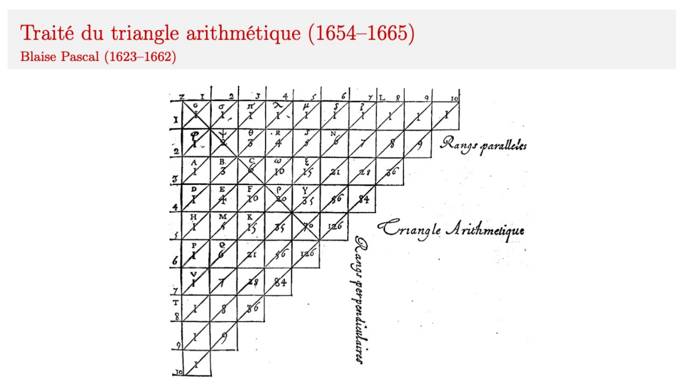
## 0 Le meru-prastāra


Allez, c'est reparti : encore un de ces machins qui porte le nom du dernier à y avoir pensé : le Triangle de Pascal. Ah, au moins, la source est parfaitement identifiée.

## 1 Traité du triangle arithmétique (1654–1665)

C'est le « Traité du triangle arithmétique ». Pascal l'a écrit à l'automne 1654 après ses échanges avec Fermat sur les probabilités. Il a été imprimé seulement trois ans après la mort de Pascal, en 1665.



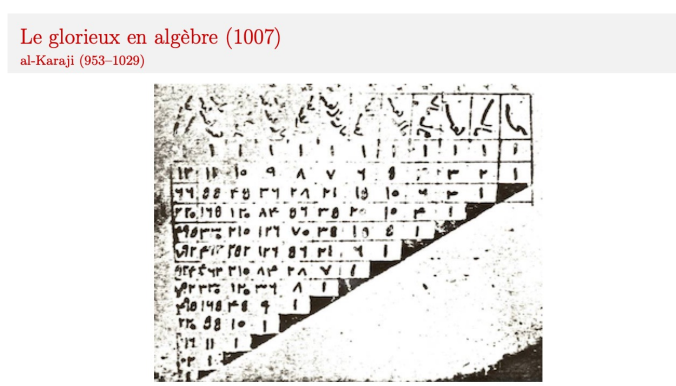

L'illustration correspond bien à ce que dit Pascal dans ce traité : il y a des rangs parallèles et des rangs perpendiculaires. La valeur d'une case est la somme de celle qui est à gauche et de celle qui est au-dessus. De sorte que si on veut lire les coefficients combinatoires, il faut les lire sur les diagonales montantes ou bien tourner la figure de 45 degrés.

À l'époque de Pascal, le triangle arithmétique pour calculer des nombres de combinaisons, et la formule du binôme qui les utilise, étaient loin d'être des nouveautés. D'ailleurs Pascal en est parfaitement conscient. Voici ce qu'il dit.

« Je ne donne point la démonstration de tout cela, parce que d'autres en ont déjà traité, comme Hérigone. Outre que la chose est évidente d'elle-même. »

Je ne pense pas qu'il imaginait combien d'autres en avaient déjà traité. Nous allons en évoquer quelques uns.

## 2 Le glorieux en algèbre (1007)

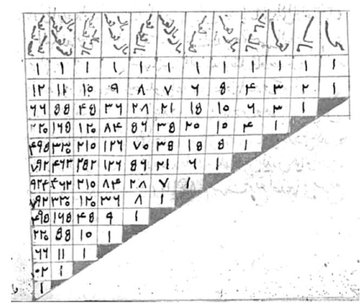



Commençons par les Arabes, avec al-Karaji au tout début du onzième siècle. L'orientation est différente. Les coefficients combinatoires se lisent sur les colonnes, de droite à gauche.

## 3 Le brillant en algèbre (ca. 1150)

Le digne successeur d'al-Karaji est as-Samawal. Pour poursuivre le « glorieux en algèbre », qui était le titre du livre d'al-Karaji, il écrit au siècle suivant le « brillant en algèbre ». Il y donne une démonstration de la formule du binôme, et reproduit le même triangle, qui va jusqu'à l'ordre 12.

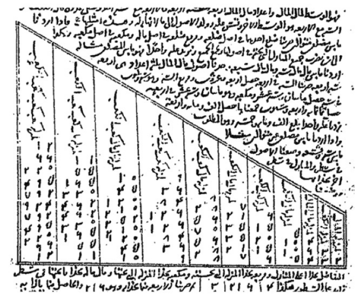
Le brillant en algèbre (ca. 1150)
as-Samaw'al (ca. 1130–1180)



## 4 Le livre d'arithmétique par l'abaque (1265)

Je ne connais pas la liste exhaustive de tous les auteurs arabes qui ont tracé un triangle arithmétique. Un des plus célèbres est al-Tusi au treizième siècle.

