

0 La stéréométrie des tonneaux de vin

histoires d'analyse

La stéréométrie des tonneaux de vin

géométrie des indivisibles



hist-math.fr

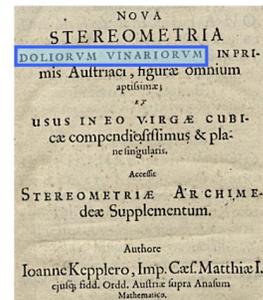
Bernard YCART

Il m'en aura fallu des histoires pour vous raconter la genèse du calcul différentiel avant Newton et Leibniz ! Celle-ci parle de l'apparition des infiniment petits dans les calculs d'intégrales. Mais pourquoi un titre aussi décalé que la « Stéréométrie des tonneaux de vin » ? Vous me connaissez, je n'invente rien. D'ailleurs où serais-je allé chercher un truc pareil ?

1 Stereometria doliorum vinariorum (1615)

Stereometria doliorum vinariorum (1615)

Johannes Kepler (1571–1630)



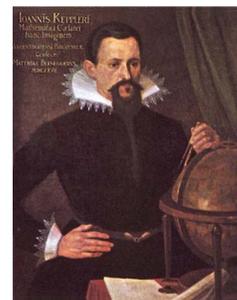
Le titre complet est « Nouvelle stéréométrie (ou mesure des volumes) des tonneaux de vin, en premier lieu autrichiens, dont la forme est la plus adaptée entre toutes, l'usage pour cela d'une tige pour mesurer les volumes de manière condensée. Un supplément à la stéréométrie d'Archimède a été ajouté. »

2 Johannes Kepler (1571–1630)

Il fallait bien un des penseurs les plus originaux de tous les temps pour faire d'un problème de la vie courante, le point de départ de l'analyse moderne. L'histoire commence en 1613. La période est plutôt faste, un répit bienvenu dans la vie compliquée de Kepler. Au cours des deux années précédentes, il avait perdu sa première épouse et deux de ses enfants. Celui qui l'avait fait mathématicien impérial, Rodolphe II, avait été déposé par son frère Matthias en 1611, et était décédé peu après. Désormais, Kepler était installé à Linz en Autriche, où il jouissait d'une relative tolérance religieuse. En échange de son salaire, on attendait de lui de l'enseignement, des horoscopes, des conseils astrologiques, des tables astronomiques, mais pas des mathématiques sur les tonneaux de vin. Que s'était-il donc passé ? Il s'était remarié le 30 octobre 1613, et sa nouvelle épouse s'était installée chez lui au mois de novembre. Écoutez-le raconter.

Johannes Kepler (1571–1630)

Stereometria doliorum vinariorum (1615)



3 Stereometria doliorum vinariorum (1615)

« Cette année-à, l'Autriche avait connu une vendange abondante et des récoltes non moins généreuses. Les vaisseaux de transport étaient nombreux sur le Danube, et les quais de Linz étaient encombrés de tonneaux de vins vendus à des prix raisonnables. Étant chef de famille, j'équipai ma maison de la quantité de boisson nécessaire. C'est ainsi que des tonneaux furent apportés chez moi et alignés. »

Stereometria doliorum vinariorum (1615)

Johannes Kepler (1571–1630)

xiffem; tempore tali, quando Austria, vindemiâ copiosâ, nec minus generosâ collectâ, plurimis onerarijs adverso Danubio missis, opes suas Norico nostro dividebat, litusq; omnè Lincianum vasis vinarijs tolerabili precio venalibus obstructum viscebatur: conveniens erat officio mariti, boniq; patris familias, ut domui meâ de necessario potu prospicerem. Dolij igitur ali-

4 Den Wynroeyer

« Au bout de quatre jours, le vendeur arriva avec une règle à mesurer et il jaugea chacun des tonneaux sans distinction, sans faire attention à la forme, sans raisonnement ni calcul. Simplement il introduisait sa tige à mesurer transversalement depuis la bonde jusqu'au fond, et annonçait la contenance après avoir lu la graduation de la tige. »

Du temps de Kepler, jauger les tonneaux était une profession, que vous voyez représentée ici.

Den Wynroeyer

Kepler, Stereometria doliorum vinariorum (1615)



5 Velte

L'outil principal était effectivement une tige graduée, qui en français s'appelle une « velte ». On en trouve encore à vendre comme antiquité.

Velte

Kepler, Stereometria doliorum vinariorum (1615)



6 Velte

Comme l'a observé Kepler, la velte était introduite par la bonde au milieu du tonneau, transversalement jusqu'à toucher le fond, précisément à la jonction entre le disque vertical et les douves.

Kepler s'étonne. Comment une longueur peut-elle mesurer un volume? Bien sûr la graduation ne peut pas être linéaire. Il faut qu'elle soit irrégulière comme vous le voyez sur cette illustration, et plus précisément fonction du cube de la longueur. Mais logiquement, une même règle ne peut servir que pour une forme de tonneau.

