Une histoire de mathématiques à écouter sur

hist-math.fr

0 De Babylone ou d'ailleurs

histoires d'analyse

De Babylone ou d'ailleurs

approcher des racines

hist-math.fr Bernard Ycart

Allons bon, je sens que je vais encore être désagréable. Laissez-moi deux secondes pour m'éclaircir la voix et les idées. Profitez-en pour taper dans votre moteur de recherche « algorithme de Babylone » et « méthode de Héron ».

1 Algorithme de Babylone ? Méthode de Héron ?

Ça y est ? Je suis sûr que vous avez trouvé des énoncés du style de celui-ci. Soit grand A un réel positif. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par a_0, et pour tout entier n, a_{n+1} égale un demi de a_n plus grand A sur a_n. Alors la suite (a_n) converge vers la racine carrée de grand A.

Ce résultat fournit un algorithme de calcul approché des racines carrées, utilisé par les anciens Babyloniens il y a 37 siècles, et énoncé par Héron d'Alexandrie au premier siècle de notre ère. Cela justifie bien qu'on l'appelle « algorithme de Babylone », ou bien « méthode de Héron », non ? Et pourquoi pas algorithme de Babylone-tiret-Héron tant qu'on y est ? Comme il va bien falloir faire un choix, je vais parler de méthode de Héron, c'est ce qui me paraît le moins illégitime.

Algorithme de Babylone ? Méthode de Héron ?

$$a_0 > 0\,, \qquad \forall n \in \mathbb{N}\,,\ a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{A}{a_n}\right)$$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \sqrt{A}$$

Que l'on rappelle l'ancienneté de la méthode par son nom, je suis totalement pour. Alors qu'est-ce qui me chagrine, en dehors de mon mauvais caractère ?

D'abord l'énoncé que vous voyez n'aurait certainement pas été écrit ainsi il y a, ne serait-ce qu'un siècle, a fortiori il y a 19 ou 37 siècles. L'écriture algébrique indicée d'une suite, la définition itérative, le quantificateur, la limite, tout cela ne date que d'une centaine d'années.

Ensuite, les Babyloniens n'ont jamais énoncé explicitement la méthode. On a retrouvé chez eux des tables de constantes, avec des valeurs liées à des racines d'entiers, qui laissent croire que cet algorithme a pu être utilisé, sur ses deux ou trois premiers pas.

De plus, parmi les anciens, les Indiens ont eux aussi peut-être utilisé le même algorithme, plusieurs siècles avant Pythagore. Alors pourquoi ne l'appelle-t-on pas « méthode de Baudhayana » ou « d'Apastamba » ?

2 Approximation de $\sqrt{2}$

Voici les premiers pas pour grand A égale 2, en partant de 1. La valeur pour $n = 3$ en bleu, est celle des Mésopotamiens ainsi que des Indiens.

Ce qui me gêne le plus, c'est qu'au fond, on ne sait pas ce que ces gens pouvaient avoir en tête quand ils calculaient des approximations par cet algorithme. Une justification intuitive ? Oui certainement, mais on ne peut que jouer aux devinettes, conjecturer des explications en fonction de ce qu'on suppose qu'ils avaient l'habitude de faire. Je vais vous exposer quelques unes de ces conjectures ; mais avant, voici les deux explications qui nous viennent à nous à l'esprit, et qui ne peuvent pas être les bonnes.

Approximation de $\sqrt{2}$
Méthode de Héron

n	a_n	$a_n - \sqrt{2}$
0	1	4,14 10^{-1}
1	$\frac{3}{2}$	8,58 10^{-2}
2	$\frac{17}{12}$	2,45 10^{-3}
3	$\frac{577}{408}$	2,12 10^{-6}
4	$\frac{665857}{470832}$	1,59 10^{-12}

3 Méthode de Newton

La méthode de Newton est en un sens la meilleure méthode pour trouver les racines d'une équation $f(x) = 0$ quelconque. Elle a été anticipée par les Arabes au onzième siècle, et développée en Europe plus tard. C'est Wallis qui en a parlé le premier, et Simpson qui l'a énoncée clairement en 1740. Je vous le raconte ailleurs.

Très bien ! Mais les calculs de racines ont commencé bien avant la résolution d'équations plus générales. Justifier la méthode de Héron comme cas particulier de la méthode de Newton est certes correct mathématiquement, mais c'est un anachronisme complet.

Méthode de Newton
approximation de $\sqrt{A}$

$$a_0 > 0\,, \qquad \forall n \in \mathbb{N}\,,\ a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)}$$

$$f(x) = x^2 - A$$

$$a - \frac{f(a)}{f'(a)} = a - \frac{a^2 - A}{2a} = \frac{1}{2}\left(a + \frac{A}{a}\right)$$

4 Développement limité à l'ordre 1

Disons que vous ayez déjà trouvé une approximation petit a de racine de grand A. Cela signifie que la différence grand A moins petit a au carré, notée h est petite. Vous savez bien que le développement limité de racine carrée de $(1 + x)$ à l'ordre 1 est 1 plus un demi de x. Faites votre calcul, vous trouvez que racine de $a^2 + h$ est proche de a plus un demi de h sur a, et vous retombez sur le même algorithme.

Encore une fois, anachronisme complet. Oui, c'est vrai, les Babyloniens savaient que la racine de $a^2 + h$ est proche de a plus un demi de h sur a. Mais certainement pas à cause d'un développement limité : celui-ci ne date que du dix-septième siècle.

