

0 De Madhava à Taylor

Les redécouvertes de résultats mathématiques ont été fréquentes dans l'histoire. Mais je ne connais pas d'exemple où les acteurs aient été aussi nombreux, les démonstrations aussi diverses, que les développements en série des fonctions usuelles.

histoires d'analyse

De Madhava à Taylor

développements en série



hist-math.fr

Bernard YCART

1 Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646–1716)

Quand il s'agit d'analyse en général et de séries en particulier, deux noms dominent la scène : Newton et Leibniz. En 1672, à vingt-six ans, Leibniz est encore inconnu. Il arrive à Paris, et ne sait pas grand-chose en mathématiques. Mais il a la chance d'y rencontrer un maître, qui va le prendre en main. Écoutez son récit.

« En ce temps-là, je ne connaissais pas la définition exacte du centre de gravité. Au point que, quand par hasard j'en parlai à Huygens, je lui dis que je pensais qu'une ligne droite passant par le centre de gravité découpait la figure en deux parties égales. »

Comme vous le savez, Huygens n'est pas celui à qui on peut raconter n'importe quoi sur les centres de gravité.

Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646–1716)

Lettre à Tschirnaus (1679)



2 Christiaan Huygens (1629–1695)

« Huygens rigola en entendant cela, et me dit que rien n'était plus éloigné de la vérité. Alors, piqué par cette stimulation, je commençai à étudier de la géométrie plus avancée, quoique en fait je n'avais pas encore étudié les Éléments d'Euclide en ce temps-là. Huygens, qui me croyait meilleur géomètre que je n'étais, me donna à lire les lettres de Pascal, publiées sous le nom de Dettonville. »

Les lettres de Pascal, je vous en parle ailleurs. Jointes à la stimulation piquante de Huygens, elles n'ont pas tardé à porter leurs fruits.

Christiaan Huygens (1629–1695)

Leibniz, Lettre à Tschirnaus (1679)



3 Arithmeticus Tetragonismus (1674)

« L'année 1674, autant que je me souviene, je tombai sur la célèbre quadrature arithmétique. »

Oui, bon autant qu'il se souviene, car il écrit ceci dans un plaidoyer contre ses adversaires anglais, peu avant sa mort, donc quarante ans après les faits. Qu'est ce que c'est que cet Arithmeticus Tetragonismus, cette quadrature arithmétique ?

Tout simplement un cas particulier du développement limité de arc tangente. Il y est arrivé en comprenant géométriquement que l'arc tangente était la primitive de un sur un plus x^2 . Cela se passait avant qu'il invente le calcul intégral, donc les primitives. Il n'était encore question que d'aire sous une courbe. Mais une fois compris le rapport avec un sur un plus x^2 , la technique était déjà connue : développer en série en remplaçant x par $-x^2$ dans une série géométrique, puis intégrer terme à terme. Cela faisait longtemps que l'on savait que l'aire sous la courbe de x^n était en $x^{n+1}/(n+1)$.

Pour obtenir sa quadrature, Leibniz n'avait plus qu'à remplacer x par un. C'était un résultat magnifique, et Leibniz n'était pas peu fier des compliments de Huygens :

« Quand je montrai ce résultat à Huygens, avec une démonstration, ce dernier le loua vivement, et quand il renvoya le mémoire, dans la lettre qui accompagnait l'envoi, il disait que c'était une découverte qui serait toujours mémorable parmi les géomètres du futur. »

Alors pourquoi donc ne l'a-t-il pas publiée, cette découverte mémorable ? On peut essayer de croire à la version prétentieuse qu'il donne à Jean Bernoulli, en 1703.