Velte

Kepler, Stereometria doliorum vinariorum (1615)

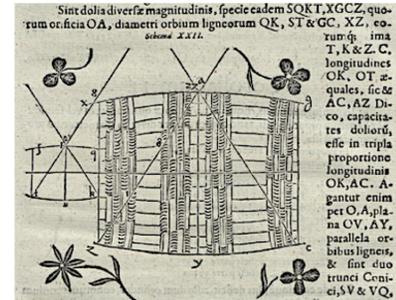


7 Dolius Austriacus

Alors Kepler propose sa propre modélisation de la forme, et fait ses calculs. Une des questions qu'il se pose est un problème d'optimum : pour une mesure donnée de la diagonale entre la bonde et le fond du tonneau, quelle peut être la contenance maximale ?

Dolius Austriacus

Kepler, *Stereometria doliurum vinariorum* (1615)



8 in proportione semidupla

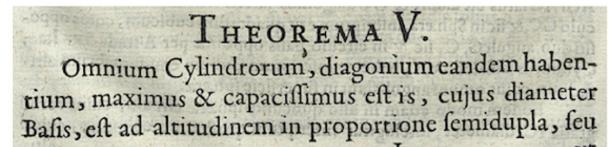
Il résout la question en supposant le tonneau cylindrique. C'est le théorème V que vous voyez. Il dit : « Parmi tous les cylindres qui ont la même diagonale (sous-entendu entre le milieu de la hauteur et le fond à l'opposé), celui qui a la plus grande contenance est celui dont le rapport de la hauteur au diamètre est racine de deux. »

Faites le calcul vous-même : c'est un très joli exercice, qui a un véritable fondement pratique. Songez tout de même que quand Kepler écrit ce théorème, Fermat est encore un petit garçon, et il n'est pas question d'annuler la dérivée d'une fonction objectif pour trouver un maximum. C'est donc un bel exploit que Kepler réalise là.

Mais il y a beaucoup plus impressionnant dans ce livre.

in proportione semidupla

Kepler, *Stereometria doliurum vinariorum* (1615)



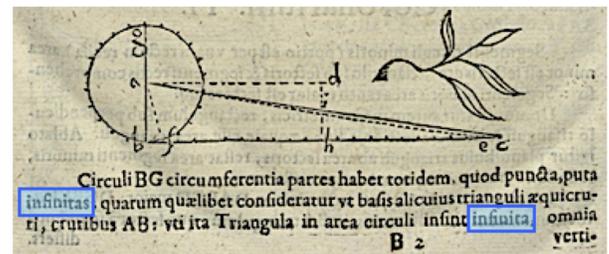
9 Triangula in area circuli insint infinita

Kepler commence par redémontrer tous les résultats d'Archimède sur la mesure du cercle, puis sur la sphère et le cylindre. Mais ses démonstrations sont radicalement nouvelles, et même révolutionnaires.

Dans celle-ci, il cherche à montrer que l'aire du disque est égale à celle du triangle rectangle dont un côté est la circonférence, l'autre le rayon. Alors qu'Archimède utilisait pour cela la méthode d'exhaustion, et encadrait soigneusement la circonférence par des polygones, Kepler lui n'hésite pas à utiliser le mot tabou d'« infini ». Vous le voyez dans les encadrés bleus, la circonférence se compose d'une infinité de points, et le disque d'une infinité de triangles tous de même hauteur.

Triangula in area circuli insint infinita

Kepler, *Stereometria doliurum vinariorum* (1615)



10 Sphère, cône et cylindre

Avec la même technique, la sphère se compose d'une infinité de cônes dont la hauteur est égale au rayon, donc son volume est le tiers du rayon multiplié par sa surface. Et tout à l'ave-nant : le volume de la sphère est quatre fois celui du cône dont la base est un grand cercle et la hauteur un rayon, c'est aussi les deux tiers du volume du cylindre qui la contient. Vous voyez ici la figure. Remarquez les petits traits sur le dessin : ils indiquent les tranches qui découpent le volume. Je ne peux pas m'empêcher de penser que Kepler avait en tête l'analogie du tonneau découpé verticalement par les douves.

Ces résultats que Archimède était si fier d'avoir démontré rigoureusement deviennent pour Kepler des évidences intuitives. Il ne s'arrête pas là. Il étudie ensuite quelques dizaines de solides, dont il calcule le volume par la même technique.

11 La pomme et le sabot

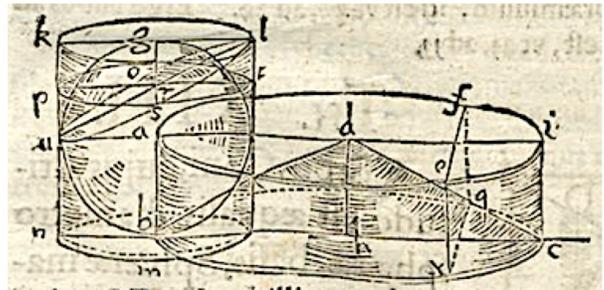
Voici juste un exemple. Kepler étudie tous les tores obtenus par rotation d'un cercle autour d'un axe situé dans le même plan. Celui qui est en bas à droite, il l'appelle une pomme. Pour calculer son volume, il le découpe en tranches, qu'il ré-empile ensuite pour former le cylindre tronqué qui est à côté.

