0 La continuité des intensités

histoires d'analyse

La continuité des intensités

vers le concept de fonction

hist-math.fr Bernard Ycart

Tant vaut que vous soyez prévenus. Je vais passer mon temps à vous raconter qu'on manipule des fonctions partout et depuis la plus haute antiquité, tout cela pour conclure que le concept de fonction tel que nous le connaissons, ne date guère que du dix-neuvième siècle européen.

Vous êtes prêts ? Allons-y !

1 Début du Papyrus Rhind

Voici le début du Papyrus Rhind. Tel qu'il est présenté, il se lit de droite à gauche. La première colonne est écrite en rouge. Elle contient l'objet du document : c'est un « bon exemple pour aller au fond des choses, pour apprendre à connaître tout ce qui est, tout ce qui est obscur, percer tous les secrets ». Les deux autres colonnes, écrites en noir, nous apprennent qui est le rédacteur, quand il a écrit, et l'origine du texte, qui est plus ancienne.

Deux traits verticaux séparent ces trois premières colonnes introductives, du texte proprement dit. Et avant même que ne débutent les problèmes, le scribe a placé une liste de tous les quotients de 2 par un nombre impair allant de 3 à 99. Il était important pour les calculs égyptiens, de savoir ramener chacun de ces quotients à une somme de fractions de numérateur 1. Mais ce n'est pas ce qui nous importe ici.

Avons-nous sous les yeux la première table de la fonction qui à x associe 2 sur x ? Non bien sûr : seules les valeurs qui peuvent avoir une utilité pour le calcul sont données. Il serait absurde de donner les quotients de 2 par les nombres pairs. Les Égyptiens n'avaient probablement pas l'idée d'une correspondance possible entre une grandeur (continue), et le double de son inverse.

Début du Papyrus Rhind
Ahmès (ca 1650 av. J.-C.)

2 Table de réciproques (Nippur ca 1800 av. J.-C.)

J'ai à peu près la même chose à vous dire des tablettes mésopotamiennes qui listent des inverses, ou plutôt des réciproques. Il ne s'agit que d'aligner des résultats de calculs sexagésimaux. D'ailleurs la liste des premiers réciproques ne contient pas ceux de tous les entiers. Sept et onze dont l'inverse en sexagésimal n'a pas d'expression finie, sont en général écartés. Il n'y a donc pas là non plus, l'idée d'une fonction.

Table de réciproques (Nippur ca 1800 av. J.-C.)
ERM 14645, Musée de l'Hermitage, Saint-Pétersbourg

3 Table de carrés (Nippur ca 1800 av. J.-C.)

Table de carrés (Nippur ca 1800 av. J.-C.)
CBS 08266, Musée d'anthropologie, U. de Pennsylvanie

Les Mésopotamiens étaient de grands consommateurs de tables, comme ici une table de carrés. Il y avait aussi des tables de cubes, et de nombreuses tables métrologiques de conversions. Mais rien n'indique que leurs tables de valeurs discrètes impliquaient l'idée d'une relation fonctionnelle.

4 Tablette d'Ammi-ṣaduqa (ca 1630 av. J.-C.)

Tablette d'Ammi-ṣaduqa (ca 1630 av. J.-C.)
Copie du VII^{e}, Bibliothèque d'Assurbanipal, Ninive

Mais que dire alors des tables astronomiques ? La plus ancienne connue, donne des relevés des positions relatives de Vénus par rapport au soleil et à la lune. Ce que vous voyez en est une copie plus tardive. Les relevés datent de l'arrière-petit-fils d'Hammurabi.

5 Pages Vénus du codex de Dresde (ca 1300)

Le codex de Dresde est l'un des trois seuls manuscrits mayas qui aient survécu. Les pages que vous voyez donnent des enregistrements de la position de Vénus, vers le dixième siècle de notre ère. On pense que les Mayas utilisaient ces données pour prévoir le cycle de Vénus.

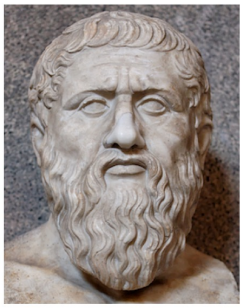
Pages Vénus du codex de Dresde (ca 1300)
Bibliothèque d'état et universitaire, Dresde

Inutile de vous en montrer plus, les observations astronomiques datent de toutes les époques, proviennent de toutes les civilisations. La position d'un astre dans l'espace par rapport à la Terre n'était certes pas perçue comme une fonction périodique du temps. Mais il est difficile de ne pas voir dans les tables astronomiques, le précurseur le plus évident du concept de fonction.