Développement limité à l'ordre 1
approximation de $\sqrt{A}$

$$\sqrt{A} = \sqrt{a^2 + h} = a\sqrt{\left(1 + \frac{h}{a^2}\right)} = a\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{h}{a^2}\right)\right) + o(h)$$

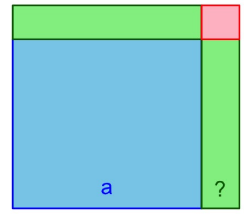
$$a\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{h}{a^2}\right)\right) = a + \frac{1}{2}\left(\frac{A - a^2}{a}\right) = \frac{1}{2}\left(a + \frac{A}{a}\right)$$

5 Raisonnement de Babylone ?

Comment les Babyloniens raisonnaient-ils ? Probablement par découpage de figure : ce serait cohérent avec leur traitement des équations algébriques, je vous en parle ailleurs.

Disons que le grand carré est de surface grand A, et que vous avez une approximation par défaut petit a de racine de grand A. Vous pouvez inclure un carré bleu de côté petit a, dans le grand carré. Quelle longueur faut-il ajouter à petit a pour atteindre le côté du grand carré ? Cette longueur multipliée par petit a est la surface du rectangle vert. Deux rectangles verts ajoutés au carré bleu, valent grand A, si vous négligez la surface du petit carré rouge. Donc il faut ajouter à peu près grand A moins petit a carré, sur deux petit a. C'est exactement la même chose que le développement limité précédent, mais avec seulement des découpages.

Raisonnement de Babylone ?



6 Carré et diagonale

Carré et diagonale

YBC 7289, Yale Babylonian Collection (ca 1700 av. J.-C.)

La tablette que vous voyez ici est une star. C'est principalement à cause d'elle qu'on parle d'algorithme de Babylone. En haut à gauche on lit 30, qui est le côté du carré. Sur la diagonale, on lit 1, 24, 51, et 10. En dessous : 42, 25, 35.

7 Approximation de $\sqrt{2}$

Ce sont des écritures sexagésimales. Il faut comprendre le côté du carré, écrit 30, comme 1/2.

La diagonale du carré de côté 1/2 vaut $1/\sqrt{2}$ dont l'inverse est $\sqrt{2}$. Les valeurs données ici pour $1/\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$ ont une précision inférieure à 10^{-6}.

Le problème est que rien ne dit comment ces approximations ont été obtenues. La tablette YBC 7289 est probablement une tablette d'apprenti scribe. Un brouillon d'écolier si vous voulez. L'approximation de racine de deux vient d'une table de constantes, et nous n'avons pas de moyen de la relier directement, à la suite des approximations de la méthode de Héron. La quatrième valeur de ladite suite, 577 sur 408, n'a pas de développement fini en sexagésimal. Tout ce que nous pouvons conclure c'est que le début du développement sexagésimal de 577 sur 408, comme de racine de deux, est bien 1.24.51.10 comme vous le voyez.

Approximation de $\sqrt{2}$

YBC 7289 (ca 1700 av. J.-C.)

- $30 = \frac{1}{2}$
- $1.24.51.10 = 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} = \sqrt{2} - 6 \times 10^{-7}$
- $42.25.35 = \frac{42}{60} + \frac{25}{60^2} + \frac{35}{60^3} = \frac{1}{\sqrt{2}} - 3 \times 10^{-7}$

8 Heptagone

Heptagone
TMS 2, Musée du Louvre (ca 1700 av. J.-C.)

Cette tablette-ci est du même type que la précédente. Elle porte un heptagone sur cette face-ci, un hexagone sur l'autre. Pour chacun des deux, un nombre est marqué, qui est la surface en fonction du rayon. Là encore, la constante de proportionnalité entre la surface et le carré du rayon est issue d'une table de constantes. Pour l'heptagone, rien ne permet de dire par quel raisonnement la constante a été trouvée.

9 Triangle équilatéral

Triangle équilatéral
MS 2192, Schøyen collection (ca 1800 av. J.-C.)

Pour l'hexagone, le lien est plus direct. La surface d'un hexagone pour un côté de longueur 1 est : trois demi de racine de trois. Celle d'un triangle équilatéral est : racine de trois sur quatre. Dans toutes les tablettes où apparaissent des problèmes d'hexagones ou de triangles équilatéraux, on retrouve des constantes qui reviennent à prendre sept quarts comme approximation de racine de trois. Or sept quarts est bien la seconde itération de la méthode de Héron en partant de 1, pour le calcul de racine de trois.

10 Śulba Sūtra

Śulba Sūtra
Baudhāyana (ca 800 av. J.-C.), Āpastamba (ca 600 av. J.-C.)

Chez les Indiens, bien avant Pythagore, la religion védique avait codifié les usages géométriques pour la construction des autels destinés aux cérémonies. Ces enseignements religieux ou Sutras s'appellent des Shulba Sutras, le mot Shulba signifiant corde. Voici ce qu'on lit dans les Shulba Sutras à propos de la diagonale d'un carré.

11 Śulba Sūtra

Śulba Sūtra
Baudhāyana (ca 800 av. J.-C.), Āpastamba (ca 600 av. J.-C.)

La diagonale d'un carré double sa surface. La mesure doit être augmentée d'un tiers et d'un quart diminué d'un trente-quatrième. Ceci est la diagonale.

$$1+\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{34}\right)\right)=\frac{577}{408}$$

La diagonale d'un carré double sa surface. La mesure doit être augmentée d'un tiers et d'un quart diminué d'un trente-quatrième ; ceci est la diagonale.

En clair, l'approximation de Baudhayana est le troisième terme de la suite de Héron, près d'un millénaire avant Héron. Remarquez que si vous omettez le dernier facteur un moins un sur trente-quatre, vous obtenez 17 douzièmes, qui est le terme précédent de la même suite. Cela fait tout de même des indices sérieux en faveur de la méthode de Héron. Mais est-ce vraiment la seule explication possible ?