4 Lettre à Jean Bernoulli (avril 1703)

« Je ne pensai pas que ma quadrature arithmétique, bien qu'elle fût reçue avec beaucoup de louanges par les Français et les Anglais, valût la peine d'être publiée, et je répugnais à perdre du temps à de telles trivialités, tandis que l'océan tout entier s'ouvrait à moi. »

La vérité est que le résultat avait déjà été trouvé plusieurs fois, bien avant Leibniz. Pour se défendre des accusations de plagiat, lui-même dit : « Il ne fait aucun doute que ni Huygens ni qui que ce soit d'autre à Paris, n'avait entendu quoi que ce soit à propos de l'expression de l'aire d'un cercle par le moyen d'une série infinie de rationnels, (comme par la suite il fut connu que la série avait été trouvée par Newton et par Gregory). »

Arithmeticus Tetragonismus (1674)

Leibniz, *Historia et origo calculi differentialis* (1715)

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$$

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots + \frac{(-1)^n}{2n+1} + \dots$$

Lettre à Jean Bernoulli (avril 1703)

Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716)

Je ne pensai pas que ma quadrature Arithmétique, bien qu'elle fût reçue avec beaucoup de louanges par les Français et les Anglais, valût la peine d'être publiée, et je répugnais à perdre du temps à de telles trivialités, tandis que l'océan tout entier s'ouvrait à moi.

5 James Gregory (1638–1675)

Dans l'ordre chronologique, c'est James Gregory qui a trouvé le premier les développements des fonctions trigonométriques usuelles, en particulier celui de arc tangente.

Gregory, étant écossais, était relativement isolé, mais il avait tout de même voyagé en Italie et en France. Il semble qu'un malentendu avec Huygens l'avait rendu méfiant, d'où le fait qu'il n'ait pas publié ses développements en série. Il aurait trouvé ces développements dès 1668, mais la première trace formelle que l'on en ait se trouve dans une lettre à Collins de 1671.

6 commercium epistolicum (1712)

Heureusement, la correspondance de Collins a été publiée, en 1712. Cette publication était une attaque des Anglais contre Leibniz, la correspondance étant censée étayer leurs accusations de plagiat.

7 Lettre de Gregory, 15 février 1671

Le tout est que le contenu de cette lettre du 15 février 1671, ne laisse aucun doute. Si le rayon est noté r , l'arc a , la tangente t , l'encadré bleu donne bien l'arc en fonction de la tangente. Le suivant est le développement de la tangente en fonction de l'arc, le troisième donne le développement de la sécante, à savoir l'inverse du cosinus.

8 Lettre de Gregory, 15 février 1671

Un peu plus loin, Gregory donne les développements du sinus et du cosinus en fonction de l'angle, puis aussitôt après, celui de l'angle en fonction du sinus, à savoir l'arc sinus.

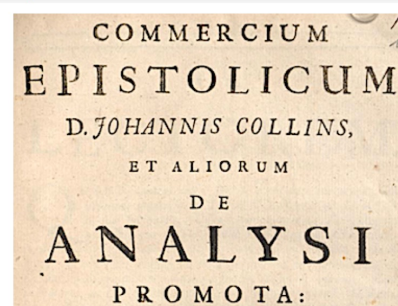
Alors Gregory est bien le premier ? Euh, le premier Européen, peut-être. Mais trois siècles avant lui, dans la pointe sud de l'Inde, un astronome avait fondé une école d'astronomie florissante dans l'état du Kérala.

James Gregory (1638–1675)



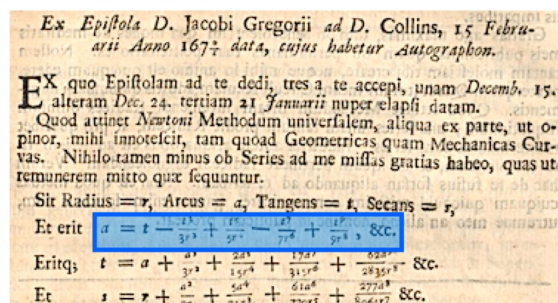
Commercium epistolicum (1712)

John Collins (1624–1683)