À partir de ce fond commun, les Grecs ont innové, dans plusieurs directions. D'abord, ils ont précisé la notion de mouvement. Oh, certes, nous sommes encore loin d'une fonction du temps. Mais tout de même, Platon distingue plusieurs sortes de mouvements, dont le mouvement circulaire.

6 Les Lois, Livre X

Les Lois, Livre X
Platon (ca 428–348 av. J.-C.)



« Nous comprenons que dans cette révolution circulaire le mouvement qui fait tourner à la fois le plus grand et le plus petit cercle se distribue proportionnellement au plus grand et au plus petit, étant lui même plus grand ou plus faible dans la même proportion. »

Aristote va plus loin, en théorisant la nature du mouvement. Parmi tous les mouvements possibles, il en distingue deux.

7 Traité du ciel, Livre I, chapitre 2

Traité du ciel, Livre I, chapitre 2
Aristote (384–322 av. J.-C.)

« Tout mouvement dans l'espace, que nous appelons de translation, est en ligne droite ou circulaire, ou bien un mélange de ces deux-là. Mais il n'y a que les deux premiers mouvements qui soient simples. Cela tient à ce que, parmi les grandeurs, il n'y a que celles-là seules qui soient simples, la droite et le circulaire. »

Vous reconnaissez bien là la classification grecque des problèmes géométriques. Il y a les problèmes résolubles à la règle et au compas, c'est-à-dire avec des droites et des cercles, les problèmes dits « solides » qui impliquent des intersections de cônes et de plans, et les autres.

Justement en parlant de cône et de mouvement, vous vous souvenez de la définition qu'Apollonius donne d'un cône ?

8 Surfaces coniques

Surfaces coniques
Apollonius de Pergé (ca 240–190 av. J.-C.)

« Si, d'un certain point, est menée une droite de jonction à la circonférence d'un cercle qui n'est pas dans le même plan que le point, qu'elle est prolongée de part et d'autre et que, le point restant fixe, elle tourne autour de la circonférence du cercle pour revenir à l'origine de son mouvement, j'appelle *surface conique* la surface décrite par la droite [. . .] »

Si, d'un certain point, est menée une droite de jonction à la circonférence d'un cercle qui n'est pas dans le même plan que le point, qu'elle est prolongée de part et d'autre et que, le point restant fixe, elle tourne autour de la circonférence du cercle pour revenir à l'origine de son mouvement, j'appelle *surface conique* la surface décrite par la droite [. . .]

Je vous raconte ailleurs comment Apollonius définit pour ses coniques des abscisses et des ordonnées, comment il établit entre elles ce qui ressemble fort à une équation cartésienne, et aussi comment il détermine des maxima et des minima, c'est-à-dire des tangentes et des normales issues d'un point donné.

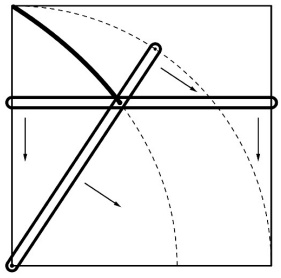
Mais tout cela reste purement géométrique. Apollonius ne pense pas les coniques en termes de fonctions ou d'équations, mais seulement en termes de courbes et de droites.

9 Quadratrice

Et il n'y avait pas que les coniques : les Grecs connaissaient de nombreuses courbes, dont beaucoup étaient définies par un mouvement. Comme la quadratrice d'Hippias, ou de Dinostrate, par exemple :

Imaginez deux tiges, une coulisse verticalement, l'autre est articulée en bas à gauche. La première part du haut, la deuxième démarre à la verticale. Les deux descendent à la même vitesse et arrivent dans la même position en bas au même moment. La quadratrice est la courbe décrite par le point d'intersection des deux tiges.

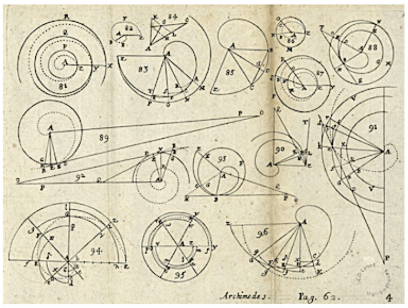
Quadratrice
Hippias d'Élis (ca 460–400 av. J.-C.)



10 Des spirales (édition de 1675)

Que dire aussi d'Archimède ? Pour ses calculs d'aires, de volumes, de centres de gravité, qui pour nous sont des calculs d'intégrales, il a mis au point une méthode de quadrature tellement puissante et rigoureuse, qu'elle ne sera surpassée que deux mille ans plus tard.

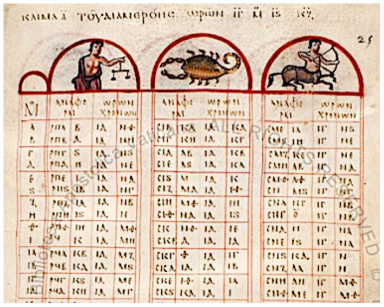
Des spirales (édition de 1675)
Archimède (ca 287–212 av. J.-C.)