Le livre d'arithmétique par l'abaque (1265)
al-Tusi (1201–1274)



## 5 Les solutions détaillées de l'Empereur jaune (ca. 1050)

Passons en Chine. Le premier semble être Jia Xian, qui vivait au onzième siècle, mais dont le livre est perdu. Il n'est connu que parce qu'un autre auteur, Yang Hui, qui vivait deux siècles plus tard, a écrit en 1262 une « Analyse détaillée des règles mathématiques dans les neuf chapitres ».

Dans les deux cas, il s'agit de commentaires et d'extensions à partir des « neuf chapitres sur l'art du calcul », l'œuvre fondatrice des mathématiques chinoises, dont je vous parle ailleurs.

Bref, comme vous pouvez le constater, cette fois-ci pas d'erreur, c'est bien le triangle de Pascal comme nous le connaissons, à lire horizontalement, de haut en bas.

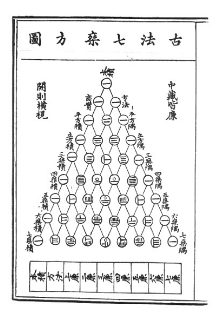
Les solutions détaillées de l'Empereur jaune (ca. 1050)
Jia Xian (ca. 1010–1070)

## 6 Le précieux miroir des quatre éléments (1303)

Revoici le même triangle au tout début du quatorzième siècle. La disposition est exactement la même. Les symboles pour les chiffres ont changé. Ici, vous avez les symboles simplifiés, en base 10, avec 5 comme base secondaire.

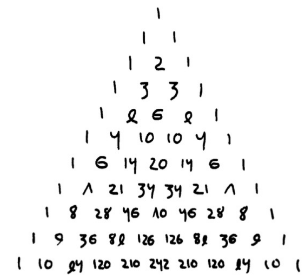
Regardez la ligne du 5. Le 5 est écrit avec 5 traits horizontaux, le 10 avec un petit rond au dessus d'un trait horizontal : les Chinois ont probablement emprunté le zéro aux Indiens. Sur la ligne suivante, regardez comment sont écrits 6, 15 et 20.

Le précieux miroir des quatre éléments (1303)
Zhu Shijie (1270–1330)



# 7 De elementis arithmetice artis (ca. 1250)

De elementis arithmetice artis (ca. 1250)
Jordanus Nemorarius (ca. 1225–1260)



Et en Europe ? La première occurrence se trouve dans les copies d'un manuscrit d'un certain Jordan de Némore, dont on ne sait tellement pas grand chose, que certains le disent allemand, pendant que d'autres le croient français. En plus ce n'est pas lui qui a dessiné cela, mais un copiste. Le texte se contente de décrire la règle de construction.

# 8 Eyn newe unnd wolgegründte Underweysung. . . (1527)

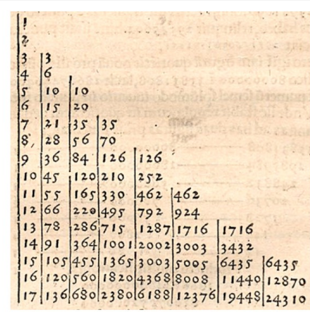
Eyn newe unnd wolgegründte Underweysung. . . (1527)
Peter Apian (1495–1552)


Il faut attendre trois siècles, pour que la notion soit reprise, par Peter Apian, qui lui était bien allemand.

Il en est tellement fier qu'il met le triangle dans le frontispice de son livre de calcul. Son triangle est dans le sens dont nous avons l'habitude, mais il ne contient pas les 1.

# 9 Arithmetica integra (1544)

Arithmetica integra (1544)
Michael Stifel (1487–1567)



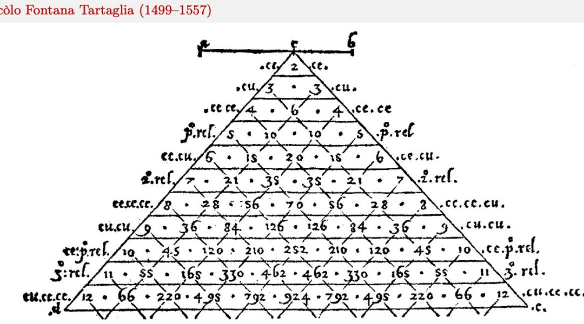
| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | |
| 3 | 3 | | | | | | |
| 4 | 6 | | | | | | |
| 5 | 10 | 10 | | | | | |
| 6 | 15 | 20 | | | | | |
| 7 | 21 | 35 | 35 | | | | |
| 8 | 28 | 56 | 70 | | | | |
| 9 | 36 | 84 | 126 | 126 | | | |
| 10 | 45 | 120 | 210 | 252 | | | |
| 11 | 55 | 165 | 330 | 462 | 462 | | |
| 12 | 66 | 220 | 495 | 792 | 924 | | |
| 13 | 78 | 286 | 715 | 1287 | 1716 | 1716 | |
| 14 | 91 | 364 | 1001 | 2002 | 3003 | 3432 | |
| 15 | 105 | 455 | 1365 | 3003 | 5005 | 6435 | 6435 |
| 16 | 120 | 560 | 1820 | 4368 | 8008 | 11440 | 12870 |
| 17 | 136 | 680 | 2380 | 6188 | 12376 | 19448 | 24310 |

Michael Stifel est un contemporain d'Apian, allemand lui aussi. Son livre d'« arithmétique entière » est écrit en latin.

