0 Et ainsi de suite à l'infini

Qui a inventé le raisonnement par récurrence ? Eh bien comme d'habitude, je n'en sais rien. On se demande bien pourquoi je vous raconte autant d'histoires, si c'est pour ressasser que je n'ai pas les réponses aux questions les plus naturelles.

Pourtant, dans le cas du raisonnement par récurrence, les choses avaient l'air simples.

histoires d'arithmétique

Et ainsi de suite à l'infini

de l'induction à la récurrence

hist-math.fr Bernard Ycart

1 Blaise Pascal (1623–1662)

Il apparaît pour la première fois dans un texte de Pascal.

Blaise Pascal (1623–1662)

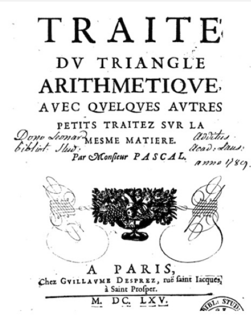
2 Traité du triangle arithmétique (1654–1665)

Le Traité du triangle arithmétique. C'est de ce traité que nous vient l'expression « triangle de Pascal », même si Pascal était bien conscient de n'être pas le premier.

Pascal l'a écrit avant sa période mystique, après sa correspondance sur les probabilités avec Fermat, à l'automne 1654. Il n'a été imprimé qu'après la mort de Pascal, en 1665.

On y trouve deux raisonnements par récurrence.

Traité du triangle arithmétique (1654–1665)
Blaise Pascal (1623–1662)



TRAITE
DV TRIANGLE
ARITHMETIQVE.
AVEC QVELQVES AVTRES
PETITS TRAITEZ SVR LA
MESME MATIERE.
Par Monsieur PASCAL.

A PARIS,
Chez GVILLAVME DESPREZ, ruë saint Iacques, à Saint Prosper.
M. DC. LXV.

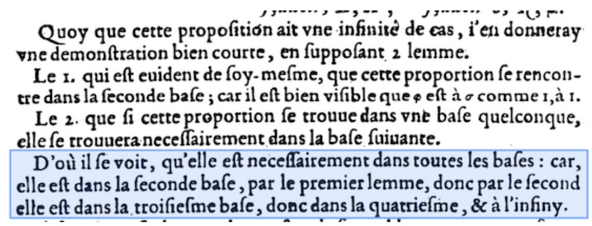
3 elle est necessairement dans toutes les bases

Le premier est celui-ci.

« Quoi que cette proposition ait une infinité de cas, j'en donnerai une démonstration bien courte, en supposant deux lemmes.

Le premier, que cette proposition se rencontre dans la seconde base. (C'est l'initialisation.)

elle est necessairement dans toutes les bases
Pascal, Traité du triangle arithmétique p. 18 (1654)


Quoy que cette propoſition ait vne infinité de cas, i'en donneray vne demonſtration bien courte, en ſuppoſant 2 lemme.
Le 1. qui eſt euident de ſoy-meſme, que cette proportion ſe rencontre dans la ſeconde baſe; car il eſt bien viſible que φ eſt à σ comme 1, à 1.
Le 2. que ſi cette proportion ſe trouue dans vne baſe quelconque, elle ſe trouuera neceſſairement dans la baſe ſuiuante.
D'où il ſe voit, qu'elle eſt neceſſairement dans toutes les baſes : car, elle eſt dans la ſeconde baſe, par le premier lemme, donc par le ſecond elle eſt dans la troiſieſme baſe, donc dans la quatrieſme, & à l'infiny.

Le second que si cette proposition se trouve dans une base quelconque, elle se trouvera nécessairement dans la base suivante. (C'est l'hérédité.)

D'où il se voit, qu'elle est nécessairement dans toutes les bases : car elle est dans la seconde base, par le premier lemme, donc par le second elle est dans la troisième base, donc dans la quatrième, et à l'infini. »

Remarquez que Pascal ne fait pas appel à l'axiome de récurrence. Et pour cause : il ne sera introduit par Grassmann, puis Dirichlet et enfin Peano, que dans la seconde moitié du dix-neuvième siècle.

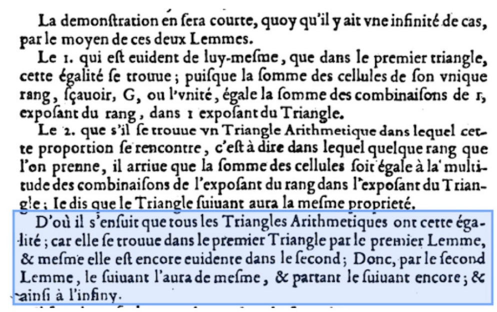
Pascal se contente d'un argument du type « on voit bien que », qui au fond était celui de tous ses prédécesseurs. La nouveauté est l'expression de l'hérédité : si la proposition est vraie pour une base quelconque, elle est vraie pour la suivante.

4 d'où il s'ensuit que tous ont cette égalité

La seconde occurrence dans le Traité du triangle arithmétique est formulée pratiquement dans les mêmes termes.

« La démonstration en sera courte, quoiqu'il y ait une infinité de cas, par le moyen de ces deux lemmes.

d'où il s'ensuit que tous ont cette égalité
Pascal, Traité du triangle arithmétique p. 18 (1654)


La demonſtration en ſera courte, quoy qu'il y ait vne infinité de cas, par le moyen de ces deux Lemmes.
Le 1. qui eſt euident de luy-meſme, que dans le premier triangle, cette égalité ſe trouue; puiſque la ſomme des cellules de ſon vnique rang, ſçauoir, G, ou l'vnité, égale la ſomme des combinaiſons de 1, expoſant du rang, dans 1 expoſant du Triangle.
Le 2. que s'il ſe trouue vn Triangle Arithmetique dans lequel cette proportion ſe rencontre, c'eſt à dire dans lequel quelque rang que l'on prenne, il arriue que la ſomme des cellules ſoit égale à la multitude des combinaiſons de l'expoſant du rang dans l'expoſant du Triangle; Ie dis que le Triangle ſuiuant aura la meſme proprieté.
D'où il s'enſuit que tous les Triangles Arithmetiques ont cette égalité; car elle ſe trouue dans le premier Triangle par le premier Lemme, & meſme elle eſt encore euidente dans le ſecond; Donc, par le ſecond Lemme, le ſuiuant l'aura de meſme, & partant le ſuiuant encore; & ainſi à l'infiny.