11 Tables astronomiques de Ptolémée (ca 85–165)

Bien sûr les Grecs, comme les Mésopotamiens avant eux, conservaient des relevés des positions des astres principaux. Cela donnait des tables numériques, mais rien ne permet de penser qu'ils les voyaient comme des fonctions.

Tables astronomiques de Ptolémée (ca 85–165)
Biblioteca Apostolica Vaticana, Vat. gr. 1291



12 Scaphé de Carthage (I^er^ siècle)

Pour autant, il ne se privaient pas de traduire les mouvements en courbes, dans les instruments astronomiques. Ceci est un scaphé, à savoir un cadran solaire hémisphérique. Remarquez les courbes tracées à l'intérieur.

Il n'y avait pas que les cadrans solaires : Pour construire un astrolabe, il fallait aussi traduire des relevés astronomiques en courbes tracées point par point.

Scaphé de Carthage (I^er^ siècle)
Musée du Louvre

13 Table de cordes (édition de 1538)

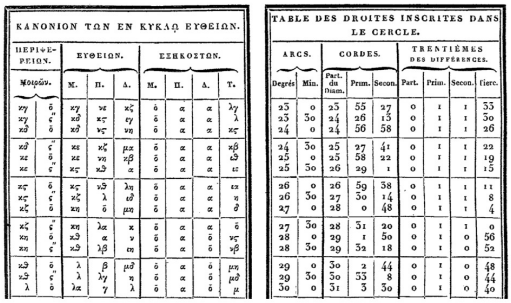
Il y avait tout de même plus que de simples relevés d'observation. Depuis Hipparque au moins, les astronomes avaient reconnu l'importance des mesures de la corde associée à un arc de cercle. Ptolémée donne une table des cordes pour chaque arc de cercle, précise au demi-degré. Ah là il y a bien un concept de fonction non ? Eh bien non, pas vraiment, la corde d'un arc peut très bien ne rester qu'une notion purement géométrique.

Table de cordes (édition de 1538)
Ptolémée (ca 85–165) Almageste

14 Table de cordes (édition de 1813)

Pourtant, comme vous le voyez dans cette traduction française, Ptolémée donnait non seulement les valeurs des cordes, mais encore les différences tabulaires. Voyait-il un rapport entre ces différences tabulaires et la tangente à une courbe ? Non, probablement pas.

Table de cordes (édition de 1813)
Ptolémée (ca 85–165) Almageste

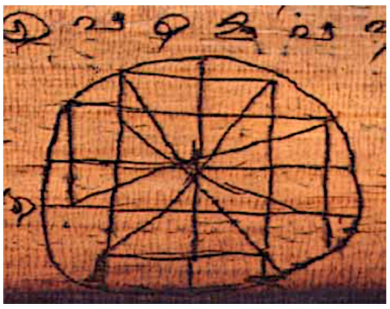


15 Calcul de sinus, Āryabhaṭīya (499)

Ceci est le diagramme qui accompagne les explications de Bhaskara I, sur la manière de calculer une table de sinus. Il faut dire que ces explications ne sont pas superflues.

Bhaskara commente ici un seul verset de Aryabhata, plutôt condensé comme à son habitude. En voici la traduction.

Calcul de sinus, Āryabhaṭīya (499)
Bhāskara I (ca 600-680), Manuscrit KUOML Co 1712



16 Āryabhaṭīya (499), Verset XII

« Les différences sont diminuées des quotients successifs des sinus par le premier sinus. »

Que veut-il dire par là ? Les 24 nombres sont des différences successives entre les sinus des angles multiples de π sur 48. Aryabhata ne se fatigue pas à donner la table des sinus, les différences tabulaires suffisent pour le calcul. La remarque qui suit cette liste de différences, est extrêmement astucieuse. Aryabhata observe que les différences décroissent, et que la différence entre deux valeurs successives est proportionnelle au sinus. De là à dire que la dérivée seconde de la fonction sinus est l'opposé du sinus, il n'y a qu'un pas.

Oui mais ce pas, ni Aryabhata, ni Bhaskara ne l'ont franchi.

Āryabhaṭīya (499), Verset XII
Āryabhaṭa (476–550)

225 224 222 219 215 210 205 199
191 183 174 164 154 143 131 119
106 93 79 65 51 37 22 7

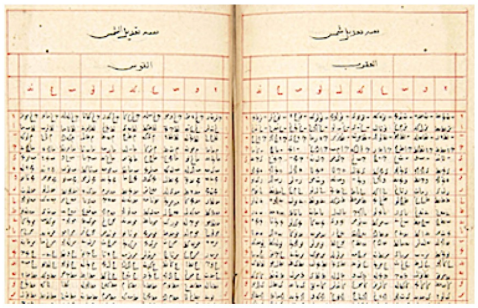
Les différences sont diminuées des quotients successifs des sinus par le premier sinus.