Remarquez que Stifel n'a représenté que la moitié utile du triangle. Il sait bien que la seconde moitié reproduit la première. Ça lui permet de pousser jusqu'à l'ordre 17. Il n'est pas évident que Stifel ait compris les entrées de son tableau comme des nombres de combinaisons. Cela pouvait aussi être des nombres géométriques, dans la tradition des pythagoriciens.

# 10 General Trattato di numeri et misure (1556)

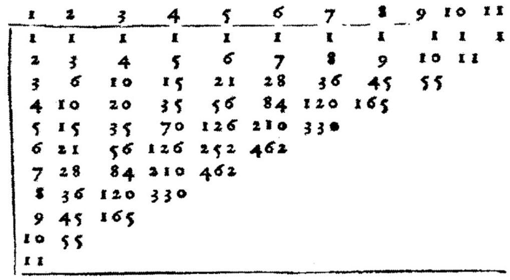
General Trattato di numeri et misure (1556)
Niccòlo Fontana Tartaglia (1499–1557)



Passons en Italie. Le premier triangle publié est celui de Tartaglia. Il est comme celui d'Apian, sans les un, mais il va jusqu'à l'ordre 12.

## 11 Opus Novum de Proportionibus Numerorum (1570)

Opus Novum de Proportionibus Numerorum (1570)
Girolamo Cardano (1501–1576)

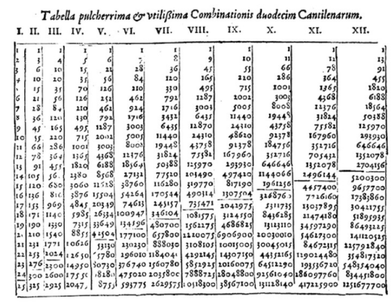


| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | |
| 3 | 6 | 10 | 15 | 21 | 28 | 36 | 45 | 55 | | |
| 4 | 10 | 20 | 35 | 56 | 84 | 120 | 165 | | | |
| 5 | 15 | 35 | 70 | 126 | 210 | 330 | | | | |
| 6 | 21 | 56 | 126 | 252 | 462 | | | | | |
| 7 | 28 | 84 | 210 | 462 | | | | | | |
| 8 | 36 | 120 | 330 | | | | | | | |
| 9 | 45 | 165 | | | | | | | | |
| 10 | 55 | | | | | | | | | |
| 11 | | | | | | | | | | |

Il semble que Cardan ait connu le triangle arithmétique dès 1527, mais la version que vous voyez date de 1570. Il ressemble à celui du traité de Pascal, mais il y manque une colonne de 1 à gauche.

## 12 Harmonicorum Libri XII (1636)

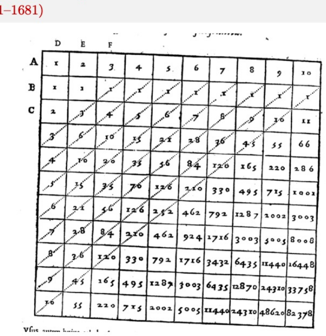
Harmonicorum Libri XII (1636)
Marin Mersenne (1588–1648)



Passons en France, toujours avant Pascal, on trouve le père Marin Mersenne. Il écrit cette table qui va jusqu'à l'ordre 25. La représentation est la même que celle de Cardan, mais le triangle n'en est plus vraiment un.

## 13 Pharus Scientiarum (1659)

Pharus Scientiarum (1659)
Sebastián Izquierdo (1601–1681)



Voici le « Phare des sciences », écrit en 1659 par un Jésuite espagnol, Sébastián Izquierdo. À part le fait que toutes les cases sont complétées pour en faire un rectangle, la disposition est exactement la même que celle de Pascal.

Bon alors : « The winner is... » Qui a écrit le premier triangle de Pascal : un Arabe ? un Chinois ? Et en Europe : Allemand, Italien, Français ?

Mmhh ! Tout cela est au fond bien futile. Écoutez plutôt la voie de la sagesse.

## 14 Bhagavad-Gītā

Bhagavad-Gītā
II$^{e}$ siècle av. J.C.

Celui dont l'intelligence est éclairée, qui se maîtrise par une volonté ferme, qui est détaché des sons et des autres objets des sens, qui déracine en lui-même la passion et la haine ;

[...]

Qui, s'affranchissant de l'égoïsme, de la violence, de l'orgueil, du désir, de la colère, de la richesse, supérieur à tout calcul personnel, atteint au calme, celui-là est mûr pour se fondre en Brahman.