Le premier, qui est évident de lui-même, que dans le premier triangle, cette égalité se trouve.

Le second que s'il se trouve un triangle arithmétique dans lequel cette proportion se rencontre, etc., je dis que le triangle suivant aura la même propriété.

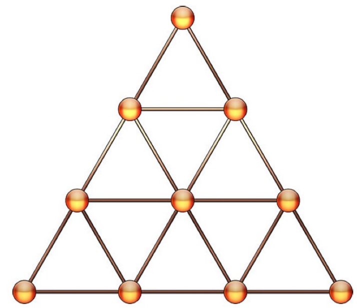
D'où il s'ensuit que tous les triangles arithmétiques ont cette égalité. Et Pascal d'insister à nouveau sans formaliser le raisonnement : donc par le second Lemme, le suivant l'aura de même, et partant le suivant encore, et ainsi à l'infini. »

Comme nous allons le voir, les raisonnements du type « et ainsi de suite jusqu'à l'infini » existent au moins depuis les Grecs.

S'agissant des Grecs, la première chose à comprendre est que le nombre entier était avant tout une notion géométrique.

5 Tetractys

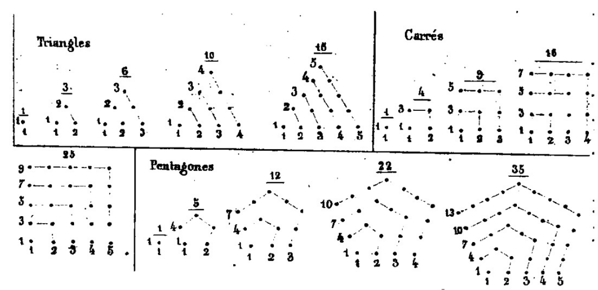
Tetractys
Pythagore (ca. 569–475 av. J.C.)



Pour Pythagore et ses successeurs, voici ce qu'était le nombre dix. Un triangle avec une unité, puis deux, puis trois, puis quatre. En même temps que le nombre dix, ce schéma, appelé Tetractys, était chargé de tout un tas de connotations symboliques, allant de l'individu au cosmos.

6 nombres polygonaux

nombres polygonaux
Nicomaque de Gérase (ca. 60–120)

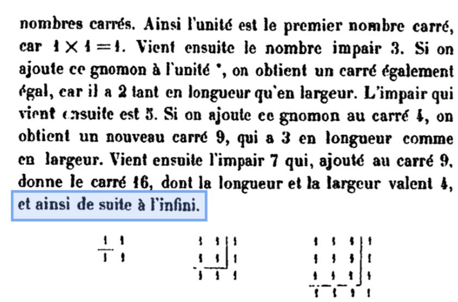


Une des premières notions d'arithmétique qui était enseignée était celle des nombres polygonaux. Vous voyez ici l'illustration qui accompagne l'« introduction à l'arithmétique » de Nicomaque de Gérase. C'est un lointain disciple de Pythagore, six siècles après tout de même.

Comme vous le voyez en haut, on passe d'un nombre triangulaire au suivant. en rajoutant un nombre d'unités égal à l'ordre. En termes modernes, le n-ième nombre triangulaire est la somme des n premiers entiers. Que deux fois le n-ième nombre triangulaire soit égal au nombre rectangulaire $n(n+1)$ se voit sur une figure : il suffit de ranger les unités convenablement.

7 nombres carrés

nombres carrés
Théon de Smyrne (ca. 70–135)


nombres carrés. Ainsi l'unité est le premier nombre carré, car 1 × 1 = 1. Vient ensuite le nombre impair 3. Si on ajoute ce gnomon à l'unité *, on obtient un carré également égal, car il a 2 tant en longueur qu'en largeur. L'impair qui vient ensuite est 5. Si on ajoute ce gnomon au carré 4, on obtient un nouveau carré 9, qui a 3 en longueur comme en largeur. Vient ensuite l'impair 7 qui, ajouté au carré 9, donne le carré 16, dont la longueur et la largeur valent 4, et ainsi de suite à l'infini.

Voici, pour les nombres carrés, la démonstration d'un autre successeur de Pythagore, Théon de Smyrne. Non, ce n'est pas le papa d'Hypatie, c'était trois siècles avant.

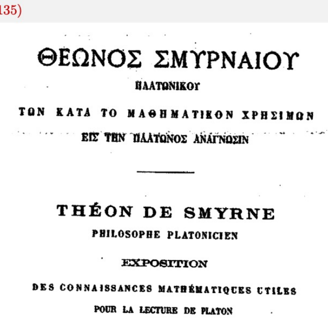
Théon de Smyrne montre que les nombres carrés sont somme des impairs successifs. Il ajoute à chaque carré, ce qu'il appelle un gnomon. C'est-à-dire l'équerre formée de 3 unités, puis 5, puis 7 : les impairs consécutifs.

Vous voyez la dernière phrase : « Vient ensuite l'impair 7 qui, ajouté au carré 9 donne le carré 16, dont la longueur et la largeur valent 4, et ainsi de suite à l'infini ».