17 Tables Astronomiques

Et les Arabes alors ? Bien sûr, ils ont continué la tradition des tables astronomiques. Je vous raconte ailleurs l'épopée de la diffusion en Occident des tables d'Ulugh Beg.

À partir des calculs de cordes de Ptolémée, et de la notion de sinus importée des Indiens, ils ont développé toute la trigonométrie, telle que nous la connaissons, avec ses fonctions, et son cortège de formules, tant pour la trigonométrie plane que sphérique.

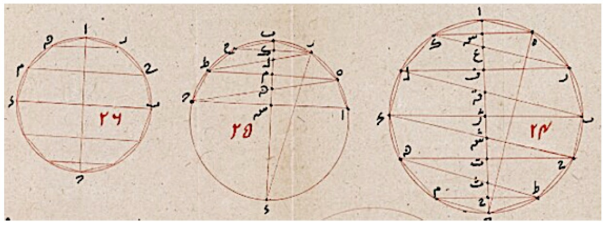
Tables Astronomiques
Ulugh Beg (1394-1449)



18 De la sphère et du cylindre (traduction arabe)

De fins connaisseurs d'Archimède comme les frères Banu Musa, Thabit ibn Qurra et leurs successeurs, ne pouvaient pas manquer de prolonger et d'affiner les méthodes de quadrature du maître. Ils l'ont fait, avec beaucoup de pénétration et d'astuce. Ils sont arrivés à presque définir le calcul intégral tel que nous le connaissons. Mais il ne s'agissait encore que de géométrie : toujours pas de concept de fonction là-dedans.

De la sphère et du cylindre (traduction arabe)
Archimède (287–212 av. J.-C.)



19 Tables alphonsines

Bon là, j'ai besoin d'une transition vers le Moyen-Âge européen. Et puis, soyons honnête, j'ai aussi envie de profiter de la période pour vous montrer de beaux manuscrits, comme celui-ci. Évidemment, parmi les nombreuses traductions de manuscrits arabes que le roi Alphonse X a ordonnées, il y avait des tables astronomiques. Les lettrés qu'il faisait travailler, en particulier à Tolède, ont su utiliser l'outil de calcul, et fournir des éphémérides, donnant comme ici mois par mois les positions des astres principaux, jusqu'au milieu du quatorzième siècle.

Tables alphonsines
Alphonse X de Castille (1221–1284)

20 Aristote, Traité du ciel et du monde (1377)

Eh bien, nous y sommes ! Bienvenue au quatorzième siècle. Ce magnifique manuscrit, cadeau de Gallica, est une copie de la traduction, en français s'il vous plaît, du traité du ciel d'Aristote. Vous vous souvenez ? C'est dans ce traité qu'Aristote nous avait donné sa classification des mouvements.

La traduction a été ordonnée par le roi Charles V le sage à son conseiller Nicole Oresme. Du coup Oresme est montré sur cette enluminure, agenouillé, en train d'offrir le traité au roi, couronné et entouré de fleurs de lys. À droite, le cercle festonné avec des étoiles autour de la Terre, symbolise le sujet du livre.

Aristote, Traité du ciel et du monde (1377)
Nicole Oresme (1323–1382)

21 Oresme au travail

Dans le même manuscrit une autre image le montre à sa table de travail, en train de rédiger son livre. Il en est assez fier d'ailleurs. L'ouvrage se termine par ces mots :

« Et ainsi avec l'aide de Dieu, j'ai accompli le livre du Ciel et du Monde, au commandement du très excellent prince Charles, cinquième de ce nom, par la grâce de Dieu roi de France, lequel en ce faisant m'a fait évêque de Lisieux. Et pour animer, exciter et émouvoir les cœurs des jeunes hommes qui ont subtil et nobles engins et désir de science, j'ose dire et me fais fort qu'il n'est homme mortel qui oncques vit ni plus beau ni meilleur livre de philosophie naturelle que celui-ci, ni en hébreu, ni en grec, ni en latin ni en français. »

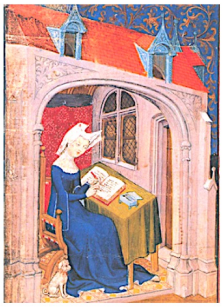
Oresme au travail
Nicole Oresme (1323–1382)

22 Christine de Pizan au travail

Parmi les jeunes hommes qui ont désir de science, il y a eu Christine de Pizan. Son père était en quelque sorte un collègue d'Oresme : il était l'astrologue officiel du roi Charles V, et donc un de ses conseillers.