« Celui dont l'intelligence est éclairée, qui se maîtrise par une volonté ferme, qui est détaché des sons et des autres objets des sens, qui déracine en lui-même la passion et la haine.

Qui, s'affranchissant de l'égoïsme, de la violence, de l'orgueil, du désir, de la colère, de la richesse, supérieur à tout calcul personnel, atteint au calme, celui-là est mûr pour se fondre en Brahman. »

C'est extrait d'un livre religieux, qui est en même temps une épopée : la Bhagavad-Gita, le Chant du Bienheureux.

## 15 Arjuna et Krishna, bataille de Kurukshetra

Au début du récit, la bataille de Kurukshetra se prépare. Le héros, Arjuna, n'a rien moins que Krishna en personne pour le guider sur son char.

Mais il a des états d'âme : des membres de sa propre famille risquent d'être tués dans le camp ennemi. Alors Krishna lui explique la vie, la mort, et la résurrection.

Arjuna et Krishna, bataille de Kurukshetra

Bhagavad-Gītā (IIe siècle av. J.C.)

## 16 Krishna révèle à Arjuna sa forme universelle

Et de révélation en révélation, Krishna en vient à expliquer à Arjuna qui il est vraiment, dans toute sa splendeur et toute son universalité.

Pourquoi donc est-ce que je vous raconte tout ça ? Eh bien en premier lieu, la Bhagavad Gita est un des fondements de la religion Hindoue, et je vous annonce que nous partons en Inde pour tout le reste de cette histoire. D'autre part parce que c'est un long poème d'environ 700 vers, écrit en sanscrit, et que nous allons parler de poésie sanscrite. Enfin, la Bhagavad Gita a été écrite vers le second siècle avant Jésus-Christ, l'époque où le héros de cette histoire a vécu lui aussi.

Poésie sanscrite donc ? Oui, et plus précisément sa métrique, son rythme.

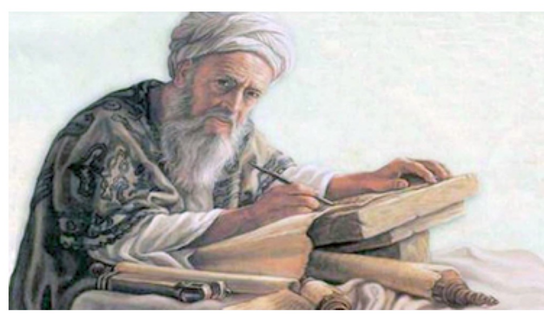
Krishna révèle à Arjuna sa forme universelle

Bhagavad-Gītā (IIe siècle av. J.C.)

## 17 Abu I-Rayhan Muhammad ibn Ahmad al-Biruni (973–1048)

Écoutons plutôt un spécialiste : al-Biruni. Il a passé 13 ans en Inde de 1017 à 1030 et en a ramené un livre, qui est une source inestimable. Au chapitre qu'il consacre à la poésie, il s'excuse par deux fois de ne pas en savoir assez. Mais ce qu'il dit est parfaitement clair.

Abū Rayḥan Muḥammad ibn Aḥmad al-Bīrūnī (973–1048)



## 18 la science appelée *Chandah*

« La grammaire est accompagnée d'une autre science, appelée *Chandah*, qui est la forme métrique de la poésie. C'est une science qui leur est indispensable, car tous leurs livres sont en vers. En composant les livres en vers, leur but est de les rendre plus faciles à apprendre par cœur, et d'éviter, quel que soit le domaine, d'avoir à utiliser un texte écrit, sauf en dernier recours. »

la science appelée *Chandaḥ*

al-Bīrūnī, Kitab al-Hind (ca. 1035)

La grammaire est accompagnée d'une autre science, *Chandaḥ*, qui est la forme métrique de la poésie. C'est une science qui leur est indispensable, car tous leurs livres sont en vers. En composant les livres en vers, leur but est de les rendre plus faciles à apprendre par cœur, et d'éviter, quel que soit le domaine, d'avoir à utiliser un texte écrit, sauf en dernier recours.

## 19 *laghu* et *guru*

« Pour compter les syllabes, ils utilisent deux signes : une barre verticale pour *laghu*, c'est-à-dire léger, une sorte de $S$ pour *guru*, c'est-à-dire lourd. Dans les mesures (mâtrâchandas), le *guru* compte pour le double d'un *laghu*, et son espace peut être rempli par deux *laghus.* »

Voilà, c'est tout simple : il y a des syllabes courtes, et des syllabes longues, comme dans la poésie grecque puis dans la poésie latine.

À partir de là, un savant nommé Pingala, qui aurait vécu vers le second siècle avant Jésus-Christ a élaboré une mathématique du binaire : ce n'était pas zéro et un, mais syllabe courte, syllabe longue, Laghu et Guru. Le nom de cette science est Chandah comme le dit al-Biruni, et l'œuvre de Pingala s'appelle les Sutras du Chandah.

