

0 La tour de Hanoï

« Écoutez, petits et grands, cette merveilleuse et véridique histoire ! C'est une vieille légende indienne, tirée du Mahabarahta par le moine Ahu, maître de Chapelle à la Sublime Trompette. Elle nous a été transcrite du Sanscrit par le grand Archi-Prêtre des sacrifices Te-Chu-Pog, ordonnateur des hécatombes de baleines, au Palais des Mastodontes – et Cétacés – de Patalipûtra, la Cité des Fleurs, l'antique Capitale des Monarques historiques de l'Inde. »

histoires d'arithmétique

La tour de Hanoï

amuser pour instruire



hist-math.fr

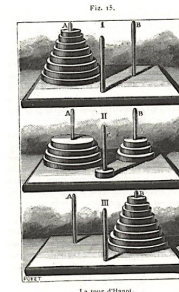
Bernard YCART

1 La tour d'Hanoï

« Dans le grand temple de Bénarès, au-dessous du dôme qui marque le centre du monde, on aperçoit trois aiguilles de diamant, plantées dans une dalle d'airain, hautes d'une coudée et grosses comme le corps d'une abeille. Sur l'une de ces aiguilles, le dieu Parabavastû enfile, au commencement des siècles, soixante-quatre disques d'or pur, le plus large reposant sur le bronze et les autres, de plus en plus étroits, superposés jusqu'au sommet. C'est la Tour sacrée de Vishnou. »

La tour d'Hanoï

jeu tombé de Saturne



2 La tour d'Hanoï

« Nuit et jour, les bonzes se succèdent sur les marches de l'autel, occupés à transporter la Tour Sacrée, de la première aiguille sur la troisième, étage par étage, sans jamais intervertir, sans jamais s'écarter des règles immuables imposées par Brahma. Quand tout sera fini, la Tour et les Brahmes tomberont et ce sera la fin des mondes. »

La tour d'Hanoï

par le Mandarin N. Claus (de Siam)

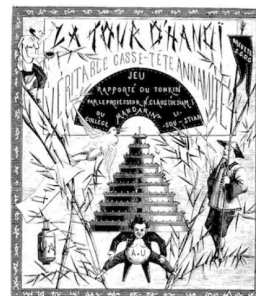
Nuit et jour, les bonzes se succèdent sur les marches de l'autel, occupés à transporter la Tour Sacrée, de la première aiguille sur la troisième, étage par étage, sans jamais intervertir, sans jamais s'écarter des règles immuables imposées par Brahma. Quand tout sera fini, la Tour et les Brahmes tomberont et ce sera la fin des mondes.

3 N. Claus (de Siam), mandarin du collège Li-Sou-Stian

N. Claus (de Siam), mandarin du collège Li-Sou-Stian
Édouard Lucas (d'Amiens), professeur au Lycée Saint-Louis

L'amateur de calembours, l'auteur de cette légende déjantée, qui se cache sous l'anagramme Claus de Siam, c'est Édouard Lucas, professeur au Lycée Saint-Louis.

Mais au fait, pourquoi Tour de Hanoï, pourquoi le jeu est-il, soi-disant rapporté du Tonkin ?



4 Expédition du Tonkin (1883–1885)

Expédition du Tonkin (1883–1885)

Le Tonkin, c'est le Vietnam actuel. En 1883, le Tonkin était au centre de l'actualité, suite à l'expédition coloniale que la France y avait lancée, sous l'impulsion de Jules Ferry.



5 Édouard Lucas (1842–1891)

Édouard Lucas (1842–1891)

Édouard Lucas, le voici. C'était un original, un caractère bien trempé, qui aimait plaisanter. C'était aussi un arithméticien original. Pour vous donner une idée de ses mathématiques, ses contributions principales ont été tirées d'une réciproque au petit théorème de Fermat. Voici comment il l'énonce.