12 une construction géométrique

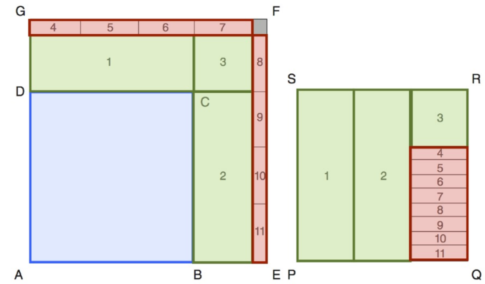
Un historien des sciences indien, en a proposé deux autres.

Celle-ci est un découpage de figure, analogue à celui des Babyloniens, et bien dans l'esprit de la construction d'autels de briques. Gardez à l'esprit que tout au long des Shulba Sutras, on découvre la contruction d'autels de formes diverses, la plupart utilisant des centaines de briques.

Imaginez les deux dessins que vous voyez, comme construits avec quelques centaines de briques. Vous partez de deux carrés de même surface, ABCD et PQRS. Vous voulez répartir les briques de PQRS autour du carré ABCD de manière à doubler sa surface. Les morceaux verts ont pour largeur un tiers. Les morceaux rouges ont pour largeur un quart de ce tiers. Voici déjà les deux premiers termes de la formule de Baudhayana. Le dernier terme consiste à corriger le petit carré gris en haut à droite.

une construction géométrique

B. Datta (1932)



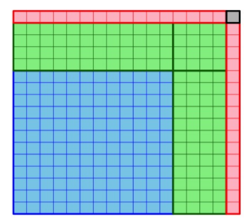
13 des briques carrées

Pour vous aider à comprendre la deuxième explication qui va suivre, et vous convaincre du fait qu'elle était tout à fait à la portée des anciens Hindous, revoici la même figure, mais cette fois-ci avec des petites briques carrées. Le carré initial bleu est de côté 12, il y a donc 144 briques bleues. Nous avons rajouté autour 144 autres briques, des vertes et des rouges. Total : 288. Plus une brique grise en haut à droite : 289. Et 289 c'est 17 au carré. Donc 17 au carré, c'est deux fois douze au carré, plus 1. D'où l'approximation de 17 divisé par 12 pour racine de deux.

Nous touchons-là un objet important :

des briques carrées

B. Datta (1932)



14 Équation de Pell-Fermat

L'équation de Pell-Fermat. Étant donné un entier A, comment trouver deux entiers u et v tels que $u^2 - Av^2 = 1$. Cette équation est une des plus importantes de l'histoire de l'arithmétique. Si A est un entier qui n'est pas un carré parfait, elle a une infinité de solutions. Comme je vous en ai déjà parlé, je n'insiste pas.

Quel rapport avec l'approximation de racine de A ? Vous le voyez au-dessous : si u et v sont solution, alors u sur v est une approximation rationnelle de racine de A, et cette valeur est même la plus proche possible pour un dénominateur donné, au sens où u sur v au carré ne diffère de A que de un sur v^2.

Tenez essayez avec les premières valeurs de la suite de Héron pour racine de deux. La première est trois demis, et trois au carré moins deux fois deux au carré, égale 1. La suivante est 17 douzièmes. 17 au carré moins deux fois 12 au carré égale 1, nous venons de le voir. Et ensuite ?

Le premier à résoudre les équations de Pell-Fermat dans le cas général, tout au moins le premier dont on ait gardé trace, c'est Brahmagupta. Il a écrit une règle, qui permet de fabriquer à volonté des solutions. Voici cette règle en écriture moderne.

Équation de Pell-Fermat

$$u^2 - Av^2 = 1$$

$$\frac{u}{v} = \sqrt{A + \frac{1}{v^2}}$$

15 solutions de l'équation de Pell-Fermat

Si (u_1, v_1) et (u_2, v_2) sont deux solutions, on en fabrique une nouvelle en posant $u_1u_2 + Av_1v_2$ comme plus grand terme, $u_1v_2 + v_1u_2$ comme plus petit terme.

Allez : on essaie ? Partons de $u_1 = u_2 = 3$, $v_1 = v_2 = 2$, on trouve 17 et 12. Itérons une fois de plus : $u_1 = u_2 = 17$, $v_1 = v_2 = 12$, on tombe sur 577 et 408, l'approximation de Baudhayana.

Au fond, qui nous dit que la règle de Brahmagupta n'a pas été inventée bien avant lui ?

solutions de l'équation de Pell-Fermat

Brahmagupta, Brāhmasphuṭasiddhānta (628)

Si

$$u_1^2 - Av_1^2 = 1\,,$$

et

$$u_2^2 - Av_2^2 = 1\,,$$

alors :

$$(u_1u_2 + Av_1v_2)^2 - A(u_1v_2 + v_1u_2)^2 = 1$$

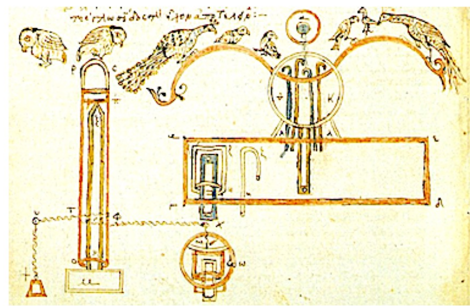
16 Héron d'Alexandrie (ca 10–75)

Ah enfin : Héron d'Alexandrie ! Je vous parle ailleurs de ses machines étonnantes, de ses automates perfectionnés, de ses mesures précises.

Ce qui lui vaut d'être la vedette de cette histoire, c'est un tout petit passage dans ses Métriques. Il vient de donner la formule pour calculer l'aire d'un triangle en fonction de ses côtés, et cette formule implique l'extraction d'une racine carrée. Dans son exemple, le nombre dont il faut extraire la racine est 720. Voici le passage.