Christine de Pizan, est la toute première femme de lettres de la chrétienté. Les livres d'Aristote traduits par Oresme, qu'elle cite à plusieurs reprises, semblent avoir eu une réelle influence sur sa philosophie.

Christine de Pizan au travail
Christine de Pizan (1364–1431)



23 La cité des dames (1405)

Et puisque nous en sommes aux beaux manuscrits, voici celui de la « Cité des Dames ». Vous y voyez à gauche Christine de Pizan offrant son livre à Isabeau de Bavière. À droite les deux mêmes sont en train de bâtir cette fameuse cité des dames. Le tout n'est qu'allégorique bien sûr.

Mais revenons à Oresme.

La cité des dames (1405)
Christine de Pizan (1364–1431)

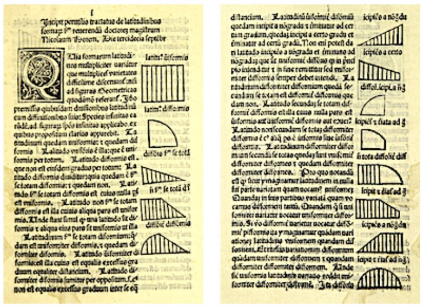
24 De latitudinibus formarum (1482)

Vous avez sous les yeux les deux premières pages d'un livre rare. C'est un incunable, c'est-à-dire un livre imprimé avant quinze cents. Je vous explique ailleurs que la plupart des incunables mathématiques sont des arithmétiques commerciales, que l'on appelait des « livres d'abaque ». Celui-ci fait exception, et c'est vous dire l'importance qui lui était accordée.

L'original a été rédigé par Oresme dans les années 1350, longtemps avant ses traductions d'Aristote. Remarquez les dessins en forme d'histogrammes dans la marge. Ce sont les toutes premières représentations fonctionnelles de l'histoire. Oresme est le premier à avoir compris que quand deux grandeurs étaient liées entre elles, l'intensité de l'une pouvait être représentée par un segment vertical, pour chaque valeur de l'autre.

Nous avons pris l'habitude de parler d'abscisse pour la variable et d'ordonnée pour la valeur de la fonction, mais même quand Descartes et Fermat introduiront ce que nous appelons la représentation cartésienne, ils ne parleront ni de fonction ni d'abscisse ni d'ordonnée. Il faudra attendre Leibniz à la toute fin du dix-septième siècle pour cela. Restons pour le moment au milieu du quatorzième, et écoutons Oresme.

De latitudinibus formarum (1482)
Nicole Oresme (1323–1382)



25 De latitudinibus formarum (ca 1350)

« On se représente toute chose mesurable, à l'exception des nombres, comme une grandeur continue. [...] Toute intensité qui peut être acquise de façon successive doit donc être représentée par une ligne droite élevée perpendiculairement en un point de l'espace ou du sujet de la chose intensive, par exemple d'une qualité. »

Pour comprendre la difficulté à laquelle Oresme fait face, souvenez-vous que notre notion de nombre réel n'existe pas. Depuis les Grecs, un nombre est un entier. Il n'y a qu'une ligne géométrique pour donner l'image du continu. Quand Oresme dit que l'intensité qu'il considère est acquise de façon « successive », il introduit l'idée du temps. Son exemple de base est donc la notion de mouvement, comme mesure d'une intensité en fonction du temps. En ce sens, il se place dans la lignée d'Aristote, qu'il cite souvent. Mais sa proposition est plus générale. Continuons la lecture.

De latitudinibus formarum (ca 1350)
Nicole Oresme (1323–1382), traduction P. Souffrin et J.-P. Weiss

On se représente toute chose mesurable, à l'exception des nombres, comme une grandeur continue. [...] Toute intensité qui peut être acquise de façon successive doit donc être représentée par une ligne droite élevée perpendiculairement en un point de l'espace ou du sujet de la chose intensive, par exemple d'une qualité.