6 Réciproque du théorème de Fermat

« Soit a un nombre premier avec n : si $a^x - 1$ est divisible par n , pour x égal à $(n-1)$, et n'est pas divisible par n pour x égal à une partie aliquote de $(n-1)$, le nombre n est premier. »

Le théorème de Fermat dit que si n est premier, $a^{n-1} - 1$ est divisible par n . En donnant une condition suffisante, Lucas ouvrait la voie à des tests de primalité, qui sont encore utilisés aujourd'hui. Pour autant, il n'a pas été pris complètement au sérieux par ses contemporains, en particulier par le milieu académique français. Mais sur ce milieu à l'époque, voici ce qu'écrivait Gaston Darboux en mars 1870. Darboux était un mathématicien de la même promotion que Lucas.

Réciproque du théorème de Fermat
Édouard Lucas (1876)

Soit a un nombre premier avec n : si $a^x - 1$ est divisible par n , pour x égal à $(n-1)$, et n'est pas divisible par n pour x égal à une partie aliquote de $(n-1)$, le nombre n est premier.

7 semblent appartenir à un autre âge

« Tous nos géomètres d'ailleurs, quoique fort distingués, semblent appartenir à un autre âge. Ce sont des savants éminents restés à la science d'il y a vingt ou trente ans qu'ils perfectionnent, développent avec beaucoup de succès, mais toutes les branches modernes sont pour eux très accessoires. »

Et encore, c'était pour les mathématiciens parisiens. Le même Darboux, à propos des facultés de province, dit que ce sont des « maisons de retraite pour des professeurs de lycée incapables de faire leur cours ».

semblent appartenir à un autre âge

Gaston Darboux à Jules Hoüel (5 mars 1870)

Tous nos géomètres d'ailleurs, quoique fort distingués, **semblent appartenir à un autre âge**. Ce sont des savants éminents restés à la science d'il y a vingt ou trente ans qu'ils perfectionnent, développent avec beaucoup de succès, mais **toutes les branches modernes sont pour eux très accessoires**.

8 Guerre franco-prussienne

Sur ces entrefaites, la France perd la guerre que Bismarck s'était débrouillé pour lui faire déclarer à la Prusse. Une défaite cuisante, due à une nette supériorité de l'armée prussienne. Bien sûr, on s'interroge. Une cause apparaît évidente : le retard technique et scientifique. Dans la foulée, on crée l'Association Française pour l'Avancement de la Science, sur le modèle de l'association anglaise du même nom.

Guerre franco-prussienne

Capitulation de Sedan (2 septembre 1870)



9 Par la science, pour la patrie

Sa devise est « par la science, pour la patrie ». Elle existe toujours. J'ai idée qu'elle a changé de devise. Promouvoir les sciences c'est bien, mais il faut des scientifiques pour cela, et donc il faut les former. Le vieux modèle napoléonien apparaît suranné. Il faut donc réformer l'enseignement. Eh oui, déjà. Et ce n'était pas la première fois.

Par la science, pour la patrie

Association Française pour l'Avancement des Sciences (1872)



10 Louis-René de Caradeuc de la Chalotais (1701–1785)

La question s'était déjà posée au moment de l'expulsion des Jésuites, un siècle auparavant. Ce Louis-René de Caradeuc de la Chalotais était procureur au parlement de Bretagne à Rennes. De tendance janséniste, et grand ennemi des Jésuites, il est tout de même conscient que leur départ va laisser un grand vide dans l'instruction publique. Alors il rédige un Essai d'Éducation Nationale, ou plan d'études pour la jeunesse. Voici ce qu'on y lit.

Louis-René de Caradeuc de la Chalotais (1701–1785)



11 des Récréations physiques et mathématiques

« Je suppose qu'un enfant sache déjà lire et écrire ; qu'il sache même dessiner, ce que je regarde comme nécessaire, je dis que les premiers objets dont on doit l'occuper depuis cinq ou six ans jusqu'à dix, sont l'Histoire, la Géographie, l'Histoire naturelle, des Récréations physiques et mathématiques ; connaissances qui sont à sa portée, parce qu'elles tombent sous les sens, parce qu'elles sont les plus agréables, et par conséquent les plus propres à occuper l'enfance. »

des Récréations physiques & mathématiques

la Chalotais, Essai d'Éducation Nationale (1763)

Je suppose qu'un enfant sache déjà lire & écrire ; qu'il sache même dessiner, ce que je regarde comme nécessaire, je dis que les premiers objets dont on doit l'occuper depuis cinq ou six ans jusqu'à dix, sont l'Histoire, la Géographie, l'Histoire naturelle, des **Récréations physiques & mathématiques** ; connaissances qui sont à sa portée, parce qu'elles tombent sous les sens, parce qu'elles sont les plus agréables, & par conséquent les plus propres à occuper l'enfance.