Héron d'Alexandrie (ca 10–75)

Pneumatica



17 nous prendrons le côté

« Alors, puisque les 720 n'ont pas le côté exprimable, nous prendrons le côté avec une très petite différence ainsi.
Puisque le carré le plus proche de 720 est 729 et qu'il a 27 comme côté, divise les 720 par le 27 ; il en résulte 26 et deux tiers ; ajoute les 27 : il en résulte 53 et deux tiers ; de ceux-ci la moitié : il en résulte 26 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$: le côté de 720 sera donc 26 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ à très peu près. En effet, les 26 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ par eux mêmes : il en résulte $720\frac{1}{36}$; de sorte que la différence est une 36$^{\text{e}}$ part d'unité. »

Je vous laisse vérifier que la suite de Héron pour grand A égale 720 et a égale 27, donne bien 26, $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$ au premier pas.

Et pour qu'il n'y ait pas d'ambiguïté sur le fait qu'il s'agit bien d'un algorithme itératif, Héron dit :

nous prendrons le côté

Héron d'Alexandrie (ca 10–75), Metrica

Alors, puisque les 720 n'ont pas le côté exprimable, nous prendrons le côté avec une très petite différence ainsi.
Puisque le carré le plus proche de 720 est 729 et qu'il a 27 comme côté, divise les 720 par le 27 ; il en résulte 26 et deux tiers ; ajoute les 27 : il en résulte 53 et deux tiers ; de ceux-ci la moitié : il en résulte 26 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$: le côté de 720 sera donc 26 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ à très peu près. En effet, les 26 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ par eux mêmes : il en résulte $720\frac{1}{36}$; de sorte que la différence est une 36$^{\text{e}}$ part d'unité.

18 en faisant les mêmes choses

« Et si nous voulons que la différence se produise par une part plus petite que $\frac{1}{36}$, au lieu de 729, nous placerons les 720 $\frac{1}{36}$ maintenant trouvés, et en faisant les mêmes choses, nous trouverons qu'il en résulte une différence, inférieure de beaucoup à $\frac{1}{36}$. »

Cette fois-ci, il n'y a pas de doute, Héron a bien décrit sa méthode. Il est le premier à l'expliquer, mais il ne prétend pas l'avoir trouvée. Elle était probablement déjà bien connue au moins trois siècles avant lui, du temps d'Archimède, et peut-être même du temps de Pythagore.

Tant que nous y sommes, il est possible que les Grecs aient eu un autre raisonnement pour justifier leur approximation, que les arguments géométriques des Mésopotamiens et des Indiens.

en faisant les mêmes choses

Héron d'Alexandrie (ca 10–75), Metrica

Et si nous voulons que la différence se produise par une part plus petite que $\frac{1}{36}$, au lieu de 729, nous placerons les 720 $\frac{1}{36}$ maintenant trouvés, et en faisant les mêmes choses, nous trouverons qu'il en résulte une différence, inférieure de beaucoup à $\frac{1}{36}$.

19 Médiétés

Les Grecs étaient de grands spécialistes des « médiétés », des moyennes si vous préférez. Ils en distinguaient jusqu'à douze. Celles qui nous sont restées, la moyenne harmonique, la moyenne géométrique et la moyenne arithmétique, étaient déjà bien connues à l'époque, tout comme leurs inégalités.

Maintenant, regardez le cas particulier qui est en dessous. Disons encore que petit a est une approximation de racine de grand A, par défaut. Alors grand A sur petit a est une approximation par excès, et leur moyenne géométrique qui vaut racine de grand A est précisément ce que l'on cherche.

La méthode de Héron consiste à prendre la moyenne arithmétique des deux valeurs. Il se trouve que leur moyenne harmonique est grand A divisé par la moyenne arithmétique. De sorte qu'après une itération, on se retrouve dans la même configuration, mais les deux moyennes arithmétique et harmonique se sont rapprochées de la moyenne géométrique, qui est le but à atteindre.

Médiétés

moyennes harmonique, géométrique, arithmétique

$$u < \frac{2uv}{u+v} < \sqrt{uv} < \frac{u+v}{2} < v$$

$$a < \frac{2A}{a+A/a} < \sqrt{A} < \frac{1}{2}\left(a+\frac{A}{a}\right) < \frac{A}{a}$$

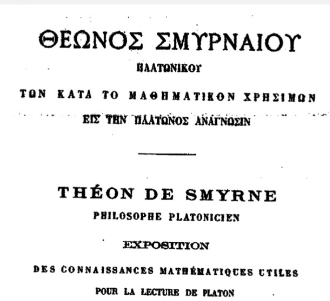
20 Connaissances mathématiques pour la lecture de Platon

Puisque nous en sommes aux algorithmes grecs, ce manuel en contient un qui décrit la construction de deux suites récurrentes. Il est écrit par un néoplatonicien, Théon de Smyrne, environ un siècle après les métriques de Héron d'Alexandrie.

Théon désigne les deux suites qu'il veut construire par par « côtés » et « diagonales ». Comme c'est un peu difficile à lire, voici les deux récurrences sous forme moderne, sur deux suites notées c_n pour le n-ième côté, et d_n pour la n-ième diagonale.

Connaissances mathématiques pour la lecture de Platon

Théon de Smyrne (ca. 70–135)


ΘΕΩΝΟΣ ΣΜΥΡΝΑΙΟΥ

ΠΛΑΤΩΝΙΚΟΥ

ΤΩΝ ΚΑΤΑ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΝ ΧΡΗΣΙΜΩΝ

ΕΙΣ ΤΗΝ ΠΛΑΤΩΝΟΣ ΑΝΑΓΝΩΣΙΝ

THÉON DE SMYRNE

PHILOSOPHE PLATONICIEN

EXPOSITION

DES CONNAISSANCES MATHÉMATIQUES UTILES

POUR LA LECTURE DE PLATON

21 Connaissances mathématiques pour la lecture de Platon

Le $n+1$-ième côté est la somme du n-ième côté et de la n-ième diagonale, et la $n+1$-ième diagonale est la somme du n-ième et du $n+1$-ième côtés.

