Une histoire de mathématiques à écouter sur

hist-math.fr

0 L'homme qui savait l'infini

histoires d'analyse

L'homme qui savait l'infini

approximations de pi

hist-math.fr Bernard Ycart

« The man who knew infinity ». C'est le titre d'un film de 2015 sur Ramanujan. Le titre français est « L'homme qui défiait l'infini », titre dont la combativité ne me paraît pas correspondre aux témoignages que l'on a sur la personnalité de Ramanujan. On ne peut pas dire non plus qu'il « connaissait » l'infini, sa compréhension était semble-t-il beaucoup plus intime que cela. J'ai plutôt envie de dire que Ramanujan « savait l'infini », comme nous savons parler.

1 The man who knew infinity

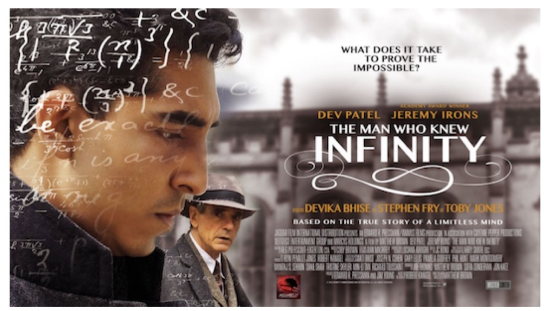
J'ai vraiment aimé ce film : les acteurs sont impressionnants de finesse et de sincérité, la vérité historique est strictement respectée, et chose rare dans un film parlant de mathématiques, ce qui est dit est correct. On voit trop souvent des films qui se contentent de montrer des symboles incompréhensibles pour le grand public pour avoir l'air mathématique, sans trop se préoccuper de la vraisemblance.

Rien de cela ici. Le conseiller scientifique est Manjul Bhargava, médaillé Fields en 2014, et il a réussi l'exploit de rendre le contenu compréhensible, sans pour autant sacrifier l'exactitude mathématique.

J'espère que vous allez vous précipiter pour aller voir le film, ce qui nous fera gagner du temps : je vous épargnerai ce que vous aurez déjà vu.

Allez : rien ne presse, je vous attends, on continuera après. Bon film !

The man who knew infinity
Matthew Brown (2015)



2 Tamil Nadu

Ah ! vous revoilà ! Ça vous a plu ? Dev Patel et Jeremy Irons sont forts vous ne trouvez pas ?

Donc, vous savez que Ramanujan a grandi dans le pays des Tamouls, le Tamil Nadu, un état de l'Inde du sud. La capitale s'appelle Chennai, en haut de l'image sur la côte est. Elle s'appelait Madras à l'époque. C'est là qu'on lui a trouvé un emploi de comptable dans l'administration du port. L'université de Madras lui a accordé une bourse pour qu'il puisse se consacrer aux mathématiques, avant son succès en Angleterre et la célébrité qui en a découlé.

Tamil Nadu
Srinivasa Ramanujan (1887–1920)

3 Ramanujan's home, Kumbakonam

Sa maison se trouvait à trois cents kilomètres plus au sud, à Kumbakonam. Il y est revenu après les cinq ans passés en Angleterre.

Ramanujan's home, Kumbakonam
Srinivasa Ramanujan (1887–1920)

4 Sarangapani temple, Kumbakonam

Non loin de la maison de Ramanujan, se trouve ce magnifique temple dédié à Vishnu. Mais ce n'est pas Vishnu qui a joué le rôle déterminant que vous savez dans la vie de Ramanujan.

Sarangapani temple, Kumbakonam

5 Déesse Namagiri, Namakkal

C'est la déesse Namagiri, qui est vénérée dans la ville de Namakkal, à l'est de Kumbakonam. C'est là que sa mère s'est rendue quand elle ne réussissait pas à avoir d'enfant. D'après Ramanujan, la déesse Namagiri lui soufflait des formules dans ses rêves. C'est encore elle qui a donné l'autorisation de partir en Angleterre.

L'Angleterre, c'était suite à une lettre, envoyée à Hardy, le 16 janvier 1913. Elle se terminait par ces mots.

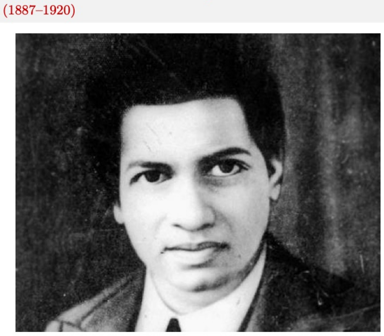
Déesse Namagiri, Namakkal

6 Lettre à G.H. Hardy (16 janvier 1913)

« Je vous demanderais de parcourir les papiers ci-joints. Étant pauvre, si vous êtes convaincu qu'il y a quoi que ce soit de valeur j'aimerais que mes théorèmes soient publiés. [. . .] Étant inexpérimenté j'accorderai la plus grande valeur à tout conseil que vous me donnerez. Je vous demande de m'excuser pour le dérangement que je vous cause. »

La réception de cette lettre, les discussions entre Hardy et Littlewood sur les résultats sont très bien racontés dans le film. On en a un témoignage direct, dans une lettre de Bertrand Russell, écrite le 2 février, qui montre que Hardy n'avait pas perdu de temps.