12 Amusemens arithmétiques et algébriques de la campagne

L'idée sera reprise ici et là, sans qu'on puisse parler de mouvement de fond.

L'auteur de ce livre de 1779, se présente comme un négociant de Genève, qui a eu à enseigner les mathématiques à deux enfants. De son expérience il a tiré ce livre, les « Amusements arithmétiques et algébriques de la campagne, à l'usage des jeunes gens de l'un et de l'autre sexe ».

Voici ce qu'il dit dans la préface.

Amusemens arithmétiques et algébriques de la campagne

Jean Luya (ca. 1739-1800)

AMUSEMENS ARITHMÉTIQUES ET ALGÈBRIQUES DE LA CAMPAGNE.

A l'usage des Jeunes-Gens de l'un & de l'autre Sexe, dans lesquels on les conduit depuis les premiers Éléments du Calcul, jusqu'à la Solution des Problèmes élevés à la huitième Puissance.

PAR M. J. LUYA, Négociant de Genève.

13 semer quelques fleurs sur le chemin

« Le dialogue dans lequel le but est enveloppé, doit servir à éviter que les élèves ne soient quelquefois rebutés par la sécheresse de la science, fort abstraite par elle-même. Je sais bien qu'on ne doit pas faire, dans des entretiens de cette nature, comme les romanciers, ramager les oiseaux, jaillir l'eau par des cascades, et serpenter des ruisseaux argentés ; mais si l'on peut semer quelques fleurs sur le chemin, sans en interrompre le cours, pourquoi se priver de cet agrément ? »

Voilà qui est bien dit. Et pour vous dire à quel point nous sommes au dix-huitième siècle, voici un de ces dialogues.

semer quelques fleurs sur le chemin

Luya, Amusemens arithmétiques et algébriques de la campagne (1779)

Le Dialogue dans lequel le but est enveloppé, doit servir à éviter que les élèves ne soient quelquefois rebutés par la sécheresse de la science, fort abstraite par elle-même. Je sais bien qu'on ne doit pas faire, dans des entretiens de cette nature, comme les Romanciers, ramager les oiseaux, jaillir l'eau par des cascades, & serpenter des ruisseaux argentés ; mais si l'on peut semer quelques fleurs sur le chemin, sans en interrompre le cours, pourquoi se priver de cet agrément ?

14 le nombre de ses Amans

« Ma sœur, quoique jeune, avait dans le temps de mon séjour en Amérique, des amans à Genève, sans que jamais j'aie pu en apprendre le nombre de sa bouche. Il lui échappa de me dire un jour que si l'on multipliait le quart du nombre de ses amans, par la demi, le produit résultat en serait le nombre même. Comment tourner cela en équation, je vous prie, pour trouver le véritable nombre ? »

Amuser pour instruire, l'idée ne date pas du siècle des Lumières. on la trouve déjà chez Platon.

le nombre de ses Amans

Luya, Amusemens arithmétiques et algébriques de la campagne (1779)

Ma sœur, quoique jeune, avoit dans le tems de mon séjour en Amérique, des Amans à Genève, sans que jamais j'aye pu en apprendre le nombre de sa bouche. Il lui échappa de me dire un jour que si l'on multiplioit le **quart du nombre de ses Amans**, par la demi, le produit résultat en seroit le nombre même. Comment tourner cela en Equation, je vous prie, pour trouver le véritable nombre ?

15 Lois, Livre VII

« On commencera à leur enseigner le calcul, par manière de jeu et de divertissement, en leur faisant faire ces exercices imaginés précisément pour l'enfance et qui consistent à partager également des pommes et des couronnes entre un nombre plus ou moins grand de leurs camarades. »

Les exercices auxquels Platon fait référence, nous ont été transmis par un grammairien du sixième siècle, Métrodore.

Lois, Livre VII

Platon (ca 428-348 av. J.C.)