Cet algorithme donne une infinité de solutions à l'équation de Pell-Fermat pour $A = 2$.

Vous voyez le tableau des premières itérations en-dessous. Les lignes en bleu font apparaître les trois premières approximations de racine de deux données par l'algorithme de Héron : trois demis, 17 douzièmes, et 577 sur 408.

Connaissances mathématiques pour la lecture de Platon
Théon de Smyrne (ca. 70–135)

$$\left\{\begin{array}{lcl} c_{n+1} & = & c_n + d_n \\ d_{n+1} & = & c_n + c_{n+1} \end{array}\right.$$

$$d_n^2 = 2c_n^2 + (-1)^{n-1}$$

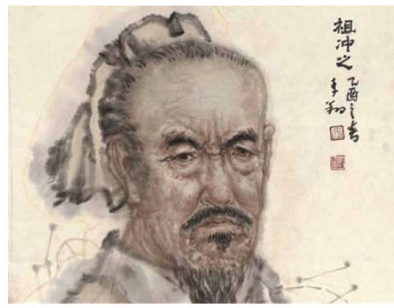
n	c_n	d_n
0	1	1
1	2	3
2	5	7
3	12	17
4	29	41
5	70	99
6	169	239
7	408	577

22 Les Neuf Chapitres (263)

Comme dans la plupart des histoires d'antiquité, vous n'allez pas échapper à Liu Hui et à ses commentaires aux Neufs Chapitres sur l'art du calcul. Il n'a pas l'air très content, mais comme ce portrait est totalement imaginaire, allez savoir.

Bref ! Parmi les neuf chapitres, le quatrième porte le nom de « petite largeur ». Son nom vient du fait qu'il décrit des algorithmes à base de découpage de figures, exactement du type qui nous intéresse.

Les Neuf Chapitres (263)
Liu Hui (ca. 220–280)



23 Chapitre 4, Petite Largeur

« On place le nombre produit comme dividende. On emprunte une baguette et on la fait progresser en sautant une colonne. »

Ah oui, parce que chez les Chinois les calculs se font sur une table quadrillée, et les nombres sont figurés par des baguettes. La baguette empruntée que l'on fait progresser indique un algorithme itératif qui procède selon les puissances de dix. D'ailleurs Liu Hui précise : « Quand on dit cent, son côté est dix ; quand on dit dix mille, son côté est 100 ».

« Une fois le quotient obtenu, on en multiplie une fois la baguette empruntée, ce qui fait le diviseur, puis on divise par ceci. »

Moui, pas très explicite. Gentiment, Liu Hui précise :

« On obtient d'abord un côté de Jia jaune ; qu'en haut et en bas soient multipliés en place l'un par l'autre, c'est qu'il est multiplié par lui-même, puis éliminé.

Après avoir divisé, on double le diviseur, ce qui fait le diviseur déterminé.

La raison pour laquelle on double ceci, c'est que l'on déploie à l'avance la longueur déterminée des deux surfaces vermillon, de sorte à se préparer à diviser à nouveau. »

Je renonce à vous faire entrer dans les détails de la procédure avec les baguettes. Je vais plutôt vous montrer la figure, avec les couleurs de maître Liu.

Chapitre 4, Petite Largeur
Liu Hui, Les Neuf Chapitres (263)

On place le nombre produit comme dividende. On emprunte une baguette et on la fait progresser en sautant une colonne.

Une fois le quotient obtenu, on en multiplie une fois la baguette empruntée, ce qui fait le diviseur, puis on divise par ceci.

On obtient d'abord un côté de Jia jaune ; qu'en haut et en bas soient multipliés en place l'un par l'autre, c'est qu'il est multiplié par lui-même, puis éliminé.

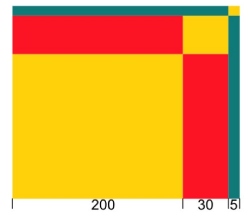
Après avoir divisé, on double le diviseur, ce qui fait le diviseur déterminé.

La raison pour laquelle on double ceci, c'est que l'on déploie à l'avance la longueur déterminée des deux surfaces vermillon, de sorte à se préparer à diviser à nouveau.

24 racine carrée de 55 225

Voici ce qui est fait pour calculer la racine carrée de 55 225, qui est l'un des exemples proposés. On commence par déterminer l'ordre de grandeur du résultat. Ici, c'est la centaine. Puis, on trouve la plus grande centaine dont le carré soit inférieur au nombre proposé. Ici c'est 200. Son carré est le « Jia » jaune en bas à gauche. On cherche ensuite la plus grande dizaine possible. On trouve 30. On déploie alors à droite et au-dessus les deux surfaces vermillon de largeur 30 et de longueur 200. On recommence ensuite avec les unités, et les surfaces bleu-vert à droite et en haut.

racine carrée de 55 225
Liu Hui, Les Neuf Chapitres (263)



Comme vous le constatez, la figure de Liu Hui est essentiellement la même que celles que je vous ai déjà montrées. L'originalité du calcul chinois, est qu'il extrait une par une les décimales du résultat. D'ailleurs Liu Hui est parfaitement conscient, que dans le cas où la racine n'est pas entière, le calcul peut être poursuivi sur autant de décimales que l'on souhaite. Il dit : « quoique la surface vermillon ait encore des chiffres qui seront abandonnés, il ne vaut pas la peine d'en parler. »

Liu Hui ne s'arrête pas aux racines carrées. Il étend l'algorithme aux racines cubiques, avec un découpage de cube en parallélépipèdes.

Les algorithmes d'extraction des racines carrées et cubiques figurent dans de nombreux manuels d'arithmétique sous toutes les civilisations. Je ne vous montrerai que deux exemples.