Lettre à G.H. Hardy (16 janvier 1913)
Srinivasa Ramanujan (1887–1920)

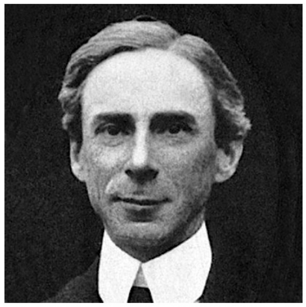


7 Lettre à Lady Ottoline Morrell (2 février 1913)

« J'ai trouvé Hardy et Littlewood dans un état de grande excitation, car ils pensent qu'ils ont découvert un second Newton, un employé hindou à Madras, à 20 livres par an. Il a écrit à Hardy en lui parlant de quelques résultats qu'il a obtenus, que Hardy trouve tout à fait merveilleux, surtout que l'homme n'a qu'une éducation scolaire ordinaire. Hardy a écrit à l'Office des Affaires Indiennes et espère faire venir cet homme immédiatement. »

Hardy n'avait pas seulement écrit aux affaires indiennes, il avait aussi répondu à Ramanujan, le 8 février 1913.

Lettre à Lady Ottoline Morrell (2 février 1913)
Bertrand Russell (1872–1970)



8 Lettre à Ramanujan (8 février 1913)

« J'ai été extrêmement intéressé par votre lettre et par les théorèmes que vous énoncez. Vous comprendrez cependant que, avant de juger correctement de la valeur de ce que vous avez fait, il est essentiel que je voie les démonstrations de vos affirmations. »

Les démonstrations, c'était bien là le problème. Plus tard, Hardy dira : « Les limitations de ses connaissances étaient aussi étonnantes que leur profondeur. Tous ses résultats, nouveaux ou connus, justes ou faux, avaient été obtenus par un processus mélangeant arguments, intuition et induction, dont il était totalement incapable de donner un compte-rendu cohérent. »

Pourtant, Hardy avait fait ce qu'il pouvait pour convaincre Ramanujan de démontrer ce qu'il avançait.

Lettre à Ramanujan (8 février 1913)
Godfrey H. Hardy (1877–1947)

9 Lettre à Ramanujan (8 février 1913)

« Vos résultats se répartissent en gros en trois classes. Premièrement, un certain nombre de résultats sont déjà connus, ou peuvent être déduits aisément de théorèmes connus. Secondement, il y a des résultats qui selon moi, sont nouveaux et intéressants, mais intéressants plutôt par leur curiosité et leur difficulté apparente que par leur importance. Troisièmement il y a des résultats qui semblent nouveaux et importants, mais dans lesquels presque tout dépend de la rigueur précise des méthodes de démonstration que vous avez employées. »

Pour ne pas décourager Ramanujan, Hardy omettait une quatrième classe de résultats, ceux qui étaient carrément faux, par manque de connaissances.

À partir d'avril 1914, Ramanujan est en Angleterre, et Hardy fait tout son possible pour l'amener à mettre ses mathématiques sous forme publiable, sans pour autant brider sa créativité. Plus tard, il dira :

Lettre à Ramanujan (8 février 1913)
Godfrey H. Hardy (1877–1947)

Your results seem to me to fall into roughly 3 classes :

(1) there are a number of results which are already known, or are easily deducible from known theorems ;

(2) there are results which, so far as I know, are new and interesting, but interesting rather from their curiosity and apparent difficulty than their importance ;

(3) there are results which appear to be new and important, but in which almost everything depends on the precise rigour of the methods of proof which you have used.

10 if he had been caught and tamed a little

if he had been caught and tamed a little
Hardy, Srinivasa Ramanujan (1927)

« Il aurait été un encore plus grand mathématicien si on l'avait pris et dompté un peu dans sa jeunesse ; il aurait découvert plus de nouveaux résultats, et sans doute de plus grande importance. D'un autre côté, il aurait été moins un Ramanujan et plus un professeur européen, et la perte aurait peut-être été plus grande que le gain. »

He would probably have been a greater mathematician if he had been caught and tamed a little in his youth ; he would have discovered more that was new, and that, no doubt, of greater importance. On the other hand he would have been less of a Ramanujan, and more of a European professor, and the loss might have been greater than the gain.

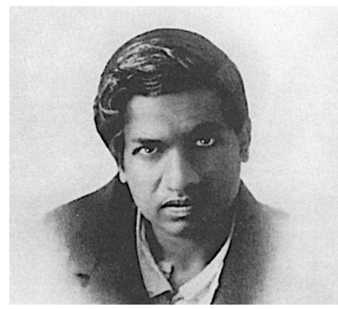
11 Srinivasa Ramanujan (février 1919)

Ce qui est le plus à regretter, c'est sa maladie, à partir du printemps 1917, et sa mort le 26 avril 1920, à seulement 32 ans. Cette photo a été prise pour son passeport en février 1919, peu avant son retour en Inde. Ses traits sont affectés par la maladie.

