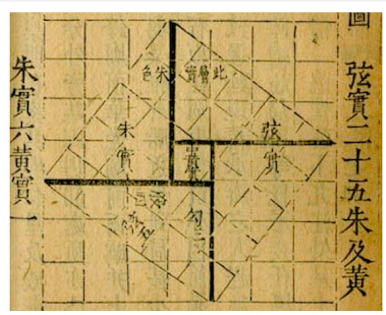
30 Zhoubi Suanjing (1er siècle)

Regardez par exemple cette figure extraite d'une édition tardive du Zhoubi Suanjing, une des bases des mathématiques et de l'astronomie chinoise. La figure illustre ce qui est peut-être la démonstration la plus rapide et la plus élégante du théorème de Pythagore, en toute généralité. Comptez les petits carrés sur la figure : elle représente des triangles de 3, 4, 5.

Égypte, Grèce, Chine, tiens, nous n'avons pas encore visité l'Inde !

Zhoubi Suanjing (1er siècle)

démonstration graphique



31 Cérémonie Védique

Cérémonie Védique

Dans la religion védique, certaines cérémonies sont célébrées devant un feu, allumé sur un autel. La forme de cet autel peut dépendre de l'objectif de la cérémonie.

32 Autel en aigle

Autel en aigle

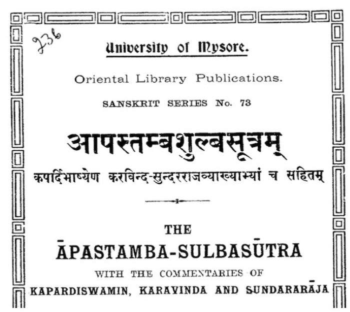
Certains autels, comme celui-ci en forme d'aigle, peuvent être assez compliqués.

Comme tout a été codifié de longue date dans la religion védique, la forme, la construction et l'orientation des autels fait l'objet de règles particulières, les Sutras. Et devinez quel nom on donne à ces Sutras ?...

33 Śulba Sūtra

Śulba Sūtra

Āpastamba (ca 600 av. J.-C.)



236

University of Mysore.

Oriental Library Publications.

SANSKRIT SERIES No. 73

आपस्तम्बशुल्बसूत्रम्

कपर्दिभाष्येण करविन्द-सुन्दरराजव्याख्याभ्यां च सहितम्

THE

ĀPASTAMBA-SULBASŪTRA

WITH THE COMMENTARIES OF

KAPARDISWAMIN, KARAVINDA AND SUNDARARĀJA

Les Shulba Sutras, c'est-à-dire les Sutras de la corde. Eh bien ça y est, les voici nos tendeurs de cordes ! Eux ne laissent aucun doute sur l'utilisation géométrique qu'ils font de leurs instruments. Voici ce qu'on lit dans les Shulba Sutras d'Apastamba, qui vivait environ un siècle avant Pythagore.

34 une corde de mesure donnée

« Une corde de mesure donnée est augmentée de sa longueur ; la longueur originale plus son quart constitueront la diagonale, et le reste la largeur du rectangle. »

Donc pour obtenir un rectangle on mesure trois quarts pour le petit côté, un pour le grand côté, cinq quarts pour la diagonale. À nouveau le triplet 3, 4, 5. Apastamba en donne d'autres ailleurs.

Mais surtout, il énonce le résultat général suivant :

« Les surfaces produites séparément par la longueur et la largeur d'un rectangle, égalent ensemble l'aire produite par la diagonale. »

L'aire produite, c'est le carré. En clair, Apastamba énonce le théorème de Pythagore. Il n'est pas question de démonstration bien sûr : ce sont des règles religieuses, on n'est pas chez Euclide.

une corde de mesure donnée

Āpastamba, Śulba Sūtra (ca 600 av. J.-C.)

Une corde de mesure donnée est augmentée de sa longueur ; la longueur originale plus son quart constitueront la diagonale, et le reste la largeur du rectangle.

$$\frac{3}{4}\,; \quad 1\,; \quad \frac{5}{4}\,.$$

Les surfaces produites séparément par la longueur et la largeur d'un rectangle, égalent ensemble l'aire produite par la diagonale.

35 références

Eh bien voilà, on a fini par les retrouver nos tendeurs de cordes !

En attendant, on ne sait toujours pas à qui il faut attribuer le théorème de Pythagore. Et si on disait Euclide ? Au moins lui, il n'a pas confondu triplet pythagoricien d'entiers et triangle rectangle, il a donné un énoncé clair et une démonstration correcte. Oohh, et puis… il y a peu de chances que Pythagore proteste.

références

- S. G. Dani (2003) On the Pythagorean triples in the Śulvasūtras, *Current Science*, 85(2), 219–224
- S. L. Montgomery and A. Kumar (2016) *A history of science in world culture*, London : Routledge
- H. Selin (ed.) (2000) *Mathematics across cultures*, New York : Springer
- S. N. Sen and A. K. Bag (1983) *The Śulbasūtras of Baudhāyana, Āpastamba, Kātyāyana and Mānava*, New Dehli : Indian National Science Academy
- L. E. Sigler (1987) *Leonardo Pisano Fibonacci : The book of Squares*, Boston : Academic Press
- A. Vincent (1852) Lettre sur le théorème de Pythagore, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1(11), 5–22