25 le pair étant divisé par ce double

Voici l'extraction de racine carrée dans la Lilavati de Bhaskara. Il n'est pas du tout immédiat d'y reconnaître l'algorithme précédent. Je vous laisse découvrir les nombreux commentaires et explications dans la version de François Patte.

« Après avoir ôté un carré du dernier impair, on doublera la racine, le pair étant divisé par ce double. Après avoir ôté le carré du quotient de l'impair le précédant, on posera le quotient doublé dans la ligne du résultat. Le pair étant divisé par la ligne du résultat, après avoir ôté le carré du quotient d'un autre impair, on posera le quotient doublé dans la ligne du résultat ; et ainsi à plusieurs reprises. La moitié de la ligne du résultat sera la racine. »

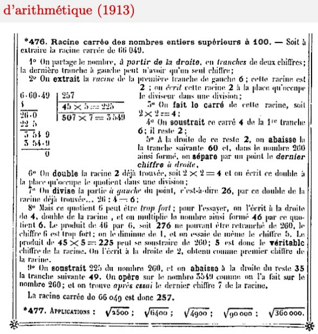
le pair étant divisé par ce double
Bhāskarāchārya (1114-1185), Līlāvatī (1150)

Après avoir ôté un carré du dernier impair, on doublera la racine, le pair étant divisé par ce double. Après avoir ôté le carré du quotient de l'impair le précédant, on posera le quotient doublé dans la ligne du résultat. Le pair étant divisé par la ligne du résultat, après avoir ôté le carré du quotient d'un autre impair, on posera le quotient doublé dans la ligne du résultat ; et ainsi à plusieurs reprises. La moitié de la ligne du résultat sera la racine.

26 Racine carrée des nombres entiers

Voici le même algorithme dans le manuel de certificat d'études que je vous cite souvent. Eh oui, l'extraction de racines carrées était considéré comme un apprentissage de base, il n'y a encore pas si longtemps.

Racine carrée des nombres entiers
Alcide Lemoine, 160 leçons d'arithmétique (1913)



*476. **Racine carrée des nombres entiers supérieurs à 100.** — Soit à extraire la racine carrée de 66 049.

1° On partage le nombre, ***à partir de la droite***, en *tranches* de deux chiffres ; la dernière tranche à gauche peut n'avoir qu'un seul chiffre ;

2° On **extrait** la *racine* de la première tranche de gauche **6** ; cette racine est **2** ; on *écrit* cette racine **2** à la place qu'occupe le diviseur dans une division ;

6·60·49	257
4	45 × 5 = 225
26·0	507 × 7 = 3 549
22 5	
3 54 9	
3 54·9	
0	

3° On **fait le carré** de cette racine, soit 2 × 2 = **4** ;

4° On **soustrait** ce carré **4** de la 1re tranche **6** ; il reste **2** ;

5° A la droite de ce reste **2**, on **abaisse** la tranche suivante **60** et, dans le nombre 260 ainsi formé, on **sépare** par un point le ***dernier chiffre à droite***.

6° On **double** la racine **2** déjà trouvée, soit 2 × 2 = **4** et on écrit ce double à la place qu'occupe le quotient dans une division ;

7° On **divise** la partie *à gauche* du point, c'est-à-dire **26**, par ce double de la racine déjà trouvée... 26 : 4 = **6** ;

8° Mais ce quotient 6 peut être *trop fort* ; pour l'essayer, on l'écrit à la droite de **4**, double de la racine, et on multiplie le nombre ainsi formé **46** par ce quotient **6**. Le produit de 46 par 6, soit **276** ne pouvant être retranché de 260, le chiffre 6 est trop fort ; on le diminue de 1, et on essaie de même le chiffre 5. Le produit de **45 × 5 = 225** peut se soustraire de 260 ; **5** est donc le **véritable** chiffre de la racine. On l'écrit à la droite de 2, obtenu comme premier chiffre de la racine.

9° On **soustrait** 225 du nombre 260, et on **abaisse** à la droite du reste **35** la tranche suivante **49**. On **opère** sur le nombre 3549 comme on l'a fait sur le nombre 260 ; et on trouve *après essai* le dernier chiffre 7 de la racine.

La racine carrée de 66 049 est donc **257**.

*477. Applications : $\sqrt{2500}$; $\sqrt{6400}$; $\sqrt{4900}$; $\sqrt{90\,000}$; $\sqrt{360\,000}$.

27 Pour connaître l'aire des figures planes et sphériques

Pour les auteurs arabes, le calcul des racines carrées fait partie des opérations élémentaires que l'on n'évoque qu'à peine dans un mémoire plus sérieux. Voici par exemple ce que les frères Banu Musa ajoutent à la toute fin de leur traité sur les figures planes et sphériques.

« Il nous faut décrire après cela l'approximation du côté du cube pour qu'il devienne rationnel, au besoin. Nous procédons en cela par une méthode telle qu'aucune autre approximation n'est meilleure qu'elle. C'est-à-dire que si nous voulons que l'écart entre celle-ci et la vérité soit par exemple inférieur à une minute ou à une seconde, nous en serons capable. »

L'algorithme est expédié en quelques mots. Écoutez ce qu'en dit Omar Khayyam, environ deux siècles plus tard.

Pour connaître l'aire des figures planes et sphériques
Muḥammad, Aḥmad, al-Ḥasan Banū Mūsā, (ca. 820–870)

Il nous faut décrire après cela l'approximation du côté du cube pour qu'il devienne rationnel, au besoin. Nous procédons en cela par une méthode telle qu'aucune autre approximation n'est meilleure qu'elle. C'est-à-dire que si nous voulons que l'écart entre celle-ci et la vérité soit par exemple inférieur à une minute ou à une seconde, nous en serons capable.