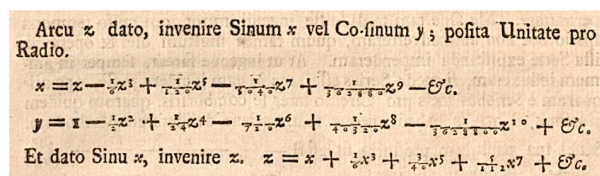
Lettre de Gregory, 15 février 1671

Collins, Commercium epistolicum (1712)



Lettre de Gregory, 15 février 1671

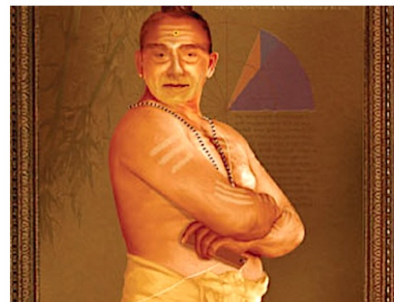
Collins, Commercium epistolicum (1712)



9 Mādhava de Saṅgamagrāma (ca 1350–1425)

Il s'appelait Madhava, et était issu d'un village appelé Saṅgamagrama. L'école qu'il a fondé dans le Kérala a prospéré jusqu'au début du dix-septième siècle. C'est essentiellement par les citations de ses successeurs que l'on connaît son travail, dont en particulier, la fameuse quadrature arithmétique. Voici comment le développement de arc tangente était exprimé en Inde, environ deux siècles avant Gregory.

Mādhava de Saṅgamagrāma (ca 1350–1425)



10 Développement en série

« Le premier terme est le produit du sinus donné et du rayon de l'arc désiré, divisé par le cosinus de l'arc. Les termes suivants sont obtenus par un procédé d'itération, quand le premier terme est multiplié de façon répétée par le carré du sinus et divisé par le carré du cosinus. Tous les termes sont ensuite divisés par les nombres impairs, 1, 3, 5, ... L'arc est obtenu en ajoutant et soustrayant respectivement les termes de rang impair et ceux de rang pair. »

Relisez ceci attentivement, vous devriez retrouver tous les ingrédients. Multiplier par le sinus et diviser par le cosinus, c'est multiplier par la tangente. Ensuite diviser par les entiers impairs, puis alterner les signes, le compte est bon.

Développement en série

Mādhava de Saṅgamagrāma (ca 1350–1425)

Le premier terme est le produit du sinus donné et du rayon de l'arc désiré, divisé par le cosinus de l'arc. Les termes suivants sont obtenus par un procédé d'itération, quand le premier terme est multiplié de façon répétée par le carré du sinus et divisé par le carré du cosinus. Tous les termes sont ensuite [divisés par les nombres impairs](#), 1, 3, 5, ... L'arc est obtenu [en ajoutant et soustrayant respectivement les termes de rang impair et ceux de rang pair](#).

11 Tantrasaṅgraha (1501)

Je vais vous faire un aveu. L'histoire indienne me donne beaucoup de mal. D'abord, il m'est impossible bien sûr de vérifier les manuscrits. Ces lamelles de bois sont issues d'un traité d'astronomie postérieur à Madhava, dans lequel ses travaux sont cités. On y trouve des approximations à l'ordre cinq du sinus, une indication claire que les accroissements du sinus sont proportionnels au cosinus, bref, pas mal de résultats qui nous évoquent le calcul différentiel, découvert en Europe deux siècles plus tard. De là à considérer que les Européens ont tout volé aux Indiens sans les citer, il y a un pas que certains historiens n'hésitent pas à franchir, bien qu'il n'existe aucun début de preuve.

En plus, il n'est pas du tout évident que les astronomes de l'école de Kérala aient généralisé leurs techniques d'approximation pour en déduire un calcul différentiel théorisé. Regardez par exemple comment le même Nilakanta Somayaji énonce l'approximation du sinus verse, c'est-à-dire un moins le cosinus.