Pas de récurrence là-dedans. La propriété et sa démonstration sont toutes les deux géométriques.

8 connaissances mathématiques pour la lecture de Platon

Connaissances mathématiques pour la lecture de Platon
Théon de Smyrne (ca. 70–135)


ΘΕΩΝΟΣ ΣΜΥΡΝΑΙΟΥ
ΠΛΑΤΩΝΙΚΟΥ
ΤΩΝ ΚΑΤΑ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΝ ΧΡΗΣΙΜΩΝ
ΕΙΣ ΤΗΝ ΠΛΑΤΩΝΟΣ ΑΝΑΓΝΩΣΙΝ

THÉON DE SMYRNE
PHILOSOPHE PLATONICIEN
EXPOSITION
DES CONNAISSANCES MATHÉMATIQUES UTILES
POUR LA LECTURE DE PLATON

Ce qui précède est tiré de ce livre : « Des connaissances mathématiques utiles pour la lecture de Platon ». Théon de Smyrne y est présenté comme un philosophe platonicien. Il écrivait tout de même cinq bons siècles après Platon.

Justement, à propos de Platon, voici ce qu'on lit dans un de ses dialogues, intitulé « Parménide ».

9 Parménide (dialogue)

« – Il faut, pour le contact, au moins deux choses.
– Si entre deux choses il s'en trouve une troisième à la suite de l'une et de l'autre, il y aura trois choses, mais seulement deux contacts.
– Et chaque fois qu'on ajoute une chose, s'ajoute un nouveau contact, et toujours il y a un contact de moins qu'il n'y a de choses qui se touchent. [. . .] car on n'ajoute jamais pour une chose qu'un seul contact. – Fort bien.
– Donc, quel que soit le nombre des choses, le nombre des contacts sera toujours plus petit d'une unité. »

Vous avez reconnu le vieux problème des intervalles et des piquets. Si vous regardez bien, la démonstration qu'il y a un piquet de plus que d'intervalles est une démonstration par récurrence, parfaitement formée. Il y a l'initialisation au début, l'hérédité ensuite, et la conclusion : quel que soit le nombre des choses, le nombre des contacts sera toujours plus petit d'une unité.

La question est donc : pourquoi ce type de raisonnement n'a-t-il pas été universellement répandu après Platon ? Il y a deux éléments de réponse : cela tient d'une part au fait que le « et ainsi de suite à l'infini », surtout quand il était étayé par une vision géométrique, satisfaisait tout le monde, et qu'il en a été ainsi pendant très longtemps. Le deuxième élément de réponse, c'est le doute que suscite le raisonnement par induction. Ce doute date d'Aristote.

Parménide (dialogue)
Platon (ca. 428–348 av. J.C.)

– Il faut, pour le contact, au moins deux choses. – Oui.
– Si entre deux choses il s'en trouve une troisième à la suite de l'une et de l'autre, il y aura trois choses, mais seulement deux contacts. – Oui.
– Et chaque fois qu'on ajoute une chose, s'ajoute un nouveau contact, et toujours il y a un contact de moins qu'il n'y a de choses qui se touchent. [. . .] car on n'ajoute jamais pour une chose qu'un seul contact. – Fort bien.
– Donc, quel que soit le nombre des choses, le nombre des contacts sera toujours plus petit d'une unité. – Oui.

10 Derniers analytiques

« Or, la démonstration se tire de principes universels, et l'induction de cas particuliers. Mais il est impossible de connaître les universels autrement que par induction ; c'est par l'induction, en effet, que sont connues même les choses abstraites [. . .] Or, induire est impossible pour qui n'a pas la sensation ; car la sensation s'applique aux objets particuliers ; et pour eux, il ne peut y avoir de science. »

L'utilité de l'induction ne fait pas de doute. On va avoir tendance à l'oublier pendant les siècles suivants. Les risques sont connus également. Ils sont exprimés de façon particulièrement claire par Sextus Empiricus. C'est un philosophe sceptique et médecin du second siècle.

Derniers analytiques
Aristote (384–322 av. J.C.)

Or, la démonstration se tire de principes universels, et l'induction de cas particuliers. Mais il est impossible de connaître les universels autrement que par induction ; c'est par l'induction, en effet, que sont connues même les choses abstraites [. . .] Or, induire est impossible pour qui n'a pas la sensation ; car la sensation s'applique aux objets particuliers ; et pour eux, il ne peut y avoir de science,

11 Les hypotyposes ou institutions pyrrhoniennes

« Je crois que l'on peut encore réfuter facilement la manière d'argumenter qui se fait par induction. Car ceux qui veulent ainsi prouver l'universel par les singuliers, ou bien ils le feront en examinant tous les singuliers, ou bien en en parcourant seulement quelques uns. S'ils n'en suivent que quelques uns, l'induction ne sera pas solide et certaine, parce qu'il se pourra faire que quelques uns des singuliers, qui auront été omis dans l'induction, soient contraires à la proposition universelle. Que s'ils veulent parcourir tous les singuliers, ils entreprendront une chose impossible, les singuliers étant infinis, et n'étant renfermés dans aucunes bornes. Ainsi quelque parti que l'on prenne, il arrive que l'induction est chancelante et peu assurée. »

Les hypotyposes ou institutions pyrrhoniennes

Sextus Empiricus (ca. 160–210)

Je crois que l'on peut encore réfuter facilement la manière d'argumenter qui se fait par induction. Car ceux qui veulent ainsi prouver l'universel par les singuliers, ou bien ils le feront en examinant tous les singuliers, ou bien en en parcourant seulement quelques uns. S'ils n'en suivent que quelques uns, l'induction ne sera pas solide et certaine, parce qu'il se pourra faire que quelques uns des singuliers, qui auront été omis dans l'induction, soient contraires à la proposition universelle. Que s'ils veulent parcourir tous les singuliers, ils entreprendront une chose impossible, les singuliers étant infinis, et n'étant renfermés dans aucunes bornes. Ainsi quelque parti que l'on prenne, il arrive que l'induction est chancelante et peu assurée.