26 La forme originelle du continu

« Par ailleurs, l'intensité exprime aussi l'idée qu'une chose est « plus ceci » ou « plus cela », par exemple « plus blanche » ou « plus rapide ». Cette intensité, [...] est divisible d'une seule façon et à l'infini, comme un continuum. On ne peut donc la représenter plus adéquatement que sous la forme du continuum qui est originellement divisible et d'une seule façon, c'est-à-dire par une droite. Comme nous connaissons mieux et concevons plus facilement la grandeur ou le rapport des droites – qui plus est la droite est la forme originelle du continu – une telle intensité doit être représentée par des droites, et au mieux par des droites élevées perpendiculairement au sujet. »

L'idée clé est donc de représenter des rapports d'intensité non pas par des nombres, il n'en était pas encore question, mais par des rapports de droites. Oresme précise : « Ainsi des intensités égales sont représentées par des droites égales, une intensité double par une droite double, et toujours ainsi on continue de façon proportionnelle. »

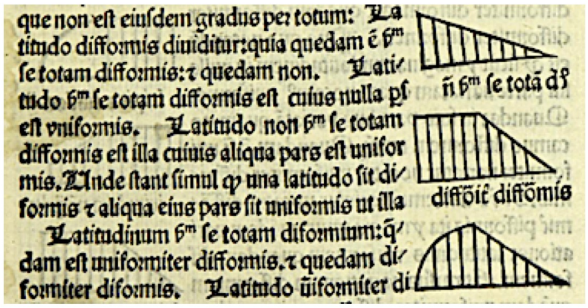
La forme originelle du continu
Oresme (1323–1382), De latitudinibus formarum (ca 1350)

Par ailleurs, l'intensité exprime aussi l'idée qu'une chose est « plus ceci » ou « plus cela », par exemple « plus blanche » ou « plus rapide ». Cette intensité, [...] est divisible d'une seule façon et à l'infini, comme un continuum. On ne peut donc la représenter plus adéquatement que sous la forme du continuum qui est originellement divisible et d'une seule façon, c'est-à-dire par une droite. Comme nous connaissons mieux et concevons plus facilement la grandeur ou le rapport des droites – qui plus est la droite est la forme originelle du continu – une telle intensité doit être représentée par des droites, et au mieux par des droites élevées perpendiculairement au sujet.

27 De latitudinibus formarum (1482)

On peut voir l'idée d'Oresme comme une concrétisation de la notion de dépendance fonctionnelle. Qu'une grandeur puisse dépendre d'une autre est une évidence depuis toujours, surtout quand la première est le temps. La nouveauté chez Oresme est de traduire cette dépendance par des segments de droite orthogonaux à un axe horizontal.

De latitudinibus formarum (1482)
Nicole Oresme (1323–1382)



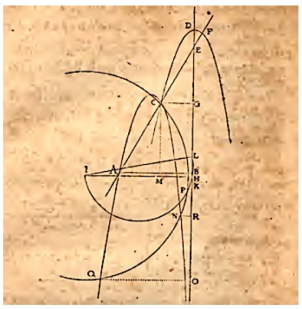
28 La géométrie (1637)

Trois siècles plus tard, la révolution que Descartes introduit est celle de la géométrie algébrique. Représenter géométriquement les quantités qu'il note désormais par des lettres, est accessoire, les équations prennent le pas.

Néanmoins, Descartes a lu Oresme, et il en a conservé l'idée de représenter les quantités par des lignes.

Voici ce qu'il dit. « Prenant successivement infinies diverses grandeurs pour la ligne y, on en trouvera aussi infinies pour la ligne x, et ainsi on aura une infinité de divers points, par le moyen desquels on décrit la ligne courbe demandée. »

La géométrie (1637)
René Descartes (1596–1650)



29 La méthode des fluxions et des suites infinies (1740)

Ce que vous voyez est extrait de la traduction par Buffon du traité de Newton sur les fluxions. C'est le passage où Newton expose son problème, qui est ce que nous appelons le théorème fondamental de l'analyse.

Newton a parfaitement conscience de la généralité de sa méthode, mais il choisit néanmoins de l'exprimer en termes de mouvement : « j'observerai que toutes leurs difficultés peuvent se réduire à ces deux problèmes seulement, que je vais proposer sur un espace décrit par un mouvement retardé ou accéléré d'une façon quelconque. »

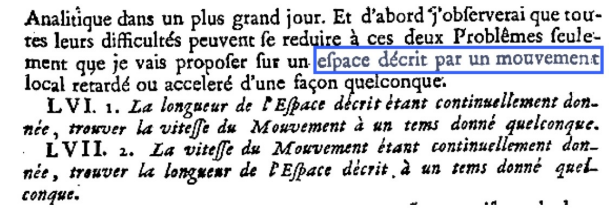
Exprimer les deux problèmes en termes de mouvement permet de faire comprendre que les deux problèmes sont réciproques l'un de l'autre, ce qui n'était pas évident géométriquement : les Grecs ne pouvaient pas deviner le rapport entre tracer des tangentes et calculer des quadratures.

« La longueur de l'espace décrit étant continuellement donnée, trouver la vitesse du mouvement à un temps donné quelconque » (la dérivation).

« La vitesse du mouvement étant continuellement donnée, trouver la longueur de l'espace décrit à un temps donné quelconque » (l'intégration).