Tantrasaṅgraha (1501)

Nilakanta Somayaji (ca 1444–1544)



12 Āryabhaṭīya-bhāṣya (ca 1500)

« Viṣṇu est le voleur, traître aux femmes, déplaceur de montagnes parfumées, aux membres brillants et à la pose encourageante, Narasiṃha aux membres de poisson, et le fabriquant de la croissance et de la décroissance. »

J'adore ces délires débridés. Mais la traduction est trompeuse. Les mots sanscrits sont des moyens mnémotechniques de se souvenir de six nombres. Nilakhanta continue en disant : « Quand ces six nombres sont connus, en commençant par le dernier multiplié par le carré de l'arc donné, quand on a divisé, on doit soustraire les quotients, en allant vers le haut. »

C'est la description d'un algorithme de calcul. Mais si Nilakhanta avait connu les formules générales pour les développements en série du sinus et du cosinus, pourquoi aurait-il eu besoin d'un moyen mnémotechnique pour retenir les coefficients ? En même temps il aurait été dommage de nous en priver.

Pour la valeur de π , les Indiens du Kérala disposaient de la même série que Leibniz et Gregory. Mais comme elle converge très lentement, ils avaient plusieurs approximations du reste.

13 William Jones (1675–1749)

En Europe aussi, on s'était bien rendu compte que la série de Gregory, dont Leibniz était si fier, ne servait pas à grand chose quand il s'agissait de calculer. La solution figure dans un des premiers livres d'enseignement anglais incluant le calcul différentiel, joliment intitulé « Inventaire des palmiers mathématiques ». L'auteur est un mathématicien gallois, qui s'est surtout illustré parmi les supporters de Newton dans la querelle contre Leibniz.

Voici ce qu'on lit dans son livre.

14 the Accurate and Ready pen

« Le diamètre est à la périphérie comme un à 3.14 et cetera, qui est exact jusqu'à la centième décimale, comme il a été calculé par la plume précise et facile du très ingénieux M. John Machin. »

Ah, et comment avait-il fait cet ingénieux M. John Machin ? Jones nous le dit quelques pages plus loin.

Āryabhaṭīya-bhāṣya (ca 1500)

Nilakhaṇṭa Somayājī (ca 1444–1544)

Viṣṇu est le voleur, traître aux femmes, déplaceur de montagnes parfumées, aux membres brillants et à la pose encourageante, Narasiṃha aux membres de poisson, et le fabriquant de la croissance et de la décroissance.

William Jones (1675–1749)

Synopsis Palmariorum Matheseos (1706)



the Accurate and Ready pen

Jones, Synopsis Palmariorum Matheseos (1706)

Theref. the (Radius is to $\frac{1}{2}$ Periphery, or) Diameter is
to the Periphery, as 1,000, &c. to 3.141592653.58979323
84.6264338327.9502884197.1693993751.0582097494.
4592307816.4062862689.9862803482.5342117067.9
+, True to above a 100 Places; as Computed by the
Accurate and Ready Pen of the Truly Ingenious Mr.
John Machin: Purely as an Instance of the Vast advan-
tage Arithmetical Calculations receive from the Modern

15 the Excellent Analyst, and my much esteemed Friend

« Le rapport du diamètre à la circonférence est comme un à 16 cinquièmes moins quatre sur 239, moins un tiers et cetera. Cette série, parmi d'autres du même effet, et tirées du même principe, je l'ai reçue de l'excellent analyste, et mon très estimé ami, M. John Machin. »

Vous voyez en-dessous la justification, que l'on appelle toujours « formule de Machin ».

Au passage, remarquez le « égale π » encadré en bleu. C'est la toute première fois dans l'histoire que le rapport de la circonférence au diamètre est noté π . D'autres avant Jones, en particulier Wallis, avaient noté π un périmètre, mais pas le rapport. Jones n'a pas l'air de se rendre compte qu'il est en train de passer à la postérité.