Les choses vont en rester là, jusqu'au dix-septième siècle, le siècle du rationalisme, où Francis Bacon relancera le débat.

En attendant, se contenter de vérifier quelques cas, et terminer par « ainsi de suite jusqu'à l'infini » est considéré comme une méthode parfaitement rigoureuse par tout le monde. L'exemple vient d'en haut : du modèle même de la rigueur mathématique, le livre d'enseignement par excellence, les Éléments d'Euclide. Il contient quatre parties d'arithmétique, les livres sept à dix. Voici quelques exemples d'énoncés.

12 Éléments, Livre IX, Proposition VIII

« Si à partir de l'unité, tant de nombres qu'on voudra sont successivement proportionnels, le troisième, à partir de l'unité, sera un carré, et tous ceux qui en laissent un ; le quatrième un cube, et tous ceux qui en laissent deux ; le septième un cube et un carré tout à la fois, et tous ceux qui en laissent cinq. »

Éléments, Livre IX, Proposition VIII

Euclide (ca. 325–265 av. J.C.)

Si à partir de l'unité, tant de nombres qu'on voudra sont successivement proportionnels, le troisième, à partir de l'unité, sera un carré, et tous ceux qui en laissent un ; le quatrième un cube, et tous ceux qui en laissent deux ; le septième un cube et un carré tout à la fois, et tous ceux qui en laissent cinq.

Je vous laisse le soin de transformer ce qui précède en énoncés rigoureux, et d'en donner les démonstrations par récurrence.

Le résultat d'arithmétique le plus célèbre chez Euclide dit qu'il y a une infinité de nombres premiers. C'est la proposition vingt du livre neuf.

13 Éléments, Livre IX, Proposition XX

« Les nombres premiers sont en plus grande quantité que toute la quantité proposée des nombres premiers.

Soient A, B, Γ les nombres premiers que l'on a proposés ; je dis que les nombres premiers sont en plus grande quantité que les nombres A, B, Γ. »

Éléments, Livre IX, Proposition XX

Euclide (ca. 325–265 av. J.C.)

Les nombres premiers sont en plus grande quantité que toute la quantité proposée des nombres premiers.

Soient A, B, Γ les nombres premiers que l'on a proposés ; je dis que les nombres premiers sont en plus grande quantité que les nombres A, B, Γ.

Que $n = 3$ ne soit qu'un cas particulier et que la démonstration vaille pour tout n est une évidence. Il ne viendrait à l'idée de personne de dire : « soit n un entier quelconque, considérons n nombres premiers ». D'ailleurs on serait bien en peine d'une notation pour ces n nombres premiers : les indices n'apparaîtront que bien plus tard.

Cela n'empêche pas les mathématiciens de faire fonctionner la recherche par induction, et de deviner des lois générales sur les premiers entiers.

Voici un verset de l'Aryabhatya, écrite par le mathématicien et astronome indien Aryabatha, à l'âge de 23 ans.

14 Āryabhatīya (499)

« Le produit continu de trois quantités, c'est-à-dire le nombre de termes plus un, le même augmenté par le nombre de termes, et le nombre de termes, divisé par 6, donne la somme de la série des carrés des nombres naturels.

Le carré de la somme d'une série de nombres naturels donne la somme de la série des cubes de nombres naturels. »

Donc Aryabhata connaissait la somme des n premiers entiers, des n premiers carrés et des n premiers cubes. Il avait sans doute deviné les formules générales à partir des premiers termes, et ne se posait pas la question d'une démonstration.

Du reste Archimède, au troisième siècle avant Jésus-Christ, manipulait des résultats tout aussi compliqués, avec des démonstrations géométriques.

Āryabhaṭīya (499)

Āryabhaṭa (476–550)

Le produit continu de trois quantités, c'est-à-dire le nombre de termes plus un, le même augmenté par le nombre de termes, et le nombre de termes, divisé par 6, donne la somme de la série des carrés des nombres naturels.

Le carré de la somme d'une série de nombres naturels donne la somme de la série des cubes de nombres naturels.

15 Al-Karajī (953–1029)

On commence à trouver la préoccupation de l'hérédité chez les mathématiciens arabes, au début du millénaire suivant. En particulier chez al-Karaji.

Al-Karajī (953–1029)

16 triangle arithmétique

Il est le premier des Arabes à avoir donné des formules de récurrence pour les coefficients combinatoires, et avoir dessiné le triangle arithmétique.

Son successeur et commentateur est as-Samawal. Il est d'ascendance juive, et le fils d'un rabbin marocain. Il s'est converti à l'Islam, au grand dam de sa famille. Il écrit « le brillant en algèbre », à l'âge de 19 ans. On y trouve la première tentative de démonstration rigoureuse de la formule du binôme. Il part de $n = 2$, démontre rigoureusement le cas $n = 3$ à partir du cas $n = 2$, puis le cas $n = 4$ à partir de $n = 3$. Ensuite il dit :

triangle arithmétique

Al-Karajī (953–1029)

17 Formule du binôme $n = 5$

« Celui qui a compris ce que nous venons de dire, peut prouver que pour n'importe quel nombre divisé en deux parties, son cube-carré est égal à la somme des cubes-carrés de chacune de ses parties, cinq fois le produit de chacune de ses parties avec le carré-carré de l'autre, et dix fois le produit du carré de chacune par le cube de l'autre. Et ainsi de suite en ordre ascendant. »

Ce n'est pas encore la récurrence telle que nous la connaissons, c'est toujours le « et ainsi de suite jusqu'à l'infini ».