*laghu* et *guru*
al-Bīrūnī, Kitab al-Hind (ca. 1035)

Pour compter les syllabes, ils utilisent les signes | et $S$ pour noter deux types appelés *laghu*, c'est-à-dire léger, et *guru*, c'est-à-dire lourd. Dans les mesures (mâtrâchandas), le *guru* compte pour le double d'un *laghu*, et son espace peut être rempli par deux *laghus.*

## 20 Chandaḥ-Sūtras

Pingala donne des techniques de résolution pour cinq problèmes, concernant les vers de $n$ syllabes.

- comment les lister,
- étant donnée une alternance de $n$ laghus et gurus, comment trouver son rang dans la liste,
- la réciproque : étant donné un rang, retrouver la métrique correspondante,
- calculer le nombre total de métriques de $n$ syllabes,
- calculer le nombre de métriques de $k$ *laghus* et $n-k$ *gurus*, c'est à dire $n$ choisir $k$.

Chandaḥ-Sūtras
Piṅgala (IIe siècle av. J.C.)

1. lister les métriques de $n$ syllabes
2. trouver le rang d'une métrique donnée
3. trouver la métrique de rang donné dans la liste
4. calculer le nombre total de métriques de $n$ syllabes
5. calculer le nombre de métriques de $k$ *laghus* et $n-k$ *gurus.*

## 21 énumérer les métriques de $n$ syllabes

Voici l'algorithme de Pingala, décrit par un commentateur du dixième siècle : Halayuda.

- écrire *guru* ($S$) et *laghu* (|), l'un au-dessus de l'autre.
- **Répéter** $(n-1)$ **fois** : placer deux copies du tableau précédent l'une au-dessus de l'autre. Mettre une colonne de *gurus* ($S$) à droite de la copie du dessus, une colonne de *laghus* (|) à droite de la copie du dessous.

Bien sûr ce n'est pas la traduction exacte : le « Répéter $(n-1)$ fois » est totalement anachronique. Vous voyez le résultat pour $n = 3$. Remplacez laghu par 1 et guru par 0, lisez les mots binaires de droite à gauche, ils sont écrits dans l'ordre lexicographique.

énumérer les métriques de $n$ syllabes
Piṅgala, Chandaḥ-Sūtras (IIe siècle av. J.C.), Halāyudha (Xe siècle)

1. écrire *guru* ($S$) et *laghu* (|), l'un au-dessus de l'autre.
2. **Répéter** $(n-1)$ **fois** : placer deux copies du tableau précédent l'une au-dessus de l'autre. Mettre une colonne de *gurus* ($S$) à droite de la copie du dessus, une colonne de *laghus* (|) à droite de la copie du dessous.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | $S$ | $S$ | $S$ |
| 2 | $\vert$ | $S$ | $S$ |
| 3 | $S$ | $\vert$ | $S$ |
| 4 | $\vert$ | $\vert$ | $S$ |
| 5 | $S$ | $S$ | $\vert$ |
| 6 | $\vert$ | $S$ | $\vert$ |
| 7 | $S$ | $\vert$ | $\vert$ |
| 8 | $\vert$ | $\vert$ | $\vert$ |

# 22 énumérer les métriques de $n$ syllabes

Voici un algorithme original, donné par un autre commentateur du dixième siècle, Kedara.

- commencer par une ligne de $n$ *gurus*.
- **Répéter** : commencer une ligne et remplir avec des *gurus*, jusqu'au premier *guru* de la ligne précédente. Écrire un *laghu* à cette place, puis recopier le reste de la ligne précédente.
  **Jusqu'à** la ligne composée uniquement de *laghus*.

Ce n'est pas évident : il faut un peu réfléchir, mais l'algorithme écrit bien les $2^n$ mots binaires, dans le même ordre que l'algorithme précédent.

énumérer les métriques de $n$ syllabes
Piṅgala, Chandaḥ-Sūtras (IIe siècle av. J.C.), Kedāra (xe siècle)

1. commencer par une ligne de $n$ *gurus* ($S$).
2. **Répéter** : commencer une ligne et remplir avec des *gurus*, jusqu'au premier *guru* ($S$) de la ligne précédente. Écrire un *laghu* ($|$) à cette place, puis recopier le reste de la ligne précédente.
   **Jusqu'à** la ligne composée uniquement de *laghus* ($|$).

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | $S$ | $S$ | $S$ |
| 2 | $\vert$ | $S$ | $S$ |
| 3 | $S$ | $\vert$ | $S$ |
| 4 | $\vert$ | $\vert$ | $S$ |
| 5 | $S$ | $S$ | $\vert$ |
| 6 | $\vert$ | $S$ | $\vert$ |
| 7 | $S$ | $\vert$ | $\vert$ |
| 8 | $\vert$ | $\vert$ | $\vert$ |

# 23 trouver le rang d'une métrique donnée

Maintenant comment retrouver le rang d'un mot binaire donné ? Voici ce que dit Pingala. Il faut écrire une puissance de deux en face de chaque syllabe, en commençant par 1, et jusqu'à $2^{n-1}$. Il faut ensuite annuler les puissances de deux qui sont associées à des gurus. Ajoutez le tout, ajoutez encore 1, et vous avez le rang.