Quant à Machin, il a eu un autre moyen que sa formule de passer à la postérité : son ami Brook Taylor.

the Excellent Analyst, and my much esteemed Friend

John Machin (1680–1751)

in the Circle, the Diameter is to Circumference as 1 to
 $\frac{16}{5} - \frac{4}{239} - \frac{16}{5^3} + \frac{4}{239^3} - \frac{16}{5^5} + \frac{4}{239^5} - \dots$, &c. =
3.14159, &c. π This Series (among others for the
same purpose, and drawn from the same Principle) I re-
ceiv'd from the Excellent Analyst, and my much E-
steem'd Friend Mr. John Machin; and by means there-
of, Van Ceulen's Number, or that in A...

$$\arctan(1) = 4 \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right)$$

16 Brook Taylor (1685–1731)

Taylor était d'une famille aisée qui lui avait fait donner une éducation très complète. Il est représenté ici à côté de son clavecin, avec un de ses paysages accroché au mur. Il montre une page de son livre sur la perspective : musicien, peintre, et aussi mathématicien.

Brook Taylor (1685–1731)



17 Brook Taylor (1685–1731)

Ses relations avec Machin dateraient de 1701. Machin lui aurait donné des cours de maths. Possible, mais Machin n'avait que 21 ans et son élève 16. Toujours est-il que c'est à Machin que Taylor fait part de sa grande découverte, dans une lettre datée du 26 avril 1712.

Brook Taylor (1685–1731)



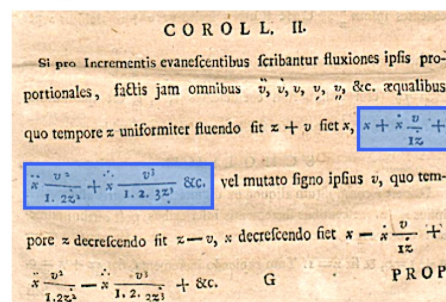
18 Methodus incrementorum directa et inversa (1715)

Cette découverte est officiellement publiée trois ans plus tard dans son livre sur la « Méthode des incréments directe et inverse ». La voici. Il faut s'habituer aux notations anglaises de l'époque, qui viennent de Newton. La fonction est petit x . Les dérivées sont des fluxions. Les dérivées successives sont marquées par des points au-dessus de la fonction.

Modulo ces ajustements, Taylor a bien écrit la formule de Taylor. Oui, enfin euh... On n'a commencé à l'appeler ainsi qu'à la fin du dix-huitième siècle.

Methodus incrementorum directa et inversa (1715)

Brook Taylor (1685–1731)



19 Johann Bernoulli (1667–1748)

Un qui n'aurait pas été d'accord pour qu'on lui donne le nom de Taylor, c'est Jean Bernoulli. Vous le connaissez, il s'est fâché avec à peu près tout le monde, à commencer par son frère et son fils. Dans une lettre à Leibniz, il se lâche.

Johann Bernoulli (1667–1748)



20 Lettre à Leibniz (22 août 1716)

« Bon Dieu, qu'est-ce que l'auteur espère par cette obscurité feinte dans laquelle il enveloppe des sujets pourtant limpides par leur nature même ? C'est sans doute afin de cacher son zèle pour le vol : car pour autant que je comprenne et que je sache, je ne perçois là-dedans à travers le nuage d'obscurité le plus épais, rien d'autre que ce qui nous appartient et qu'il nous a volé. »

Malgré le mauvais caractère de Jean Bernoulli, il faut bien reconnaître qu'il n'a pas complètement tort sur ce coup-là.