Je n'ai pas réussi à savoir de quoi il est mort exactement. Le diagnostic majoritaire des médecins anglais à l'époque était la tuberculose. Certains ont parlé de cancer du foie. Lui-même évoquait la malnutrition. Il n'était déjà pas facile de se nourrir pour un végétarien strict à Cambridge. Il cuisinait ses légumes et son riz dans sa chambre. Les séjours en sanatorium de 1918 où il ne pouvait presque rien manger de ce qui était servi, étaient encore pire. Songez en plus que ceci se déroulait en temps de guerre et de restrictions.

L'article de Young que j'ai mis en référence donne des arguments qui semblent convainquants pour une amibiase hépatique, mais n'étant pas médecin, je ne sais pas conclure.

Srinivasa Ramanujan (février 1919)



12 Formules de Ramanujan

Comment vous parler des mathématiques de Ramanujan, sans être ridiculement réducteur ? Les fameux carnets de Ramanujan, ceux qui étaient en possession de sa famille, ainsi que ceux qui ont été retrouvés par la suite, ont donné du grain à moudre à des dizaines de mathématiciens pendant tout le siècle qui vient de s'écouler.

Je ne peux pas faire mieux que vous montrer quelques magnifiques formules, comme celles-ci. Ce sont celles que Hardy lui-même met en exergue. La première donne une approximation de π en fonction de racine de cinq. La différence entre le premier et le second membre est de 2,16 10^{-10}. La seconde est une approximation de $1/(2\pi\sqrt{2})$: $1103/99^2$; la différence est de 2,74 10^{-9}.

Il y a encore plus fort.

Formules de Ramanujan
Srinivasa Ramanujan (1887–1920)

$$\pi \simeq \frac{63}{25}\frac{17+15\sqrt{5}}{7+15\sqrt{5}}$$

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{2}} \simeq \frac{1103}{99^2}$$

13 Formules de Ramanujan

Ces développements en série de un sur π me laissent pantois. Dans la première série, si on n'écrit que le premier terme, on a déjà une approximation à 10^{-8} près. L'erreur de la somme réduite aux deux premiers termes seulement est de $5{,}55\ 10^{-17}$. Chaque terme rajouté augmente la précision de 8 décimales.

La seconde somme est un peu moins efficace. La précision augmente de deux décimales à chaque fois, ce qui n'est déjà pas mal.

Je ne voudrais pas que vous gardiez de ceci l'impression que Ramanujan n'était qu'un allumé, à qui la déesse Namagiri dictait des formules sorties de nulle part auxquelles personne ne comprenait rien, pas même lui. Rien n'est plus faux. Ramanujan s'inscrit dans une longue tradition de mathématiciens, que je me propose d'évoquer dans la suite de cette histoire. Pour changer, nous allons remonter le temps : depuis Ramanujan jusqu'aux Grecs.

Formules de Ramanujan

Srinivasa Ramanujan (1887–1920)

$$\frac{1}{\pi} = \frac{\sqrt{8}}{9801} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!}{(n!)^4} \frac{1103 + 26390n}{396^{4n}}$$

$$\frac{1}{\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n}^3 \frac{42n+5}{2^{12n+4}}$$

14 Squaring the circle (1913)

Bien sûr, on ne peut pas réduire l'œuvre mathématique de Ramanujan aux approximations de π, aussi impressionnantes soient-elles. Il est néanmoins vrai, que Ramanujan a partagé avec beaucoup de mathématiciens avant lui, la passion de la quadrature. Vous voyez ici un article d'une seule page, publié dans le journal indien de mathématiques, en 1913, avant la lettre à Hardy.

Le titre est tout simplement « la quadrature du cercle ». Ramanujan y décrit une construction géométrique, du côté d'un carré de surface égale à celle d'un cercle donné ; soit exactement le problème originel de la quadrature du cercle. La construction de Ramanujan revient à prendre π égale 355/113. Il le dit en pas de la page, et conclut : « Si la surface du cercle est de cent quarante mille miles carrés, alors la longueur construite diffère de la vraie d'environ un pouce. »

Je me moque dans d'autres histoires des quadrateurs amateurs, mais je vous raconte aussi comment la recherche sur ce problème a, pendant deux mille ans, fait progresser les mathématiques, et tout particulièrement l'analyse. Le calcul intégral est né des quadratures, du cercle en particulier, des coniques en général. C'est encore à propos de π qu'ont été écrits les premiers produits infinis.

Squaring the circle (1913)

Srinivasa Ramanujan (1887–1920)

SQUARING THE CIRCLE

(Journal of the Indian Mathematical Society, v, 1913, 132)

Let PQR be a circle with centre O, of which a diameter is PR. Bisect PO at H and let T be the point of trisection of OR nearer R. Draw TQ perpendicular to PR and place the chord $RS = TQ$.