Voyez ce que ça donne pour un mot binaire de longueur 6, laghu, laghu, guru, laghu, guru, laghu. On écrit en-dessous 1, 2, 4, 8, 16, 32. On annule 4 et 16 qui correspondent à des gurus. La somme égale 43, plus un égale 44.

C'est bien une transformation de la base 2 à la base 10.

trouver le rang d'une métrique donnée
Piṅgala, Chandaḥ-Sūtras (IIe siècle av. J.C.), Kedāra (xe siècle)

1. associer les puissances de 2 aux syllabes,
2. annuler les puissances de 2 associées aux *gurus* ($S$),
3. sommer, puis augmenter de 1,

$n = 6$

$| \quad | \quad S \quad | \quad S \quad |$

$1 + 2 + 0 + 8 + 0 + 32 + 1 = 44$

# 24 trouver la métrique de rang donné

L'opération inverse maintenant. Pingala dit de partir du rang donné, le diviser par deux si possible, sinon ajouter un avant de diviser par deux. Si le nombre est pair, noter laghu, sinon, noter guru.

Voyez ce que ça donne pour le rang 44. Pair, Pair, impair, pair, impair, pair, donc laghu, laghu, guru, laghu, guru, laghu.

C'est bien ainsi que l'on passe de la base 10 à la base 2.

trouver la métrique de rang donné
Piṅgala, Chandaḥ-Sūtras (IIe siècle av. J.C.), Kedāra (xe siècle)

1. **si** $m$ pair **alors** $m \longleftarrow m/2$ ; écrire *laghu* ($|$)
2. **sinon** $m \longleftarrow (m+1)/2$ ; écrire *guru* ($S$).

$n = 6$

$$m = 44 \longrightarrow 22 \longrightarrow 11 \longrightarrow 6 \longrightarrow 3 \longrightarrow 2 \longrightarrow 1$$

$$| \quad | \quad S \quad | \quad S \quad |$$

# 25 meru-prastāra

Meru-prastara signifie règle de développement pyramidal. C'est écrit de manière tellement condensée chez Pingala, que les spécialistes ne sont pas d'accord sur ce qu'il a voulu dire exactement. En tout cas, dans les commentaires de Halayuda au dixième siècle, la règle est parfaitement claire. Beaucoup plus claire d'ailleurs que dans le traité de Pascal.

« Après avoir dessiné un carré en haut, deux carrés sont dessinés en dessous, de sorte que la moitié de chacun soit étendue de chaque côté. En-dessous trois carrés, en-dessous quatre carrés sont dessinés et le processus est répété jusqu'à atteindre la pyramide désirée. »

On commence donc par dessiner une pyramide de carrés en quinconce.

meru-prastāra
Piṅgala, Chandaḥ-Sūtras (IIe siècle av. J.C.), Halāyudha (xe siècle)

Ici est expliquée la règle de développement pyramidal (meru-prastāra) des combinaisons d'une, deux etc., syllabes formées de sons courts et longs. Après avoir dessiné un carré en haut, deux carrés sont dessinés en dessous, de sorte que la moitié de chacun soit étendue de chaque côté. En-dessous trois carrés, en-dessous quatre carrés sont dessinés et le processus est répété jusqu'à atteindre la pyramide désirée.

## 26 meru-prastāra

« Dans le premier carré, le symbole pour un doit être placé. Ensuite dans chacun des deux carrés de la seconde ligne, le chiffre un est placé. Ensuite sur la troisième ligne le chiffre un est placé dans chacun des carrés extrêmes. Dans le carré du milieu la somme des chiffres des deux carrés immédiatement au-dessus doit être placée. [. . . ]

etc. . . Les carrés suivants sont remplis de cette manière. Ainsi la seconde ligne donne le développement des combinaisons d'une syllabe ; la troisième ligne la même chose pour deux syllabes, la quatrième ligne pour trois syllabes, et ainsi de suite. »

Donc au moins au dixième siècle, mais probablement bien avant, les Indiens savaient tracer un triangle arithmétique pour calculer les nombres de combinaisons. Ils savaient aussi bien sûr, que la somme des coefficients de chaque ligne est le nombre total de vers de $n$ syllabes, soit $2^n$. C'est un cas particulier de la formule du binôme.

meru-prastāra

Piṅgala, Chandaḥ-Sūtras (II[e] siècle av. J.C.), Halāyudha (X[e] siècle)

Dans le premier carré, le symbole pour un doit être placé. Ensuite dans chacun des deux carrés de la seconde ligne, le chiffre un est placé. Ensuite sur la troisième ligne le chiffre un est placé dans chacun des carrés extrêmes. Dans le carré du milieu la somme des chiffres des deux carrés immédiatement au-dessus doit être placée. [. . . ] Les carrés suivants sont remplis de cette manière. Ainsi la seconde ligne donne le développement des combinaisons d'une syllabe ; la troisième ligne la même chose pour deux syllabes, la quatrième ligne pour trois syllabes, et ainsi de suite.