Remarquez comme la dépendance fonctionnelle est énoncée : « étant continuellement donnée ». Newton ne parle pas de fonction. La première utilisation du mot dans un sens mathématique est due à Leibniz.

La méthode des fluxions et des suites infinies (1740)
Isaac Newton (1643–1727)



Analitique dans un plus grand jour. Et d'abord j'obſerverai que toutes leurs difficultés peuvent ſe reduire à ces deux Problêmes ſeulement que je vais propoſer ſur un eſpace décrit par un mouvement local retardé ou acceleré d'une façon quelconque.

LVI. 1. *La longueur de l'Eſpace décrit étant continuellement donnée, trouver la viteſſe du Mouvement à un tems donné quelconque.*

LVII. 2. *La viteſſe du Mouvement étant continuellement donnée, trouver la longueur de l'Eſpace décrit à un tems donné quelconque.*

30 De functionibus (août 1673)

Elle apparaît dans un manuscrit de 1673, intitulé « Méthode des tangentes inverses, ou bien De functionibus », sur les fonctions. Vous voyez le sous-titre du document : « Trouver un lieu à partir d'un autre lieu donné, celui de certaines fonctions données. Ou encore, trouver un lieu dans lequel les données appliquées d'un lieu donné remplissent la fonction proposée. Cette méthode est opposée à la méthode des tangentes. »

Oui bon, un peu de paraphrase s'impose. Leibniz conçoit une courbe géométrique, qu'il appelle un lieu, comme associée à des droites qui remplissent certaines fonctions : comme les tangentes, ou les normales. Depuis Apollonius et Archimède jusqu'à Fermat et Descartes, on s'est toujours préoccupé de déterminer ces droites, connaissant la courbe. Leibniz lui, veut résoudre le problème inverse : comment retrouver la courbe, connaissant une propriété des droites qui remplissent une fonction donnée ; par exemple, sachant que les tangentes vérifient telle équation, retrouver la courbe. En clair, Leibniz propose de résoudre une équation différentielle.

Au fil des années, et de sa correspondance avec Jean Bernoulli entre autres, le mot fonction va prendre graduellement le sens plus général d'une grandeur qui évolue relativement à une autre. Néanmoins, au siècle suivant, cette dépendance restera surtout décrite algébriquement. Pour Euler et Lagrange, comme pour Newton et Leibniz, une dépendance fonctionnelle se traduit par une expression algébrique, idéalement un polynôme infini, ce que nous appelons une série entière. Voici la définition d'Euler, dans un livre qui fera longtemps autorité, l'« Introduction à l'analyse infinitésimale ».

De functionibus (août 1673)
Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646–1716)

De locis locorum inveniendis, seu de applicatis loci cuiusdam dati functionem in alio loco, qui quaeritur, facientibus.

Seu de inveniendo loco, in quo applicatae loci dati, faciunt functionem propositam.

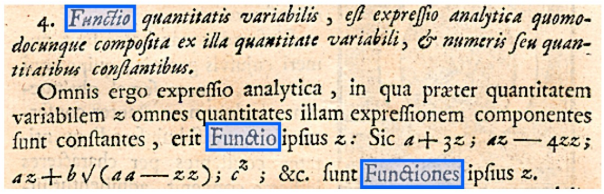
Est haec methodus methodo tangentium opposita.

31 Introductio in Analysin Infinitorum (1748)

« Une fonction d'une quantité variable est une expression analytique composée, de manière quelconque, de cette même quantité variable, et de nombres ou de quantités constantes. Toute expression analytique, dans laquelle, à part la variable z toutes les autres quantités sont constantes, est une fonction de z. Ainsi, $a + 3z$, $az - 4z^2$ etc. »

Mais sept ans plus tard, dans la préface de ses « Institutions du calcul différentiel », Euler fait volte-face.

Introductio in Analysin Infinitorum (1748)
Leonard Euler (1707–1783)



4. Functio quantitatis variabilis, eſt expreſſio analytica quomodocunque compoſita ex illa quantitate variabili, & numeris ſeu quantitatibus conſtantibus.

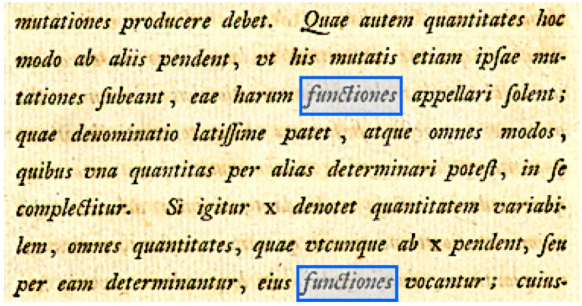
Omnis ergo expreſſio analytica, in qua præter quantitatem variabilem z omnes quantitates illam expreſſionem componentes ſunt conſtantes, erit Functio ipſius z: Sic $a+3z$; $az-4zz$; $az+b\sqrt{(aa-zz)}$; c^z; &c. ſunt Functiones ipſius z.