28 Article sur al-jabr et al-muqābala

« Les Indiens possèdent des méthodes pour trouver les côtés des carrés et des cubes [. . .]. J'ai composé un ouvrage sur la démonstration de l'exactitude de ces méthodes, et j'ai prouvé qu'elles conduisent en effet à l'objet cherché. J'ai, en outre, augmenté les espèces, c'est-à-dire que j'ai enseigné à trouver les côtés du carré-carré, du quadrato-cube, du cubo-cube, etc, à une étendue quelconque, ce qu'on n'avait pas fait précédemment. Les démonstrations que j'ai données à cette occasion ne sont que des démonstrations arithmétiques, fondées sur les parties arithmétiques des éléments d'Euclide. » Comprenez qu'al-Khayyam a décrit l'extraction des racines quatrièmes, cinquièmes, etc.

À partir du onzième siècle, les Arabes porteront leurs efforts sur la résolution numérique des équations polynomiales générales, et plus seulement sur l'extraction des racines.

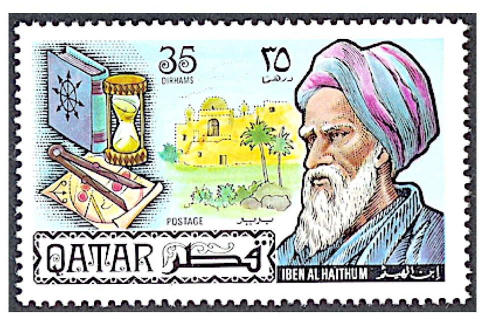
Article sur al-jabr et al-muqābala
Omar Khayyām (1048-1131)

Les Indiens possèdent des méthodes pour trouver les côtés des carrés et des cubes[. . .]. J'ai composé un ouvrage sur la démonstration de l'exactitude de ces méthodes, et j'ai prouvé qu'elles conduisent en effet à l'objet cherché. J'ai, en outre, augmenté les espèces, c'est-à-dire que j'ai enseigné à trouver les côtés du carré-carré, du quadrato-cube, du cubo-cube, etc, à une étendue quelconque, ce qu'on n'avait pas fait précédemment. Les démonstrations que j'ai données à cette occasion ne sont que des démonstrations arithmétiques, fondées sur les parties arithmétiques des éléments d'Euclide.

29 Ibn al-Haytham (ca 965–1040)

Le grand nom est, comme souvent, Ibn al-Haytham, l'auteur de l'optique et de tant d'autres travaux importants. Mais il y a eu aussi al-Karaji, as-Samawal, al-Kashi et sans doute bien d'autres.

Ibn al-Haytham (ca 965–1040)



30 L'Algebra (1579)

En Europe aussi, l'accent sera mis sur la résolution des équations polynomiales générales, avec Viète, Harriot, Oughtred, et bien sûr Newton ; à une exception près, et elle est importante.

Le paragraphe que vous voyez, apparaît au début de l'Algebra de Rafael Bombelli. J'ai consacré toute une histoire à vous raconter le rôle majeur que ce livre a joué dans l'histoire de l'algèbre. Il se trouve que ce passage-ci est important également pour l'histoire de l'analyse.

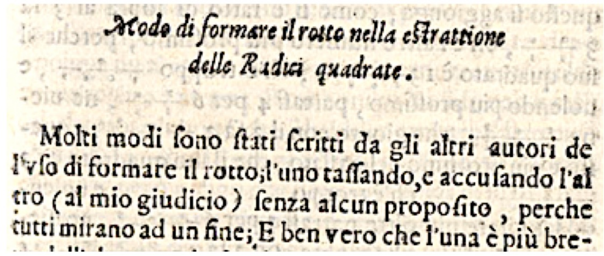
Bombelli annonce le moyen de former les fractions dans l'extraction des racines carrées. Il commence bien sûr par un peu de polémique :

« De nombreux moyens pour former les fractions ont été écrits par d'autres auteurs, chacun attaquant et accusant l'autre, sans propos selon moi car chacun poursuit le même but. »

Alors Bombelli décrit sa propre méthode sur un exemple.

L'Algebra (1579)

Rafael Bombelli (1526–1572)



Modo di formare il rotto nella eſtrattione delle Radici quadrate.

Molti modi ſono ſtati ſcritti da gli altri autori de l'vſo di formare il rotto; l'uno taſſando, e accuſando l'altro (al mio giudicio) ſenza alcun propoſito, perche tutti mirano ad un fine; E ben vero che l'una è più bre-

31 che si voglia il prossimo lato di 13

« Supposons, dit-il que l'on veuille la racine carrée de 13. L'entier le plus proche est 3, et il restera 4, qui est 13 moins 3 au carré. Il faut diviser 4 par deux fois 3. » C'est le premier pas de la méthode de Héron. Puis Bombelli continue en rajoutant à chaque fois une division par 6. Ce que vous voyez ici est l'écriture moderne. Bombelli exprime ses calculs en mots. Comment justifie-t-il ce qu'il est en train de faire ?

che si voglia il prossimo lato di 13

Bombelli, L'Algebra (1579)

$$\sqrt{13} \simeq 3+\frac{4}{6}$$

$$\sqrt{13} \simeq 3+\cfrac{4}{6+\cfrac{4}{6}}$$

$$\sqrt{13} \simeq 3+\cfrac{4}{6+\cfrac{4}{6+\cfrac{4}{6}}}$$

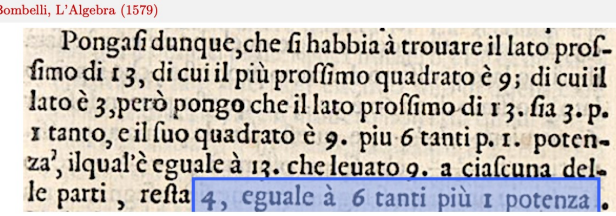
$$\sqrt{13} \simeq 3+\cfrac{4}{6+\cfrac{4}{6+\cfrac{4}{6+\cfrac{4}{6}}}}$$