## 27 la fontaine de Pingala

L'exploit de Pingala a été commémoré dans une université indienne par cette fontaine qui représente le triangle arithmétique avec des hexagones.

Mais ce n'était peut-être pas tout. Vous vous souvenez qu'al-Biruni nous a dit que les syllabes longues sont comptées comme le double des courtes. Jusqu'ici, ce n'était pas entré en ligne de compte. Mais maintenant, au lieu de fixer un nombre de syllabes, on pourrait fixer une longueur totale, et se demander combien de vers de longueur donnée sont possibles.

la fontaine de Piṅgala

Chennai Mathematical Institute (2010)

## 28 nombres de vers de longueur donnée

Là on est encore moins sûr que ce soit exactement ce que Pingala a voulu dire. C'est encore un autre commentateur du dixième siècle, Yadava, qui explique.

Disons que laghu est de longueur 1 et guru de longueur 2. Des vers de longueur 1, il n'y en a qu'un possible. Des vers de longueur 2, il y en a deux, guru, et laghu laghu. Ensuite pour former un vers de longueur trois, il y a deux possibilités. Soit on ajoute un guru après un vers de longueur 1, soit un laghu à la fin d'un vers de longueur 2.

Et ainsi de suite : un vers de longueur $n+1$ est soit un vers de longueur $n-1$ auquel on a ajouté un guru, soit un vers de longueur $n$ avec un laghu en plus.

Vous avez reconnu la récurrence, vous avez reconnu les premiers nombres, c'est la suite de Fibonacci, au moins deux siècles, et peut-être treize siècles, avant Fibonaccci.

nombres de vers de longueur donnée

Piṅgala, Chandaḥ-Sūtras (II[e] siècle av. J.C.), Yādava (X[e] siècle),

<table>
<tr><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th>5</th></tr>
<tr><td>|</td><td>S</td><td>|S</td><td>SS</td><td>|SS</td></tr>
<tr><td></td><td>||</td><td>S|</td><td>||S</td><td>S|S</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>|||</td><td>|S|</td><td>|||S</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>S||</td><td>SS|</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>||||</td><td>||S|</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>|S||</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>S|||</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>|||||</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>5</td><td>8</td></tr>
</table>

$$u_{n+1} = u_{n-1} + u_n$$

## 29 nombres de Fibonacci

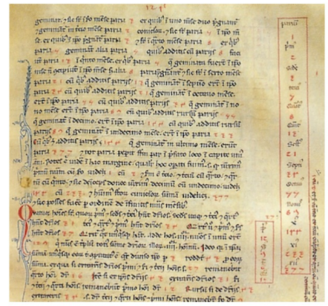
Pour tout vous dire, le décompte des vers de longueur $n$ me paraît autrement moins artificiel que les couples de lapins de Fibonacci.

Voici la page d'un manuscrit du « Liber Abaci » où apparaît le problème. Les nombres de Fibonacci, un, deux, trois, cinq, huit, etc., sont écrits dans la marge de droite.

Pour motiver son calcul, Fibonacci dit : « par nature un couple de lapins engendre un autre couple chaque mois (euh, juste deux, un mâle et une femelle ?), et il commence à se reproduire deux mois après sa naissance. (Ah bon ? Pile deux mois !). La question est, combien de couples de lapins au bout d'un an ? »

Fibonacci annonce : « vous pouvez voir sur le côté comment nous avons procédé : nous avons ajouté le premier nombre avec le second, c'est-à-dire 1 et 2 ; le second avec le troisième, le troisième avec le quatrième, le quatrième avec le cinquième etc. jusqu'à ajouter le dixième avec le onzième, c'est-à-dire 144 avec 233 et nous avons obtenu la somme des couples de lapins qui est 377, et donc cela peut être fait indéfiniment pour n'importe quel nombre de mois. »

nombres de Fibonacci
Leonard de Pise, Liber Abaci (1202)



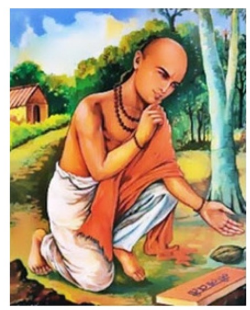
## 30 Mahāvīrāchārya

Une preuve du succès de la combinatoire binaire de Pingala, est qu'on la retrouve énoncée dans les manuels de mathématiques indiens, bien après Pingala.