Lettre à Leibniz (22 août 1716)

Johann Bernoulli (1667–1748)

Bon Dieu, qu'est-ce que l'auteur espère par cette obscurité feinte dans laquelle il enveloppe des sujets pourtant limpides par leur nature même ? C'est sans doute afin de cacher **son zèle pour le vol** : car pour autant que je comprenne et que je sache, je ne perçois là-dedans à travers le nuage d'obscurité le plus épais, rien d'autre que **ce qui nous appartient et qu'il nous a volé**.

21 Additamentum effectationis... (1694)

En novembre 1694, Jean Bernoulli avait publié un article dans les Acta Eruditorum, dont le titre complet signifie : « Addition pour effectuer toutes les quadratures et rectifications de courbes par une certaine série très générale ». Cette série très générale, vous la voyez. Cette fois-ci la fonction est n , la variable z , et les dérivées sont notées avec des d , comme le fait Leibniz. Aussi, ce n'est pas la fonction qui est développée, mais sa primitive.

Mais bon, même si on argumente sur des points de détail, il ne serait pas injuste de reconnaître l'antériorité de Bernoulli, non ? Peut-être, mais était-il le premier ?

Additamentum effectationis... (1694)

Johann Bernoulli (1667–1748)

semper eadem integralia additorum demitorumque sumi possunt:
In hunc finem sequentem formo seriem, quæ ponit dz constan-

$$tem\ ndz = \frac{z^2 d^2 n}{1.2 dz} + \frac{z^3 d^3 n}{1.2.3 dz^2} + \frac{z^4 d^4 n}{1.2.3.4 dz^3} + \dots$$

&c. Ubi bini quilibet termini immediate se subsequentes

22 Isaac Newton (1643–1727)

Vous vous souvenez des développements de fonctions trigonométriques de Gregory ? Quand il les a obtenus, Jean Bernoulli était enfant. Il n'a jamais donné ses méthodes, mais on a de bonnes raisons de penser qu'il utilisait déjà une version primitive de la formule de Taylor.

De toutes façons, Newton et Leibniz eux aussi avaient trouvé la formule de Taylor, avant Bernoulli. Oui, mais il en avaient déjà fait tellement, qu'ils n'étaient pas à une formule près. Ils ne l'avaient pas publiée, ni l'un, ni l'autre.

Isaac Newton (1643–1727)



23 Abraham de Moivre (1667–1754)

Ah et tenez, tant que nous y sommes, voici Abraham de Moivre.

Je vous parle ailleurs de cet émigré français à Londres, ami de Newton, qui a anticipé le théorème central limite de trois bons quarts de siècles. Eh bien il avait aussi anticipé la formule de Taylor. Et cette fois-ci, c'était bien la même formule, obtenue avec la même technique de différences finies. Il avait même vu le lien avec la version intégrée de Jean Bernoulli.

Il lui avait envoyé le tout dans une lettre en français, datée du 6 juillet 1708.

Abraham de Moivre (1667–1754)



24 Lettre à Johann Bernoulli (6 juillet 1708)

« J'ai oublié en vous parlant de mes théorèmes mécaniques pour la quadrature des courbes, une chose qui m'a fait beaucoup de plaisir. Reprenons l'ordonnée, etc. Par conséquent l'aire de la courbe est $ax + \frac{1}{2}x^2d'$ etc., ce qui revient à votre théorème pour trouver l'intégrale de yx . »

La première formule, c'est l'écriture discrétisée, avec les différences finies. Le passage à la limite est fait dans la seconde formule, avec « un nombre infini d'unités » comme il dit.

Et Taylor, qu'en avait-il pensé ? Certes, il était loin d'être le premier à écrire sa formule, et il devait en être conscient. Mais il est sans doute celui qui en a vu le mieux, l'importance et le potentiel. Il avait tout de même été obligé de se justifier des accusations de plagiat de Bernoulli. Il le fait à la troisième personne, en publiant lui-même un article sur son livre, dans un journal d'émigrés français, la Bibliothèque Anglaise.