32 il lato sia 3.p. 1 tanto

Par l'algèbre bien sûr. Il écrit racine de 13 égale à 3 plus un « tanto » c'est-à-dire une inconnue (x pour nous). Il élève au carré pour arriver à 4 égale six tanti plus une puissance, soit $4 = 6x + x^2$. Au lieu de négliger ce x^2, il l'utilise pour diviser par 6 plus x.

il lato sia 3.p. 1 tanto

Bombelli, L'Algebra (1579)



Pongaſi dunque, che ſi habbia à trouare il lato proſſimo di 13, di cui il più proſſimo quadrato è 9; di cui il lato è 3, però pongo che il lato proſſimo di 13. ſia 3. p. 1 tanto, e il ſuo quadrato è 9. piu 6 tanti p. 1. potenza, ilqual'è eguale à 13. che leuato 9. a ciaſcuna delle parti, reſta 4, eguale à 6 tanti più 1 potenza.

$$\sqrt{13} = 3 + x \implies 13 = 9 + 6x + x^2 \implies 4 = 6x + x^2$$

$$x = \frac{4}{6+x}$$

33 Trattato del modo brevissimo... (1613)

Trattato del modo brevissimo... (1613)

Pietro Antonio Cataldi (1548–1626)


TRATTATO

DEL MODO BREVISSIMO

Di trouare la Radice quadra delli numeri,

Et Regole da approssimarsi di continuo al vero nelle Radici de' numeri non quadrati, con le cause, & inuentioni loro,

Et anco il modo di pigliarne la Radice cuba, applicando il tutto alle OPERATIONI MILITARI, & altre.

Di PIETRO ANTONIO CATALDI Lettore delle Scienze Mathematiche nello Studio di Bologna.

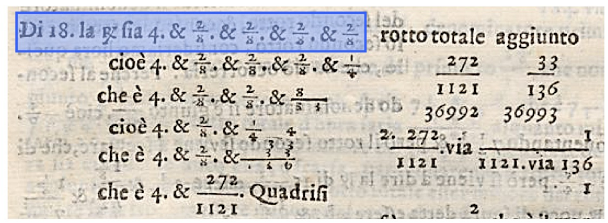
Antonio Cataldi franchit une étape supplémentaire en écrivant le même algorithme sous forme de fractions continues.

Son livre est intitulé « Traité sur le moyen très court de trouver la racine carrée des nombres, et règle pour s'approcher continument des racines des nombres non carrés, avec leurs causes et leurs inventions. Et aussi le moyen de prendre la racine cubique, appliquant le tout aux opérations militaires et autres ». Et oui, que voulez-vous, il faut bien vivre.

34 Fraction continue pour $\sqrt{18}$

Fraction continue pour $\sqrt{18}$

Cataldi, Trattato del modo brevissimo... (1613)



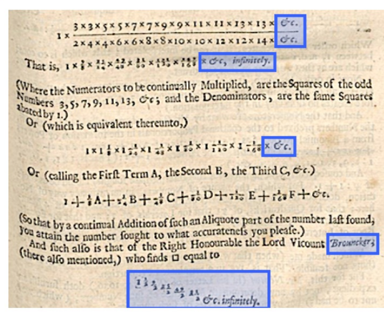
Cataldi calcule la fraction continue racine de 18 égale 4 plus 2 sur... 8, plus deux sur... 8, plus 2 sur... etc. Dans sa notation, il faut comprendre que chaque 2 est le numérateur de tout ce qui suit : c'est la toute première écriture en fraction continue de l'histoire.

Cataldi étudie longuement ses fractions, jusqu'à l'ordre 15. Il en découvre les principales propriétés, il observe que ce sont des valeurs approchées alternativement par défaut et par excès et que la distance à racine de 18 décroît strictement. Mais évidemment, il ne parle pas de limite, et n'écrit pas de fraction continue infinie. C'est encore un peu trop tôt pour cela.

35 with a Fraction still fracted continually

with a Fraction still fracted continually

Wallis, Algebra (1685)



Il faudra attendre un bon demi-siècle, pour voir écrites couramment des expressions infinies. Ceci provient de l'Algèbre de Wallis que je vous cite souvent. Ce sont des expressions de π sur lesquelles nous revenons ailleurs. Remarquez les « etc. infiniment ». L'expression en bas de l'image est la fraction continue de π trouvée par Lord Brouncker.

Euh, à propos, l'expression « fraction continue » est très malheureuse. Cela n'a aucun rapport avec la continuité. On devrait plutôt dire « fraction continuée », comme en anglais. Pour la décrire, Wallis dit que le dénominateur de chaque fraction est le nombre 2, avec une fraction, encore fractionnée continuellement.

36 références

références

- F. Acerbi, B. Vitrac (2014) *Metrica, Héron d'Alexandrie*, Pisa : Fabrizio Serra
- C. Brezinski (1991) *History of continued fractions and Padé approximants*, Berlin : Springer
- J. Dutka (1986) On square roots and their representations, *Archive for History of Exact Sciences*, 36(1), 21–39
- D. Fowler, E. Robson (1998) Square root approximations in Old Babylonian mathematics : YBC 7289 in context, *Historia Mathematica*, 25, 366–378
- B. R. Hodgson (2006) Coups d'œil à saveur historique sur l'extraction de racine carrée, *Bulletin AMQ*, 46(2), 18–49

Bon, eh bien maintenant que vous voilà informés, à votre avis : quel nom peut-on lui donner à cet algorithme ? Algorithme d'Alexandrie plutôt que de Babylone ? Méthode de Baudhayana plutôt que de Héron ? Oh, après tout, faites selon votre bon plaisir. Moi j'ai fini mon boulot.