On commencera à leur enseigner le calcul, par manière de jeu et de divertissement, en leur faisant faire ces exercices imaginés précisément pour l'enfance et qui consistent à partager également des pommes et des couronnes entre un nombre plus ou moins grand de leurs camarades, [...]

16 Anthologie grecque

« Mon fils, que sont devenues tes pommes ? – Ino en a deux sixièmes, et Sémélé un huitième. Autonoé en a enlevé le quart. Agavé est partie, emportant des plis de ma tunique le cinquième. Pour toi-même j'ai gardé dix pommes. Et moi, par ma chère Cypris, je n'ai plus que cette pomme unique. »

On trouve ce type d'exercices chez les Égyptiens, les Mésopotamiens, les Chinois. Les Indiens sont passés maîtres dans l'art d'enrober les énoncés de problèmes dans de la poésie. Voici un exemple dans la Lilavati de Bhaskara.

Anthologie grecque

Métrodore (VI^e siècle)

Mon fils, que sont devenues tes pommes ? – Ino en a pris deux sixièmes, et Sémélé un huitième. Autonoé en a enlevé le quart. Agavé est partie, emportant des plis de ma tunique le cinquième. Pour toi-même j'ai gardé dix pommes. Et moi, par ma chère Cypris, je n'ai plus que cette pomme unique.

17 sur l'eau aux filaments de lotus

« À l'approche d'un nuage, dix fois la racine d'un groupe de cygnes s'en est allée vers le lac Mānasa après avoir pris son envol ; un huitième, quittant le bord de l'eau, est allé vers un bosquet de lotus terrestres et, mon enfant, sur l'eau aux filaments de lotus, adonnés au jeu de l'amour, on aperçoit trois couples de cygnes ; dis-moi le compte de la totalité du groupe. »

En France, l'idée est reprise du temps de Charlemagne dans les propositions d'Alcuin, puis à nouveau oubliée. La mode des récréations mathématiques a été lancée au dix-septième siècle par les « Problèmes plaisants et délectables » de Bachet de Méziriac, puis amplifiée par les « Récréations mathématiques et physiques » d'Ozanam. Ce sont celles auxquelles la Chalotais fait référence en 1763.

sur l'eau aux filaments de lotus

Bhāskara, Lilāvati (1150)



18 Jean Macé (1815–1894)

Enseigner en racontant des histoires, cet homme, Jean Macé, n'avait pas attendu Édouard Lucas. Contraint de s'exiler en Alsace après le coup d'état de Napoléon III, il est instituteur dans une école de jeunes filles. Pour elles, il commence à écrire des ouvrages de vulgarisation, comme « l'histoire d'une bouchée de pain », ou « lettres à une petite fille sur nos organes et nos fonctions » ; et pour l'apprentissage du calcul :

Jean Macé (1815–1894)



19 L'arithmétique du Grand-Papa (1863)

« L'arithmétique du Grand-Papa ou l'histoire de deux petits marchands de pommes ». C'est un livre d'arithmétique élémentaire raconté comme un roman, avec des aventures et des chapitres, et illustré par de belles gravures, à la manière des romans de Jules Verne. C'est d'ailleurs le même éditeur qui publie les livres de Jean Macé et de Jules Verne. L'arithmétique du Grand-Papa a connu un grand succès et de nombreuses rééditions.

L'arithmétique du Grand-Papa (1863)

Jean Macé (1815–1894)

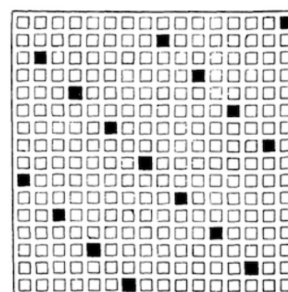


20 Satin symétrique 7 de module 16

Par ses recherches en arithmétique, discipline alors peu représentée en France, mais aussi par son penchant naturel vers les applications originales, Lucas, est idéalement placé pour incarner un renouveau des Récréations mathématiques. Ceci est extrait de sa toute première publication, à vingt-cinq ans : « Application de l'arithmétique à la construction de l'armure des satins réguliers ».