Formule du binôme $n = 5$

As-Samaw'al (ca. 1130–1180)

Celui qui a compris ce que nous venons de dire, peut prouver que pour n'importe quel nombre divisé en deux parties, son cube-carré est égal à la somme des cubes-carrés de chacune de ses parties, cinq fois le produit de chacune de ses parties avec le carré-carré de l'autre, et dix fois le produit du carré de chacune par le cube de l'autre. Et ainsi de suite en ordre ascendant.

18 Rabbi Levi ben Gersom (1288–1344)

Le témoin suivant est un rabbin du sud de la France, né à Bagnols sur Cèze. Il s'est réfugié en Avignon, sous la protection du pape, pour échapper aux persécutions. Je n'ai aucune garantie de ressemblance sur ce portrait plutôt patibulaire.

Rabbi Levi ben Gersom (1288–1344)

Gersonide

19 Maaseh Hoshev (l'art du calcul) (1321)

Il n'a écrit qu'en hébreu, ce qui n'a pas facilité la diffusion de sa pensée. Ses œuvres les plus importantes sont des traités philosophiques et religieux, et particulier des commentaires d'Averroès, Aristote et Maïmonide.

L'un de ses tout premiers livres est un livre de mathématique, l'« art du calcul ». On y trouve beaucoup de raisonnements sur les permutations, les combinaisons et les arrangements, ce qui est assez original pour l'époque. Voici un extrait.

Maaseh Hoshev (l'art du calcul) (1321)

Rabbi Levi ben Gersom (1288–1344)

20 on montre cela plus loin sans fin

« Si le nombre de permutations d'un nombre donné d'objets différents est égal à un nombre déterminé, alors le nombre de permutations d'un nombre plus grand de 1, d'objets différents, est égal au produit du nombre précédent de permutations par le nombre suivant celui qui est donné. »

En termes modernes : le cardinal de l'ensemble des permutations de $n+1$ objets est $n+1$ fois le cardinal de l'ensemble des permutations de n objets.

Il donne une démonstration extrêmement détaillée, puis passe à l'énoncé suivant.

« Par là, on a démontré que le nombre de permutations d'objets donnés est égal au nombre produit de tous les nombres de la suite naturelle depuis 1 jusqu'au nombre qui détermine le nombre d'objets donnés. »

En clair : le nombre des permutations de n objets est factorielle n.

Il doit vous sembler qu'avec l'énoncé précédent, il avait fait le plus difficile, à savoir établir l'hérédité. Voici comment il conclut.

« En effet le nombre de permutations de 2 est 2, et cela est égal à 1.2, le nombre de permutations de 3 est égal à 3.2, qui est égal à 1.2.3, et l'on montre cela plus loin sans fin. »

on montre cela plus loin sans fin
Gersonide, L'art du calcul (1321)

Si le nombre de permutations d'un nombre donné d'objets différents est égal à un nombre déterminé, alors le nombre de permutations d'un nombre plus grand de 1 d'objets différents est égal au produit du nombre précédent de permutations par le nombre suivant celui qui est donné.

Par là, on a démontré que le nombre de permutations d'objets donnés est égal au nombre produit de tous les nombres de la suite naturelle depuis 1 jusqu'au nombre qui détermine le nombre d'objets donnés.

En effet le nombre de permutations de 2 est 2, et cela est égal à 1.2, le nombre de permutations de 3 est égal à 3.2, qui est égal à 1.2.3, et l'on montre cela plus loin sans fin.

21 Francesco Maurolico (1495–1575)

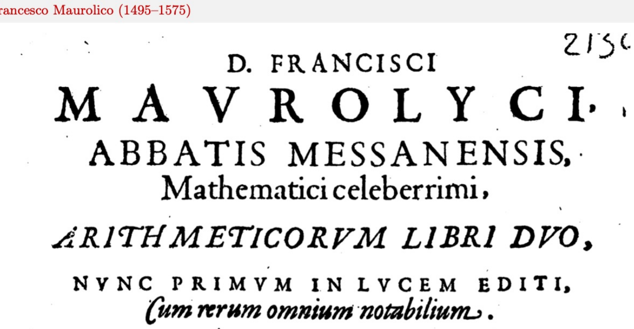
Le suivant sur la liste est un abbé de la ville de Messine, Francesco Maurolico. Un historien italien avait voulu en faire le vrai inventeur de la récurrence, un siècle avant Pascal. C'était aller un peu vite.

Francesco Maurolico (1495–1575)
Maurolycus

22 Arithmeticorum libri duo

Il est l'auteur de ces « deux livres des arithmétiques », parus post-mortem en 1575, mais écrits une vingtaine d'années avant.

Arithmeticorum libri duo
Francesco Maurolico (1495–1575)

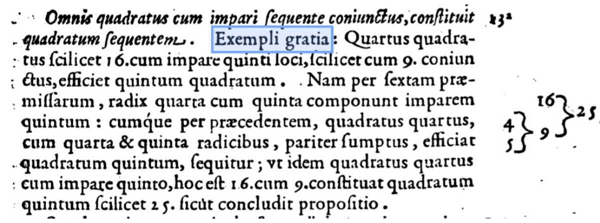

2150
D. FRANCISCI
MAVROLYCI,
ABBATIS MESSANENSIS,
Mathematici celeberrimi,
ARITHMETICORVM LIBRI DVO,
NVNC PRIMVM IN LVCEM EDITI,
Cum rerum omnium notabilium.

23 Proposition 13

Proposition 13

Maurolico, Arithmeticorum libri duo (1575)

Regardez la proposition 13. Il y dit que si on ajoute à un carré l'entier impair du même rang, on obtient le carré suivant. Pour nous : $n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$. Vous voyez l'illustration dans la marge, Maurolico prend un exemple qu'il souhaite convaincant, mais ne fait pas de démonstration.