Join PS, and draw OM and TN parallel to RS. Place a chord $PK = PM$, and draw the tangent $PL = MN$. Join RL, RK and KL. Cut off $RC = RH$. Draw CD parallel to KL, meeting RL at D.

Then the square on RD will be equal to the circle PQR approximately.

For $RS^2 = \frac{5}{36} d^2$,

where d is the diameter of the circle.

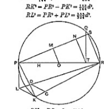
Therefore $PS^2 = \frac{31}{36} d^2$.

But PL and PK are equal to MN and PM respectively.

Therefore $PK^2 = \frac{31}{144} d^2$, and $PL^2 = \frac{31}{324} d^2$.

Hence $RK^2 = PR^2 - PK^2 = \frac{113}{144} d^2$,

and $RL^2 = PR^2 + PL^2 = \frac{355}{324} d^2$.



But $\frac{RK}{RL} = \frac{RC}{RD} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{113}{355}}$,

and $RC = \frac{3}{4} d$.

Therefore $RD = \frac{d}{2}\sqrt{\frac{355}{113}} = r\sqrt{\pi}$, very nearly.

Note.—If the area of the circle be 140,000 square miles, then RD is greater than the true length by about an inch.

15 Modular equations and approximations to π (1914)

Les formules de Ramanujan pour l'approximation de π n'ont pas été dictées par la déesse Namagiri. On en trouve un bon nombre dans cet article de 1914 : « Équations modulaires et approximations de π ». Comme il le dit, il commence par des résultats théoriques, dont les développements en série de un sur π ne sont que des applications.

Modular equations and approximations to π (1914)

Srinivasa Ramanujan (1887–1920)

From these theories we can deduce further series for $1/\pi$, such as

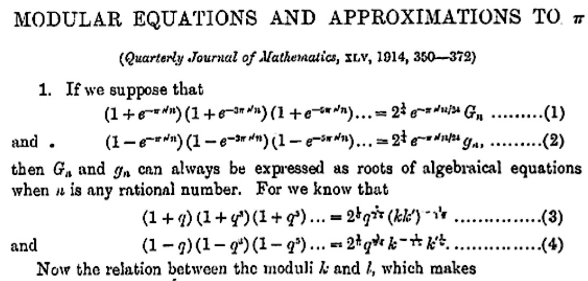
$$\frac{27}{4\pi} = 2 + 17\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{3}\,\frac{2}{3}\left(\frac{2}{27}\right) + 32\,\frac{1.3}{2.4}\,\frac{1.4}{3.6}\,\frac{2.5}{3.6}\left(\frac{2}{27}\right)^2 + \ldots, \quad \ldots\ldots(31)$$

$$\frac{15\sqrt{3}}{2\pi} = 4 + 37\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{3}\,\frac{2}{3}\left(\frac{4}{125}\right) + 70\,\frac{1.3}{2.4}\,\frac{1.4}{3.6}\,\frac{2.5}{3.6}\left(\frac{4}{125}\right)^2 + \ldots, \ldots\ldots(32)$$

$$\frac{5\sqrt{5}}{2\pi\sqrt{3}} = 1 + 12\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{6}\,\frac{5}{6}\left(\frac{4}{125}\right) + 23\,\frac{1.3}{2.4}\,\frac{1.7}{6.12}\,\frac{5.11}{6.12}\left(\frac{4}{125}\right)^2 + \ldots, \ldots(33)$$

16 Modular equations and approximations to π (1914)

Modular equations and approximations to π (1914)
Srinivasa Ramanujan (1887–1920)



MODULAR EQUATIONS AND APPROXIMATIONS TO π

(*Quarterly Journal of Mathematics*, XLV, 1914, 350—372)

1. If we suppose that

$$(1+e^{-\pi\sqrt{n}})(1+e^{-3\pi\sqrt{n}})(1+e^{-5\pi\sqrt{n}})\ldots = 2^{\frac{1}{4}} e^{-\pi\sqrt{n}/24} G_n \quad \ldots\ldots(1)$$

and

$$(1-e^{-\pi\sqrt{n}})(1-e^{-3\pi\sqrt{n}})(1-e^{-5\pi\sqrt{n}})\ldots = 2^{\frac{1}{4}} e^{-\pi\sqrt{n}/24} g_n, \quad \ldots\ldots(2)$$

then G_n and g_n can always be expressed as roots of algebraical equations when n is any rational number. For we know that

$$(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\ldots = 2^{\frac{1}{6}} q^{\frac{1}{24}} (kk')^{-\frac{1}{12}} \quad \ldots\ldots(3)$$

and

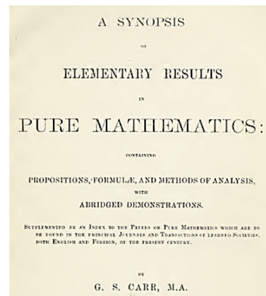
$$(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\ldots = 2^{\frac{1}{6}} q^{\frac{1}{24}} k^{-\frac{1}{12}} k'^{\frac{1}{6}}. \quad \ldots\ldots(4)$$

Now the relation between the moduli k and l, which makes

Voici le début de ce même article. Vous voyez qu'il commence par poser deux équations très générales Ces équations font intervenir des exponentielles de nombres dépendant de π. Observez que les deux membres de gauche sont des produits infinis de binômes.