Satin symétrique 7 de module 16

Lucas, Construction de l'armure des satins réguliers (1867)

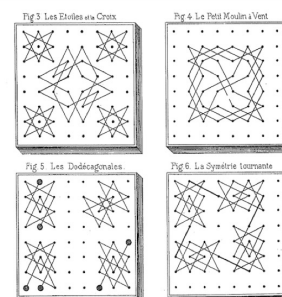


21 La Fasioulette (1889)

La Fasioulette est un autre des jeux inventés par Lucas : il matérialise le parcours du cavalier aux échecs, avec en filigrane le vieux problème de parcourir toutes les cases en 64 sauts sans repasser par la même. Il dédie ce jeu à ses enfants.

La Fasioulette (1889)

Édouard Lucas (1842–1891)



22 le serpent caché sous les fleurs

« J'ai fait ces petits livres pour vous récréer tout en vous apprenant des combinaisons arithmétiques et géométriques très difficiles. Ne vous laissez pas séduire par la forme extérieure ; allez jusqu'au bout de chaque problème ; suivez les routes tracées ou celles qui ne sont qu'indiquées, sans vous laisser décourager par l'aridité et la sécheresse du terrain scientifique. Mais faites bien attention, prenez bien garde : – la science de votre papa, c'est le serpent caché sous les fleurs. »

le serpent caché sous les fleurs

Lucas, La Fasioulette (1889)

J'ai fait ces petits livres pour vous récréer tout en vous apprenant des combinaisons arithmétiques et géométriques très difficiles. Ne vous laissez pas séduire par la forme extérieure ; allez jusqu'au bout de chaque problème ; suivez les routes tracées ou celles qui ne sont qu'indiquées, sans vous laisser décourager par l'aridité et la sécheresse du terrain scientifique. Mais faites bien attention, prenez bien garde : – la science de votre papa, c'est le serpent caché sous les fleurs.

23 New York – Le Havre

« Il y a longtemps déjà, au cours d'un Congrès scientifique, et à la fin d'un déjeuner où se trouvaient réunis plusieurs mathématiciens connus, quelques-uns illustres, appartenant à diverses nationalités, Édouard Lucas leur annonça brusquement qu'il allait leur poser une question des plus difficiles. « Je suppose – dit-il – que chaque jour, à midi, un paquebot parte du Havre pour New-York, et qu'en même temps un paquebot de la même compagnie parte de New-York pour le Havre. »

New York – Le Havre

Édouard Lucas (1842–1891)

Il y a longtemps déjà, au cours d'un Congrès scientifique, et à la fin d'un déjeuner où se trouvaient réunis plusieurs mathématiciens connus, quelques-uns illustres, appartenant à diverses nationalités, Édouard Lucas leur annonça brusquement qu'il allait leur poser une question des plus difficiles. « Je suppose – dit-il – que chaque jour, à midi, un paquebot parte du Havre pour New-York, et qu'en même temps un paquebot de la même compagnie parte de New-York pour Le Havre.

24 New York – Le Havre

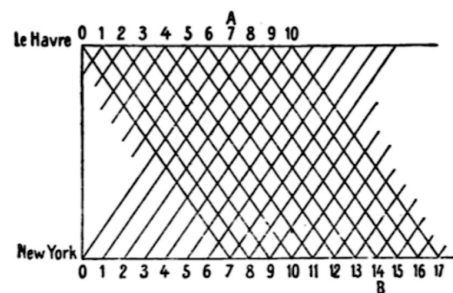
« La traversée se fait exactement en sept jours, soit dans un sens, soit dans l'autre. Combien le paquebot qui part du Havre aujourd'hui à midi rencontrera-t-il en route de navires de sa compagnie faisant la route opposée ?

Quelques-uns des illustres auditeurs répondirent étourdiement : sept. La plupart gardèrent le silence, paraissant surpris. Pas un ne donna la solution juste, qui apparaît sur la figure 89 avec une entière clarté. »

La figure 89, vous l'avez sous les yeux ; le congrès scientifique était celui de l'Association Française pour l'Avancement des Sciences ; et celui qui raconte cette histoire vécue s'appelle Charles-Ange Laisant.