Omnis quadratus cum impari ſequente coniunctus, conſtituit quadratum ſequentem. Exempli gratia: Quartus quadratus ſcilicet 16. cum impare quinti loci, ſcilicet cum 9. coniunctus, efficiet quintum quadratum. Nam per ſextam præmiſſarum, radix quarta cum quinta componunt imparem quintum: cumque per præcedentem, quadratus quartus, cum quarta & quinta radicibus, pariter ſumptus, efficiat quadratum quintum, ſequitur; vt idem quadratus quartus cum impare quinto, hoc eſt 16. cum 9. conſtituat quadratum quintum ſcilicet 25. ſicut concludit propoſitio. 13ª

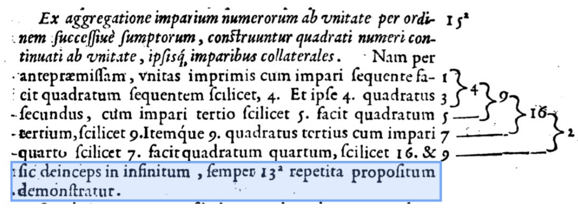
24 Proposition 15

Proposition 15

Maurolico, Arithmeticorum libri duo (1575)

Regardez maintenant la proposition 15. L'énoncé dit que les sommes d'entiers impairs à partir de 1 donnent les carrés consécutifs. À nouveau dans la marge et dans le texte, un cas particulier est détaillé.

Pourtant, regardez l'encadré bleu : Maurolico est conscient du fait que appliquer sa proposition 13… « jusqu'à l'infini », dit-il, démontre son résultat.



Ex aggregatione imparium numerorum ab vnitate per ordinem ſucceſſiuè ſumptorum, conſtruuntur quadrati numeri continuati ab vnitate, ipſisq; imparibus collaterales. Nam per antepræmiſſam, vnitas imprimis cum impari ſequente facit quadratum ſequentem ſcilicet, 4. Et ipſe 4. quadratus ſecundus, cum impari tertio ſcilicet 5. facit quadratum tertium, ſcilicet 9. Itemque 9. quadratus tertius cum impari quarto ſcilicet 7. facit quadratum quartum, ſcilicet 16. & ſic deinceps in infinitum, ſemper 13ª repetita propoſitum demonſtratur. 15ª

25 Claude-Gaspard Bachet de Méziriac (1581–1638)

Claude-Gaspard Bachet de Méziriac (1581–1638)

Voici Bachet de Méziriac, et ses « Problèmes plaisants et délectables qui se font par les nombres ». En fait un livre d'arithmétique de bon niveau pour l'époque. Voici un extrait.

26 le moyen de la démonstration est universel

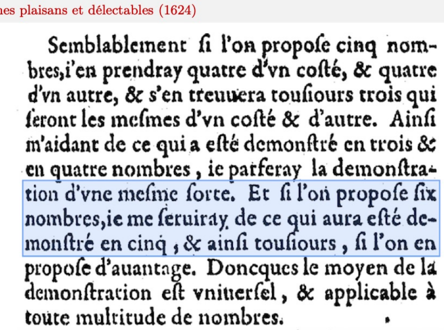
le moyen de la démonstration est universel

Bachet, Problèmes plaisans et délectables (1624)

Il souhaite démontrer la commutativité du produit d'un nombre quelconque de nombres.

Il explique comment passer de trois à quatre, de quatre à cinq, et enfin de cinq à six. Et il ajoute : « et ainsi toujours, si l'on en propose d'avantage. Donc, le moyen de la démonstration est universel, et applicable à toute multitude de nombres ».

Bachet de Méziriac écrit ceci 40 ans avant la publication du Traité du triangle arithmétique de Pascal. On pourrait se dire que la méthode de Pascal a changé la manière d'écrire les démonstrations. Eh bien pas vraiment.



Semblablement ſi l'on propoſe cinq nombres, i'en prendray quatre d'vn coſté, & quatre d'vn autre, & s'en treuuera touſiours trois qui ſeront les meſmes d'vn coſté & d'autre. Ainſi m'aidant de ce qui a eſté demonſtré en trois & en quatre nombres, ie parferay la demonſtration d'vne meſme ſorte. Et ſi l'on propoſe ſix nombres, ie me ſeruiray de ce qui aura eſté demonſtré en cinq, & ainſi touſiours, ſi l'on en propoſe d'auantage. Doncques le moyen de la demonſtration eſt vniuerſel, & applicable à toute multitude de nombres.

27 John Wallis (1616–1703)

L'Arithmetica Infinitorum de Wallis date de 1656. C'est la dernière étape importante avant le calcul différentiel. On y trouve nombre de résultats sur les sommes finies, que l'on démontrerait de nos jours par récurrence. Wallis ne le fait pas. Il se contente de la méthode inductive : on vérifie les premiers pas, et on conclut « ainsi de suite jusqu'à l'infini ».

Trente ans plus tard, dans son Algèbre, Wallis se défend contre ceux qui lui ont reproché sa méthode de démonstration. Il y consacre deux chapitres. Il commence par argumenter que ses démonstrations sont du même type que celles d'Archimède. Puis il poursuit :

John Wallis (1616–1703)

28 Algebra (1685)

« La plupart des mathématiciens que j'ai vus, après avoir continué l'induction pendant quelques pas, et ne voyant aucune raison de ne pas croire qu'elle continuera ainsi, se satisfont de cette preuve pour conclure : « et ainsi de suite pour les puissances suivantes ». Et une telle induction a été considérée jusqu'à présent comme un argument concluant, par ceux qui ne s'enrôlent pas parmi les pinailleurs. »

Suivez son regard. Parmi ceux qui se sont enrôlés parmi les pinailleurs et qui l'ont critiqué, il cite explicitement...