17 A synopsis of elementary results (1886)

A synopsis of elementary results (1886)
George Shoobridge Carr (1837–1914)



A SYNOPSIS

OF

ELEMENTARY RESULTS

IN

PURE MATHEMATICS:

CONTAINING

PROPOSITIONS, FORMULÆ, AND METHODS OF ANALYSIS,

WITH

ABRIDGED DEMONSTRATIONS.

BY

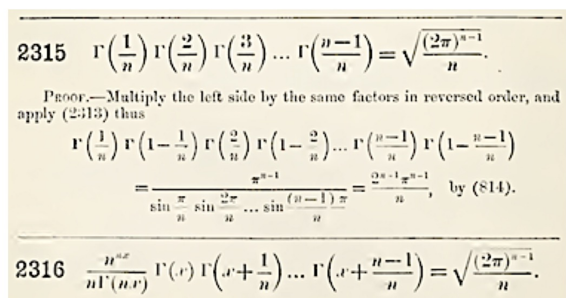
G. S. CARR, M.A.

De son propre aveu, l'éveil mathématique de Ramanujan, est dû à la lecture de ce livre, « un synopsis de résultats élémentaires en mathématiques pures ». Ce n'est pas véritablement un manuel d'enseignement, plutôt un aide-mémoire pour aider les candidats préparant le difficile concours des Tripos.

On y trouve de longues listes de résultats sur la plupart des sujets de mathématiques de l'époque, sans démonstrations, ou seulement un bref résumé. Cela suffisait pour les dons exceptionnels de Ramanujan, mais on peut comprendre en voyant ce livre, qu'il n'ait pas jugé indispensable de pousser très loin la rédaction de ses propres démonstrations.

18 Fonction Gamma

Fonction Gamma
G. S. Carr, A synopsis of elementary results in pure mathematics (1886)



2315 $\quad \Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)=\sqrt{\frac{(2\pi)^{n-1}}{n}}.$

PROOF.—Multiply the left side by the same factors in reversed order, and apply (2313) thus

$$\Gamma\left(\tfrac{1}{n}\right)\Gamma\left(1-\tfrac{1}{n}\right)\Gamma\left(\tfrac{2}{n}\right)\Gamma\left(1-\tfrac{2}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\tfrac{n-1}{n}\right)\Gamma\left(1-\tfrac{n-1}{n}\right)$$
$$=\frac{\pi^{n-1}}{\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\ldots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}}=\frac{2^{n-1}\pi^{n-1}}{n}, \quad \text{by (814).}$$

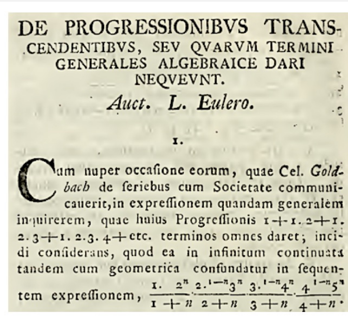
2316 $\quad \frac{n^{nx}}{n\Gamma(nx)}\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{n}\right)\ldots\Gamma\left(x+\frac{n-1}{n}\right)=\sqrt{\frac{(2\pi)^{n-1}}{n}}.$

Entre autres, on trouve dans le livre de Carr un résumé des principaux résultats sur la fonction Gamma. Cette fonction, et ses extensions, seront un thème récurrent dans l'œuvre de Ramanujan, et on peut voir les équations modulaires de son article de 1914, comme issues de ses réflexions sur la fonction Gamma.

Mais la fonction Gamma elle-même ? D'où venait-elle ?

19 De progressionibus transcendentibus (1738)

De progressionibus transcendentibus (1738)
Leonard Euler



DE PROGRESSIONIBVS TRANSCENDENTIBVS, SEV QVARVM TERMINI GENERALES ALGEBRAICE DARI NEQVEVNT.

Auct. L. Eulero.

1.