Et comme la meilleure défense, c'est l'attaque :

Lettre à Johann Bernoulli (6 juillet 1708)

Abraham de Moivre (1667–1754)

J'ai oublié en vous parlant de mes théorèmes mécaniques pour la quadrature des courbes, **une chose qui m'a fait beaucoup de plaisir**. Reprenons l'ordonnée

$$a + xd' + x \times \frac{x-1}{2} d'' + x \times \frac{x-1}{2} \times \frac{x-2}{3} d''' \text{ etc.}$$

Supposez que x contienne un nombre infini d'unités, l'ordonnée devient

$$a + xd' + \frac{1}{2}xxd'' + \frac{1}{6}x^3d''' \text{ etc.}$$

par conséquent l'aire de la courbe est

$$ax + \frac{1}{2}xxd' + \frac{1}{6}x^3d'' + \frac{1}{24}x^4d''' \text{ etc.}$$

ce qui revient à votre théorème pour trouver l'intégrale de yx .

25 Bibliothèque Anglaise (1718)

« L'auteur s'est renfermé uniquement dans son sujet ; il a évité exprès de faire mention de ce qui avait été fait par les autres, parce que cela l'aurait engagé nécessairement à faire remarquer plusieurs fautes et imperfections qui se trouvent dans leurs solutions. »

Suivez son regard...

Bibliothèque Anglaise (1718)

Brook Taylor (1685–1731)

L'Auteur s'est renfermé uniquement dans son sujet ; il a évité exprès de faire mention de ce qui avoit été fait par les autres, parce que cela l'auroit engagé nécessairement à remarquer plusieurs fautes & imperfections qui se trouvent dans leurs Solutions : c'est pour

26 Brook Taylor (1685–1731)

En 1718, Taylor est encore au faite de sa renommée. Les dix dernières années de sa vie seront beaucoup moins agréables.

En 1721 il décide de se marier. La demoiselle vient d'une bonne famille, mais pas assez aisée au goût de son père, qui cesse toute relation. Deux ans plus tard, la jeune épouse meurt en couches, avec leur premier enfant. Les relations entre le père et le fils reprennent, et en 1725, Brook décide de se remarier, avec une demoiselle Sawbridge, qui cette fois-ci a l'aval du père. Malheureusement celle-ci aussi, meurt en couches. C'en est trop pour Taylor qui avait toujours été de santé fragile. Il meurt l'année suivante, à seulement 46 ans.

Brook Taylor (1685–1731)



27 références

Tous ces découvreurs et redécouvreurs de développements en série, les Madhava, Gregory, Newton, Leibniz, Bernoulli, de Moivre, Machin, Taylor, avec leurs notations disparates et leurs techniques variées, avaient en commun une chose : une ferme croyance en la dérivabilité de toute fonction digne de ce nom. Pas un ne se pose la question d'une vraie démonstration. Il faudra attendre encore un bon siècle des hypothèses et des arguments rigoureux, pour la convergence des séries de Taylor.

Allez, nous sommes entre nous, et je vous promets de ne pas le répéter. Dites-moi : vous ne trouvez pas que ça devait être amusant de faire des maths en ce temps-là ?

références

- L. Feigenbaum (1995) Brook Taylor and the method of increments, *Archive for History of Exact Sciences*, 34(1/2), 1–140
- G. Ferraro (2008) *The rise and development of the theory of series up to the early 1820s*, New York : Springer
- V. J. Katz (1995) Ideas of calculus in Islam and India, *Mathematics Magazine*, 68(3), 163–174
- K. Plofker (2009) *Mathematics in India*, Princeton : University Press
- R. Roy (1990) The discovery of the series formula for π by Leibniz, Gregory and Nilakantha, *Mathematics Magazine*, 63(5), 291–306
- K. V. Sarma (2008) *Gaṇita-Yukti-Bhāṣā of Jyeṣṭhadeva, volume I : Mathematics*, New Delhi : Hindustan Book Agency