Algebra (1685)
John Wallis (1616–1703)

But most Mathematicians that I have seen, after such Induction continued for some few Steps, (and seeing no reason to disbelieve its proceeding in like manner for the rest), are satisfied (from such evidence,) to conclude universally, *and so in like manner for the consequent Powers.* And such Induction hath been hitherto thought (by such as do not list to be captious) a conclusive argument.

29 Pierre de Fermat (1601–1665)

Pierre de Fermat. Il faut dire que c'est un habitué de la paille dans l'œil du voisin. Pourtant lui aussi n'hésite pas à recourir à l'induction en arithmétique.

Pierre de Fermat (1606–1665)

30 de si grandes lumières qui établissent ma pensée

« Je suis quasi persuadé que tous les nombres progressifs augmentés de l'unité, desquels les exposants sont des nombres de la progression double, sont des nombres premiers, comme

$$3\,,\ 5\,,\ 17\,,\ 257\,,\ 65537\,,\ 4\,294\,967\,297$$

et le suivant de 20 lettres, etc. »

Sa conjecture est donc que 2 à la puissance 2^n, plus un, est un nombre premier pour tout n. Il reconnaît à contre-cœur que ce n'est qu'une conjecture.

« Je n'en ai pas la démonstration exacte, mais j'ai exclu si grande quantité de diviseurs par démonstrations infaillibles, et j'ai de si grandes lumières qui établissent ma pensée, que j'aurais peine à me dédire. »

Le problème c'est que les deux plus grands nombres qu'il cite lui-même, pour $n = 5$ et $n = 6$, ne sont pas des nombres premiers. C'est Euler qui s'est aperçu que la conjecture était fausse.

j'ai de si grandes lumières qui établissent ma pensée
Fermat, lettre à Frénicle (Août 1640)

je suis quasi persuadé que tous les nombres progressifs augmentés de l'unité, desquels les exposants sont des nombres de la progression double, sont des nombres premiers, comme

$$3\,,\ 5\,,\ 17\,,\ 257\,,\ 65537\,,\ 4\,294\,967\,297$$

et le suivant de 20 lettres

$$18\,446\,744\,073\,709\,551\,617\,;\ \text{etc.}$$

Je n'en ai pas la démonstration exacte, mais j'ai exclu si grande quantité de diviseurs par démonstrations infaillibles, et j'ai de si grandes lumières qui établissent ma pensée, que j'aurois peine à me dédire.

31 Jacques Bernoulli (1654–1705)

Il n'y avait pas que Fermat pour critiquer les démonstrations de Wallis. Il y avait aussi Jacques Bernoulli. L'année suivant la parution de l'Algèbre de Wallis, Bernoulli répond aux arguments de Wallis dans les Acta Eruditorum.

En gros Wallis disait qu'il était inutile d'alourdir les démonstrations, alors qu'il suffisait pour se convaincre de quelques cas particuliers.

Jacques Bernoulli (1654–1705)

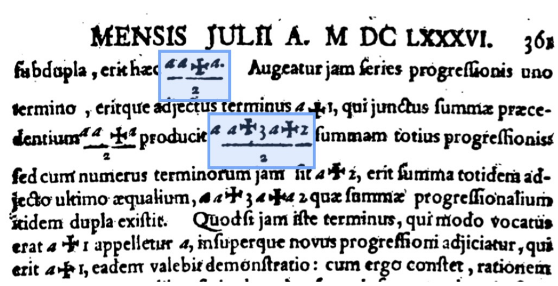
32 Wallisius id sola inductione investigare docet

Bernoulli commence par se plaindre que Wallis ne montre que la recherche par induction, sans donner de vraies démonstrations. Ensuite, il montre qu'une démonstration par récurrence, non content d'être plus rigoureuse, est aussi plus courte.

Inutile de lire le latin pour comprendre l'argumentation. Bernoulli prend pour exemple la somme des a premiers entiers, et démontre l'hérédité : le passage de $(a^2+a)/2$ à $(a^2+3a+2)/2$, en ajoutant $a+1$.

L'air de rien, le fait de désigner la variable entière par une lettre est un vrai progrès, et une vraie nouveauté, même par rapport à Pascal. C'est ce qui fait que certains considèrent Jacques Bernoulli comme le véritable inventeur de la récurrence.

Wallisius id sola inductione investigare docet
Jacques Bernoulli (1654–1705)



MENSIS JULII A. M DC LXXXVI. 361

ſubdupla, erit hæc $\frac{aa+a}{2}$. Augeatur jam ſeries progreſſionis uno termino, eritque adjectus terminus $a+1$, qui junctus ſummæ præcedentium $\frac{aa+a}{2}$ producit $\frac{aa+3a+2}{2}$ ſummam totius progreſſionis; ſed cum numerus terminorum jam ſit $a+2$, erit ſumma totidem adjecto ultimo æqualium, $aa+3a+2$ quæ ſummæ progreſſionalium itidem dupla exiſtit. Quod ſi jam iſte terminus, qui modo vocatus erat $a+1$ appelletur a, inſuperque novus progreſſioni adjiciatur, qui erit $a+1$, eadem valebit demonſtratio: cum ergo conſtet, rationem

33 Récurrence de Cauchy

Tenez en parlant de récurrence, il y en a une qui m'a émerveillé quand je l'ai vue pour la première fois.

Disons qu'une propriété est vraie pour $n = 1$. On démontre que si elle est vraie pour n, elle est vraie pour $2n$. Puis, que si elle est vraie pour $n + 1$, alors elle est vraie pour n. La conclusion est bien qu'elle est vraie pour tout n.

La première utilisation semble bien être due à Cauchy.