Cum nuper occaſione eorum, quae Cel. *Goldbach* de ſeriebus cum Societate communicauerit, in expreſſionem quandam generalem inquirerem, quae huius Progreſſionis $1+1.2+1.2.3+1.2.3.4+$ etc. terminos omnes daret; incidi conſiderans, quod ea in infinitum continuata tandem cum geometrica confundatur in ſequentem expreſſionem, $\frac{1.\ 2^n}{1+n}.\frac{2.^{1-n}3^n}{2+n}.\frac{3.^{1-n}4^n}{3+n}.\frac{4^{1-n}5^n}{4+n}.$

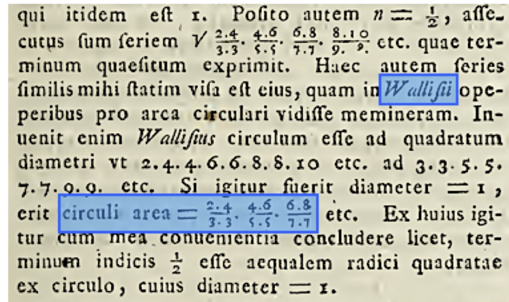
De Euler, il fallait s'en douter ! Ceci est le premier article publié à ce sujet en 1738, mais Euler l'avait trouvée dix ans auparavant, et il y reviendra plusieurs fois dans toute sa carrière. Son but premier était de trouver une expression algébrique à une « progression transcendante » comme il l'appelle, celle des factorielles. Pour cela, il écrit un produit de facteurs entiers, celui que vous voyez en bas à droite : 2^n sur $1+n$, $2^{1-n}3^n$ sur $2+n$, etc. Il ne se préoccupe pas de savoir si le produit converge, tout ce qu'il voit c'est que pour n entier, une fois simplifiés une infinité de facteurs, il retrouve la factorielle.

20 in Wallisii operibus

Mais il ne va pas en rester là. S'il remplace dans son expression n par $1/2$, il trouve la racine carrée d'un produit de facteurs ayant au numérateur les carrés des nombres pairs, et au dénominateur les carrés des nombres impairs. Or ce produit, il se souvient, dit-il, de l'avoir rencontré dans les œuvres de Wallis. Car Wallis dit que si le diamètre est un, l'aire du cercle sera deux fois quatre au carré fois six au carré etc., le tout divisé par trois au carré fois cinq au carré etc.

in Wallisii operibus

Leonard Euler, De progressionibus transcendentibus (1738)



qui itidem est 1. Posito autem $n = \frac{1}{2}$, affectus sum seriem $\sqrt{\frac{2.4}{3.3} \cdot \frac{4.6}{5.5} \cdot \frac{6.8}{7.7} \cdot \frac{8.10}{9.9}}$ etc. quae terminum quaesitum exprimit. Haec autem series similis mihi statim visa est eius, quam in Wallisii operibus pro area circulari vidisse memineram. Inuenit enim Wallisius circulum esse ad quadratum diametri vt 2.4.4.6.6.8.8.10 etc. ad 3.3.5.5.7.7.9.9. etc. Si igitur fuerit diameter $= 1$, erit circuli area $= \frac{2.4}{3.3} \cdot \frac{4.6}{5.5} \cdot \frac{6.8}{7.7}$ etc. Ex huius igitur cum mea conuenientia concludere licet, terminum indicis $\frac{1}{2}$ esse aequalem radici quadratae ex circulo, cuius diameter $= 1$.

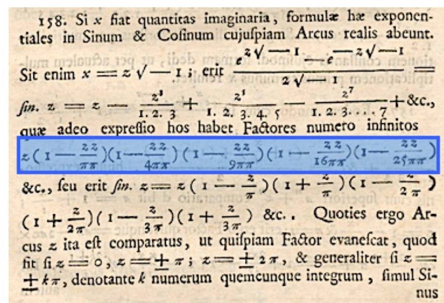
21 Produit d'Euler

Pour résoudre le problème de Bâle, c'est-à-dire calculer la somme des inverses des carrés d'entiers, il avait eu recours à une de ses astuces diaboliques. Vous la voyez écrite ici dans son célèbre livre d'analyse. La première formule est sinus z égale $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z})/2\mathrm{i}$, d'où il déduit le développement en série de la ligne en-dessous. Oui mais pour Euler qui ne se préoccupait pas des détails de convergence, une série, ce n'était guère qu'un polynôme. Et un polynôme, ça s'écrit comme un produit de facteurs du type $1 - z/r$, où r sont les racines. Or les racines du sinus, sont zéro et plus ou moins $k\pi$, où k parcourt les entiers. Donc sinus z c'est z fois $(1 + z/\pi)$, fois $(1 - z/\pi)$, etc.

Cette magnifique formule n'est devenue rigoureuse qu'au siècle suivant, mais peu importe. Remplacez z par $\pi/2$, le premier membre vaut 1, dans le second vous retrouvez $\pi/2$, puis un produit de facteurs avec des entiers impairs en numérateur, pairs en dénominateurs. Euler a généralisé encore une fois, le produit de Wallis.