New York – Le Havre

Édouard Lucas (1842–1891)



25 Charles-Ange Laisant (1841–1920)

Même s'il n'a pas laissé de nom dans la recherche, c'est un mathématicien qui a soutenu une thèse sur les quaternions et a écrit de nombreux articles. Il a d'abord été militaire, puis député. Il a joué un rôle important en tant que courroie de transmission entre le milieu scientifique et le pouvoir politique sous la troisième république.

Il s'est beaucoup préoccupé d'enseignement, et en particulier d'enseignement des mathématiques, et il a publié ses propres idées sur le sujet. Il les a même concrétisées dans un manuel à l'usage des enseignants, l'Initiation Mathématique. Il l'annonce comme un « ouvrage étranger à tout programme, dédié aux amis de l'enfance ». Il souhaite aller encore plus loin que Lucas. Il l'explique dans la préface.

Charles-Ange Laisant (1841–1920)



26 des questions amusantes comme moyen pédagogique

« Dans les Récréations mathématiques, le mot le dit assez, il s'agit d'appliquer à des sujets amusants, jeux divers, combinaisons, etc., les théories mathématiques déjà connues ; et souvent une certaine instruction est nécessaire pour pouvoir seulement comprendre les explications données.

Ici c'est l'inverse : nous nous servons de questions amusantes comme moyen pédagogique, pour attirer la curiosité de l'enfant et arriver ainsi à faire pénétrer dans son esprit, sans efforts imposés, les premières notions mathématiques les plus essentielles. Et la diversité des questions, qui pourrait faire croire à un désordre apparent, cache une suite d'idées voulues, utiles, et complètement ordonnées. »

des questions amusantes comme moyen pédagogique

Laisant, Initiation Mathématique (1906)

Dans les Récréations mathématiques, le mot le dit assez, il s'agit d'appliquer à des sujets amusants, jeux divers, combinaisons, etc., les théories mathématiques déjà connues ; et souvent une certaine instruction est nécessaire pour pouvoir seulement comprendre les explications données.

Ici c'est l'inverse : nous nous servons de questions amusantes comme moyen pédagogique, pour attirer la curiosité de l'enfant et arriver ainsi à faire pénétrer dans son esprit, sans efforts imposés, les premières notions mathématiques les plus essentielles. Et la diversité des questions, qui pourrait faire croire à un désordre apparent, cache une suite d'idées voulues, utiles, et complètement ordonnées.

27 de véritables malfaiteurs publics

« Là-dessus, si les pontifes ne sont pas contents, sachons nous en consoler. Ceux pour lesquels le mot « instruire » est synonyme d'« ennuyer » – et quelquefois de « torturer » – sont de véritables malfaiteurs publics. Il est temps que leur domination néfaste prenne fin. »

de véritables malfaiteurs publics

Laisant, *Initiation Mathématique* (1906)

Là-dessus, si les pontifes ne sont pas contents, sachons nous en consoler. Ceux pour lesquels le mot « instruire » est synonyme d'« ennuyer » – et quelquefois de « torturer » – sont de véritables malfaiteurs publics. Il est temps que leur domination néfaste prenne fin.

28 références

Oh ! il y va un peu fort Laisant tout de même. C'est comme quand il traite la bureaucratie d'« ennemie de l'enseignement ».

Euh non là, on ne peut pas dire qu'il ait tort. Mais tout de même, raconter des histoires pour expliquer ce qu'on veut faire passer, c'est du grand n'importe quoi. C'est pas moi qui irais tenter une bêtise pareille.

références

- J. Auvinet (2017) De l'usage des récréations pour une *Initiation Mathématique* selon Charles-Ange Laisant, *Bulletin de l'APMEP*, 523, 172–182
- A.-M. Décaillot (1998) L'arithméticien Édouard Lucas (1842–1891), Théorie et instrumentation, *Revue d'histoire des mathématiques*, 4, 172–182
- A. M. Décaillot (2002) Géométrie des tissus, mosaïques, échiquiers, *Revue d'Histoire des Mathématiques*, 8, 145–206
- H. Gispert (2002) 'Par la science, pour la patrie'. *L'Association française pour l'avancement des sciences (1872–1914), un projet politique pour une société savante*, Rennes : Presses Universitaires
- A. M. Hinz, S. Klavžar, U. Milutinović, C. Petr (2013) *The tower of Hanoi – Myths and Maths*, Basel : Springer