Récurrence de Cauchy
Augustin Louis Cauchy (1789–1857)

Si :

$$\begin{cases} P(1) & \\ \forall n \geqslant 1,\ P(n) & \Longrightarrow\ P(2n) \\ \forall n \geqslant 1,\ P(n+1) & \Longrightarrow\ P(n) \end{cases}$$

alors,

$$\forall n \geqslant 1, \quad P(n)\,.$$

34 Augustin Louis Cauchy (1789–1857)

Pensez donc, le père de la rigueur mathématique au dix-neuvième siècle.

Augustin Louis Cauchy (1789–1857)

35 Cours d'Analyse de l'Ecole Royale Polytechnique (1821)

En plus, ça vient du « Cours d'Analyse à l'École polytechnique », le modèle qui a façonné toute une génération de mathématiciens.

Pas de doute, cela ne peut être qu'irréprochable. Allez : on regarde ?

Cours d'Analyse de l'Ecole Royale Polytechnique (1821)
Augustin Louis Cauchy (1789–1857)

COURS D'ANALYSE

DE

L'ÉCOLE ROYALE POLYTECHNIQUE ;

PAR M. AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY,

Ingénieur des Ponts et Chaussées, Professeur d'Analyse à l'École polytechnique, Membre de l'Académie des sciences, Chevalier de la Légion d'honneur.

I.re PARTIE. *ANALYSE ALGÉBRIQUE.*

36 Soit n le nombre des lettres A, B, C, D, ...

Voici le théorème.

La moyenne géométrique entre plusieurs nombres A, B, C, D, ... est toujours inférieure à leur moyenne arithmétique.

Ah bon ? A, B, C, D ? Pas de « quel que soit n » ? Ben non. Soit n le nombre des lettres A, B, C, D.

Qui a osé dire $n = 4$? Vous me copierez 100 fois « Cauchy est le plus grand mathématicien français ».

Soit n le nombre des lettres A, B, C, D, ...
Cauchy, Cours d'Analyse de l'Ecole Royale Polytechnique (1821)

17.e THÉORÈME. *La moyenne géométrique entre plusieurs nombres A, B, C, D, ... est toujours inférieure à leur moyenne arithmétique.*

DÉMONSTRATION. Soit *n* le nombre des lettres *A, B, C, D, ...* Il suffira de prouver qu'on a généralement

37 en prenant successivement $n = 4$, $n = 8$, &c. . .

Continuons. Il n'y a pas de passage de n à $2n$, juste l'affirmation de la propriété pour 2^n. Démontrée par récurrence ? Que nenni ! Démontrée par la bonne vieille méthode du « et cetera point, point, point ».

en prenant successivement $n = 4$, $n = 8$, &c. . .
Cauchy, Cours d'Analyse de l'Ecole Royale Polytechnique (1821)

Or, en premier lieu, on aura évidemment, pour $n=2$,

$$AB = \left(\frac{A+B}{2}\right)^2 - \left(\frac{A-B}{2}\right)^2 < \left(\frac{A+B}{2}\right)^2;$$

et l'on en conclura, en prenant successivement $n=4$, $n=8$, &c.... enfin $n=2^m$,

$$ABCD < \left(\frac{A+B}{2}\right)^2\left(\frac{C+D}{2}\right)^2 < \left(\frac{A+B+C+D}{4}\right)^4,$$

$$ABCDEFGH < \left(\frac{A+B+C+D}{4}\right)^4\left(\frac{E+F+G+H}{4}\right)^4 < \left(\frac{A+B+C+D+E+F+G+H}{8}\right)^8,$$

&c. . . . .

(37) $$ABCD\ldots < \left(\frac{A+B+C+D+\ldots}{2^m}\right)^{2^m}.$$

38 on désignera par 2^m un terme supérieur à n

Enfin le passage arrière de $n+1$ à n ? Ben non. On part de la propriété pour 2^m pour passer à un n quelconque, toujours avec des « point, point, point ».

on désignera par 2^m un terme supérieur à n
Cauchy, Cours d'Analyse de l'Ecole Royale Polytechnique (1821)

En second lieu, si n n'est pas un terme de la progression géométrique

$$2,\ 4,\ 8,\ 16,\ \&c.\ldots,$$

on désignera par 2^m un terme de cette progression supérieur à n, et l'on fera

$$K = \frac{A+B+C+D+\ldots.}{n};$$

puis, en revenant à la formule (37), et supposant dans le premier membre de cette formule les $2^m - n$ derniers facteurs égaux à K, on trouvera

39 références

S'il y a bien une chose que je ne souhaite pas, c'est que vous m'enrôliez parmi les pinailleurs.

Mais quand même, juste pour le plaisir, essayez d'écrire la démonstration de Cauchy sans « point, point, point », vous verrez, elle est vraiment splendide.

références

- F. Acerbi (2000) Plato : Parmenides 149a7-c3 ; a proof by complete induction, *Arch. Hist. Exact Sci.*, 55, 57–76
- S. Bajri, J. Hannah, C. Montelle (2015) Revisiting Al-Samaw'al's table of binomial coefficients : Greek inspiration, diagrammatic reasoning and mathematical induction, *Arch. Hist. Exact Sci.*, 69(6) 537–576
- F. Cajori (1918) Origin of the name "Mathematical Induction", *Amer. Math. Monthly*, 25(5) 197–201
- K. Chemla, S. Pahaut (1992) Remarques sur les ouvrages mathématiques de Gersonide, *in : G. Freudenthal (ed.), Studies on Gersonides – A 14th century Jewish philosopher-scientist*, Leiden : Brill, 149–191
- R. Rashed (1972) L'induction mathématique : al-Karajī, as-Samaw'al, *Arch. Hist. Exact Sci.*, 9(1), 1–21