Produit d'Euler

Leonard Euler, Introductio in Analysin Infinitorum (1748)



158. Si x fiat quantitas imaginaria, formulae hae exponentiales in Sinum & Cosinum cujuspiam Arcus realis abeunt. Sit enim $x = z\sqrt{-1}$; erit $\frac{e^{z\sqrt{-1}} - e^{-z\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} =$ $sin.\ z = z - \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^5}{1.2.3.4.5} - \frac{z^7}{1.2.3\ldots 7} + \&c.$, quae adeo expressio hos habet Factores numero infinitos $z(1 - \frac{zz}{\pi\pi})(1 - \frac{zz}{4\pi\pi})(1 - \frac{zz}{9\pi\pi})(1 - \frac{zz}{16\pi\pi})(1 - \frac{zz}{25\pi\pi})$ &c., seu erit $sin.\ z = z(1 - \frac{z}{\pi})(1 + \frac{z}{\pi})(1 - \frac{z}{2\pi})(1 + \frac{z}{2\pi})(1 - \frac{z}{3\pi})(1 + \frac{z}{3\pi})$ &c. Quoties ergo Arcus z ita est comparatus, ut quispiam Factor evanescat, quod fit si $z = 0$; $z = \pm\pi$; $z = \pm 2\pi$, & generaliter si $z = \pm k\pi$, denotante k numerum quemcunque integrum, simul Sinus

22 Produit de Wallis

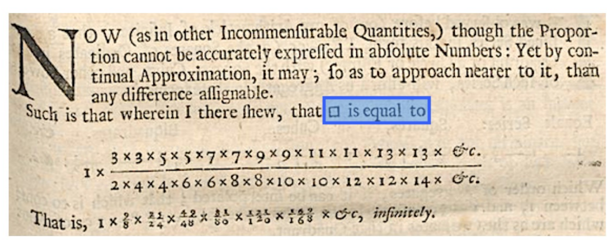
Le produit de Wallis, le voici dans son livre d'algèbre de 1685. Il l'avait trouvé beaucoup plus tôt, au début des années 1650. On peut le considérer comme la première résolution correcte de la quadrature du cercle. C'est bien ainsi que lui le voyait, et il en était fier à juste titre.

Ce qu'il note par un petit carré (comme quadrature), c'est la proportion du carré du diamètre au cercle, pour nous : $4/\pi$. Il dit que, comme d'autres quantités incommensurables, cette proportion ne peut pas être exprimée en rapports d'entiers. « Pourtant, par approximation continue, on peut s'en approcher plus près que n'importe quelle quantité assignable. »

Pour autant, le produit de Wallis n'est pas la seule formule de ce type. Quelques pages plus loin, Wallis en donne une autre :

Produit de Wallis

John Wallis (1616–1793) Algebra (1685)



NOW (as in other Incommensurable Quantities,) though the Proportion cannot be accurately expressed in absolute Numbers: Yet by continual Approximation, it may; so as to approach nearer to it, than any difference assignable. Such is that wherein I there shew, that □ is equal to

$$1 \times \frac{3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7 \times 9 \times 9 \times 11 \times 11 \times 13 \times 13 \times \&c.}{2 \times 4 \times 4 \times 6 \times 6 \times 8 \times 8 \times 10 \times 10 \times 12 \times 12 \times 14 \times \&c.}$$

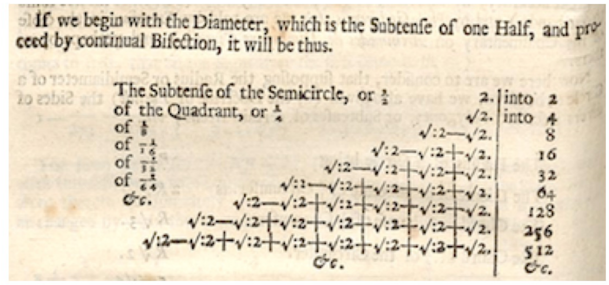
That is, $1 \times \frac{9}{8} \times \frac{25}{24} \times \frac{49}{48} \times \frac{81}{80} \times \frac{121}{120} \times \frac{169}{168} \times$ &c, *infinitely.*

23 If we begin with the Diameter

« Si nous commençons par le diamètre, qui sous-tend la moitié du cercle, et que nous procédons par bissections continues, il en sera ainsi. » Suit un tableau de formules compliquées, à base de racines carrées de deux.

Que veut-il dire par là ?

If we begin with the Diameter
John Wallis, Algebra (1685)


If we begin with the Diameter, which is the Subtense of one Half, and proceed by continual Bisection, it will be thus.

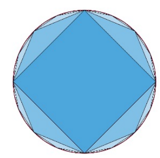
The Subtense of the Semicircle, or $\frac{1}{2}$	2.	into	2
of the Quadrant, or $\frac{1}{4}$	√2.	into	4
of $\frac{1}{8}$	√:2−√2.		8
of $\frac{1}{16}$	√:2−√:2+√2.		16
of $\frac{1}{32}$	√:2−√:2+√:2+√2.		32
of $\frac{1}{64}$	√:2−√:2+√:2+√:2+√2.		64
&c.	√:2−√:2+√:2+√:2+√:2+√2.		128
	√:2−√:2+√:2+√:2+√:2+√:2+√2.		256
	√:2−√:2+√:2+√:2+√:2+√:2+√:2+√2.		512
	&c.		&c.