Mahaviracharya, ou « le maître Mahavira », vivait pratiquement un millénaire après Pingala. Pourtant dans son manuel de mathématiques, le Ganita-Sara-Sangraha, les algorithmes de Pingala, sont reproduits, avec des formulations assez proches.

À une exception près, le Meru-Prastara, le triangle arithmétique. Voici comment Mahavira fait pour calculer les nombres de combinaisons.

Mahāvīrāchārya
IX<sup>e</sup> siècle



## 31 le nombre des variétés de vers

« Les nombres naturels commençant par un et jusqu'au nombre de syllabes du vers sont écrits dans l'ordre normal, puis dans l'ordre inverse, en deux lignes l'une au-dessus de l'autre. Quand les nombres dans une ligne sont multipliés de droite à gauche, et divisés par les produits dans la ligne en-dessous, le quotient représente le nombre de variétés de vers avec un nombre donné de syllabes courtes ou longues. »

C'est bien le calcul de factorielle $n$ sur factorielle $k$ factorielle $n-k$ dont vous avez l'habitude. Cette alternative au triangle arithmétique, est donc elle aussi, connue depuis très longtemps.

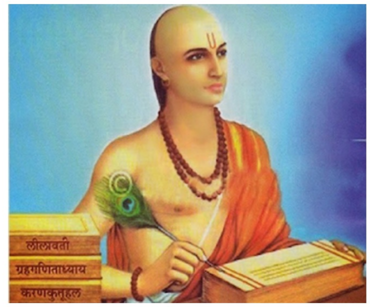
le nombre des variétés de vers
Mahāvīra, Ganita-sāra-saṅgraha, ca. 850

Les nombres naturels commençant par un et jusqu'au nombre de syllabes du vers sont écrits dans l'ordre normal, puis dans l'ordre inverse, en deux lignes l'une au-dessus de l'autre. Quand les nombres dans une ligne sont multipliés de droite à gauche, et divisés par les produits dans la ligne en-dessous, le quotient représente le nombre de variétés de vers avec un nombre donné de syllabes courtes ou longues.

$$\frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}$$

# 32 Bhāskarāchārya (1114–1185)

Bhāskarāchārya (1114–1185)




Chez Mahavira, comme chez Pingala, le vocabulaire est toujours celui des syllabes longues ou courtes. Rien n'indique qu'ils étaient conscients que laghu et guru pourraient être remplacés par une autre alternative binaire.

Quand le maître Bhaskara expose les mêmes calculs dans sa Lilavati, les exercices d'application ne laissent aucun doute.

# 33 combinaisons d'ouvertures et de goûts

« Dans un édifice agréable, spacieux et élégant, contruit par un architecte habile comme palais pour le seigneur du lieu, il y a huit fenêtres. Donne-moi les combinaisons d'ouvertures avec 1, 2, 3 etc. fenêtres ouvertes. »

Et en suivant :

« Dis-moi, mathématicien, combien y a-t-il de combinaisons pour une recette parmi six ingrédients de différents goûts, sucré, âcre, âpre, aigre, salé, amer, en les prenant par un, par deux, par trois, etc. »

François Patte me dit que ce ne sont pas des recettes de cuisine, mais des recettes pour des médicaments. Ça ne fait rien, je ne suis pas sûr que j'aurais eu envie de goûter les 63 combinaisons.

combinaisons d'ouvertures et de goûts

Bhāskara, Līlāvatī (1150)

Dans un édifice agréable, spacieux et élégant, construit par un architecte habile, comme palais pour le seigneur du lieu, il y a huit fenêtres. Donne-moi les combinaisons d'ouvertures avec 1, 2, 3 etc. fenêtres ouvertes.

Dis-moi, mathématicien, combien y a-t-il de combinaisons pour une recette parmi six ingrédients de différents goûts, sucré, âcre, âpre, aigre, salé, amer, en les prenant par un, par deux, par trois, etc.

# 34 références

Alors à votre avis, qui l'a gagné ce match sur le triangle de Pascal ? Eh bien, ni Pascal, ni Tartaglia, ni les Chinois, ni les Arabes.

Tout porte à croire que, une fois de plus, Krishna a conduit le char d'Arjuna vers la victoire.

références


- A. K. Bag (1966) Binomial theorem in ancient India, *Indian J. Hist. Science*, 1(1), 68–74
- K. Plofker (2009) *Mathematics in India*, Princeton : Princeton University Press
- J. Shah (2016) History of Piṅgala's combinatorics, *GanitaBharati*, à paraître
- P. Singh (1985) The so-called Fibonacci numbers in ancient and medieval India, *Historia Mathematica*, 12, 229–244
- R. Sridharan (2005) Sanskrit prosody, Piṅgala Sutras and binary arithmetics, *in G. Emch et al. eds, Contributions to the history of Indian mathematics*, New Delhi : Hindustan Book Agency, pp. 34–62
- R. Wilson, J.J. Watkins eds. (2013) *Combinatorics : ancient and modern*, Oxford University Press