32 Institutiones Calculi Differentialis (1755)

« Si certaines quantités dépendent d'autres quantités de telle manière que si les autres changent, ces quantités changent aussi, alors on a l'habitude de nommer ces quantités fonctions de ces dernières ; cette dénomination a la plus grande étendue et contient en elle-même toutes les manières par lesquelles une quantité peut être déterminée par d'autres. Si, par conséquent, x désigne une quantité variable, alors toutes les autres quantités qui dépendent de x de n'importe quelle manière, ou qui sont déterminées par x, sont appelées fonctions de x. »

Alors : expression analytique, ou dépendance générale ? Il faudra beaucoup de tâtonnements, d'exemples et de contre-exemples pour distinguer petit à petit les propriétés caractéristiques des fonctions utiles, continuité, dérivabilité, etc.

Institutiones Calculi Differentialis (1755)
Leonard Euler (1707–1783)



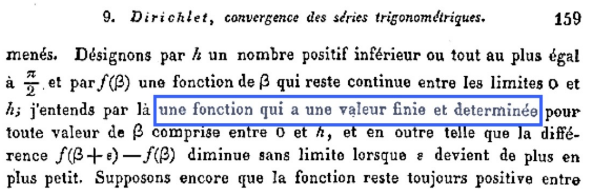
mutationes producere debet. Quae autem quantitates hoc modo ab aliis pendent, vt his mutatis etiam ipſae mutationes ſubeant, eae harum functiones appellari ſolent; quae denominatio latiſſime patet, atque omnes modos, quibus vna quantitas per alias determinari poteſt, in ſe complectitur. Si igitur x denotet quantitatem variabilem, omnes quantitates, quae vtcunque ab x pendent, ſeu per eam determinantur, eius functiones vocantur; cuius-

33 Sur la convergence des séries trigonométriques (1829)

La vision moderne apparaît avec la rigueur du dix-neuvième siècle, entre autres chez Dirichlet. Cet article est celui où il démontre la convergence des séries trigonométriques pour les fonctions continues par morceaux. Il vous dit ce qu'il entend par fonction continue : « une fonction $f(\beta)$ qui a une valeur finie et déterminée pour chaque valeur de β comprise entre 0 et h, et en outre telle que la différence $f(\beta+\varepsilon)-f(\beta)$ diminue sans limite lorsque ε devient de plus en plus petit. »

À part quelques différences de vocabulaire, à part l'écriture en langage courant là où nous emploierions des quantificateurs, c'est bien notre définition moderne d'une fonction continue en tout point sur un intervalle.

Sur la convergence des séries trigonométriques (1829)
Gustav Lejeune-Dirichlet (1805–1859)



9. Dirichlet, convergence des séries trigonométriques. 159

menés. Désignons par h un nombre positif inférieur ou tout au plus égal à $\frac{\pi}{2}$ et par $f(\beta)$ une fonction de β qui reste continue entre les limites 0 et h; j'entends par là une fonction qui a une valeur finie et déterminée pour toute valeur de β comprise entre 0 et h, et en outre telle que la différence $f(\beta+\varepsilon)-f(\beta)$ diminue sans limite lorsque ε devient de plus en plus petit. Supposons encore que la fonction reste toujours positive entre

34 références

Ouf, on a fini par y arriver ! Tout cela en partant de la notion de mouvement qui est évidente pour tout le monde. Vous savez quoi ? Je commence à m'inquiéter. S'il me faut une histoire complète pour vous raconter les avatars de chaque évidence depuis les débuts de la création, nous ne sommes pas rendus !

références

- J. Babb (2005) Mathematical concepts and proofs from Nicole Oresme, *Science and Education*, 14, 443–456
- M. Clagett (1968) *Nicole Oresme and the medieval geometry of qualities and motions*, Madison : The University of Wisconsin Press
- J. Dhombres (1986) Quelques aspects de l'histoire des équations fonctionnelles liés à l'évolution du concept de fonction, *Archive for History of Exact Sciences*, 36(2), 91–181
- C. H. Edwards (1994) *The historical development of the calculus*, New York : Springer
- P. Souffrin, J.-P. Weiss (1988) *Nicolas Oresme, tradition et innovation chez un intellectuel du* XIV^{e} *siècle*, *Cultura*, Paris : Belles-Lettres
- A. P. Youschkevitch (1976) The concept of function up to the middle of the 19th century, *Archive for History of Exact Sciences*, 16(1), 37–85