24 proceed by continual Bisection

Que si on inscrit dans un cercle un carré, puis un octogone, puis un polygone à 16, puis 32 côtés, etc., à chaque fois on augmente le périmètre dans un rapport égal à la racine carrée de deux plus deux fois le rapport précédent, le tout sur deux. En passant à la limite, on écrit le rapport du diamètre à la circonférence, comme un produit infini des rapports successifs.

Sauf que le premier à avoir dit cela n'est pas Wallis, Mais François Viète. Il est mort exactement un siècle avant Wallis.

proceed by continual Bisection
John Wallis, Algebra (1685)



$$r_{n+1} = \frac{\sqrt{2+2r_n}}{2}$$

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}{2}\cdots$$

25 Formule de Viète

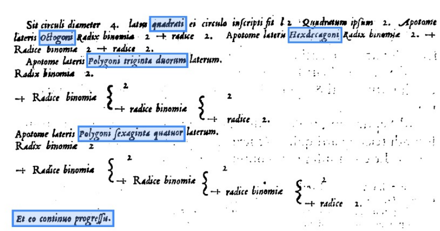
Sa formule, il l'a publiée dans un « livre de réponses variées sur des choses mathématiques ».

Comme vous le voyez, il considère un cercle de diamètre quatre, dans lequel il inscrit un carré, puis un octogone, puis un polygone à 16, 32, 64 côtés. Les rapports des périmètres successifs, s'écrivent en fonction de racine de deux, racine de deux plus racine de deux, etc.

La nouveauté est dans le « etc. » : ou « en progression continuée » comme il le dit au bas de l'image. C'est la toute première fois dans l'histoire, que l'on écrit un nombre comme une limite. Certains y voient l'acte de naissance de l'analyse moderne.

Mais les rapports successifs, en racine de deux plus le précédent, le tout divisé par deux ? Oh ça c'est encore beaucoup plus vieux que Viète ! Wallis l'attribue à Archimède.

Formule de Viète
Viète (1540–1603) Variorum de rebus mathematicis responsorum (1593)


Sit circuli diameter 4. latus quadrati ei circulo inscripti fit l 2 Quadratum ipsum 2. Apotome lateris Octogoni Radix binomiæ 2 + radice 2. Apotome lateris Hexdecagoni Radix binomiæ 2. + Radice binomiæ 2 + radice 2.

Apotome lateris Polygoni triginta duorum laterum.

Radix binomiæ 2.

+ Radice binomiæ { 2 + radice binomiæ { 2 + radice 2.

Apotome lateris Polygoni sexaginta quatuor laterum.

Radix binomiæ 2

+ Radice binomiæ { 2 + Radice binomiæ { 2 + radice binomiæ { 2 + radice 2.

Et eo continuo progressu.

26 Archimedis circuli dimensio

Effectivement, c'est ainsi que Archimède procède pour établir son fameux encadrement de π : il part d'un hexagone, puis il divise les côtés en deux, jusqu'à un polygone à 96 côtés.

Le passage d'un rapport à l'autre est un petit calcul de géométrie élémentaire, d'un niveau bien inférieur aux exploits d'Archimède : il ne s'attarde même pas à le détailler. Quant à la méthode consistant à approcher un cercle par des polygones successifs, les Européens l'appellent la méthode d'exhaustion, depuis Grégoire de Saint-Vincent. Archimède l'attribue à Eudoxe de Cnide, qui vivait un bon siècle avant lui. La première application connue se trouve au début du livre douze des Éléments d'Euclide.

Archimedis circuli dimensio

Biblioteca Apostolica Vaticana, manuscrit Urb. Lat. 261

27 références

Vous savez quoi ? Je viens de taper « Ramanujan extraterrestre » sur Google. Essayez, vous serez surpris des résultats. Mais non, Ramanujan n'était pas un extraterrestre, ses résultats n'étaient pas plus dictés par la déesse Namagiri que par les petits hommes verts. C'était un mathématicien exceptionnellement doué, qui a assimilé le travail de ses prédécesseurs à une vitesse incroyable, et qui a laissé à ses successeurs du travail pour plusieurs siècles. Rien de surnaturel là-dedans.

Quoique, … à y bien réfléchir…

références

- N. D. Baruah, B. C. Berndt, H. H. Chan (2009) Ramanujan's series for $1/\pi$: a survey, *The American Mathematical Monthly*, 116(7), 567–587
- B. C. Berndt, R. A. Rankin (1995) *Ramanujan : letters and commentary*, American Mathematical Society
- J. M. Borwein, P. B. Borwein, D. H. Bailey (1989) Ramanujan, modular equations, and approximations to Pi or how to compute one billion digits of Pi, *The American Mathematical Monthly*, 96(3), 201–219
- J. Dutka (1982) Wallis' product, Brouncker continued fraction, and Leibniz series, *Archive for History of Exact Sciences*, 26(2), 115–126
- R. Kanigel (1991) *The man who knew infinity*, New York : Washington Square Press
- D. A. B. Young (1994) Ramanujan's illness, *Notes and Records of the Royal Society*, 48, 107–119