12 Principe de Cavalieri

Cette idée que deux solides ont le même volume s'ils sont composés de tranches de même surface, c'est ce que nous appelons le principe de Cavalieri. C'est une idée très intuitive : il suffit de voir deux piles de pièces de monnaie pour la comprendre. Kepler est loin d'être le premier à l'avoir eue.

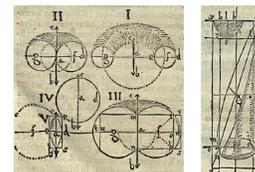
Sphère, cône et cylindre

Kepler, *Stereometria doliorum vinariorum* (1615)



La pomme et le sabot

Kepler, *Stereometria doliorum vinariorum* (1615)



Principe de Cavalieri



13 des dais carrés qui s'emboîteraient exactement

On la trouve dans les commentaires de Liu Hui aux Neuf Chapitres. Pour calculer le volume de la sphère, Liu Hui dit en substance : prenons un cube, et découpons-le, le long d'un cercle, de manière à en faire un cylindre. Re commençons encore une fois l'opération transversalement. La forme correspondante présente des ressemblances avec des dais carrés qui s'emboîteraient exactement.

Prenez « dai », D A I, au sens de « voile ». De nos jours, cette forme, s'appelle un solide de Steinmetz.

Là, Liu Hui fait une remarque cruciale : « Si la figure des dais emboîtés a le lu du carré, la boule inscrite en son centre a par conséquent le lu du cercle. » En termes modernes, si vous coupez par un plan horizontal, l'intersection avec le solide de Steinmetz est un carré, l'intersection avec la sphère inscrite est un cercle inscrit dans ce carré. Le rapport des deux surfaces est $\pi/4$. Comme ce rapport est le même quel que soit le plan d'intersection, c'est aussi le rapport entre les deux volumes. C'est une autre version du principe de Cavalieri.

Malheureusement, Liu Hui ne parvient pas à trouver le rapport des volumes entre les dais emboîtés.

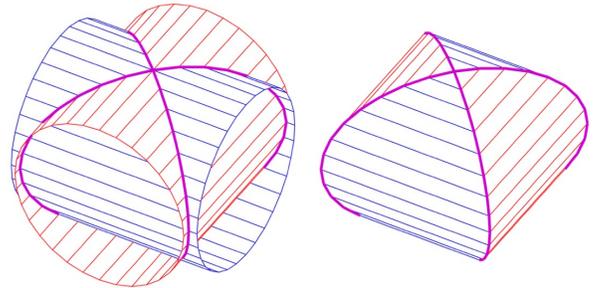
Deux siècles plus tard, Zu Gengzhi réussit à montrer que le rapport du volume des dais emboîtés au volume du cube est deux tiers, toujours en appliquant le principe de Cavalieri.

14 Bonaventura Cavalieri (1598–1647)

Mais s'il est si ancien, ce principe, pourquoi lui donne-t-on le nom de Cavalieri, qui est plus jeune que Kepler de vingt-sept ans ?

des dais carrés qui s'emboîteraient exactement

Liu Hui, Commentaire aux neuf chapitres (263)



Bonaventura Cavalieri (1598–1647)



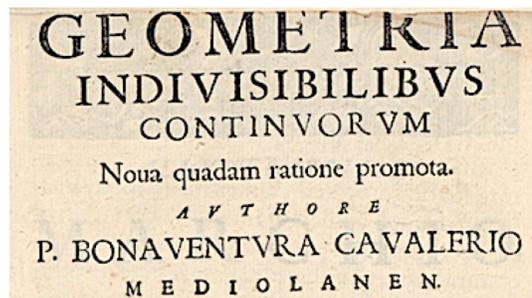
15 Geometria indivisibilibus continuorum (1635)

À cause de ce livre, la « Géométrie des continus par les indivisibles, exposée par une certaine nouvelle méthode. »

Un des postulats hérités de la géométrie grecque, est que le discret, que l'on peut augmenter indéfiniment par ajout d'unités, est par essence différent du continu, que l'on peut au contraire diviser indéfiniment sans jamais trouver d'unité insécable. Qualifier d'indivisibles ces tranches en lesquelles on découpe le continu, est donc une transgression par rapport à l'héritage grec, et cette transgression sera reprochée à Cavalieri, comme à Kepler. Les tenants de l'orthodoxie euclidienne sont majoritairement des Jésuites, avec Paul Guldin à leur tête. Guldin aurait pu être habitué aux transgressions : né dans une famille protestante d'origine juive, il s'était converti au catholicisme à l'âge de 20 ans, et ce n'est qu'après qu'il avait appris la géométrie euclidienne chez les Jésuites. Remarquez qu'un autre Jésuite, Grégoire de Saint-Vincent, a contribué plus positivement à la révolution mathématique qui s'annonçait.

Geometria indivisibilibus continuorum (1635)

Bonaventura Cavalieri (1598–1647)

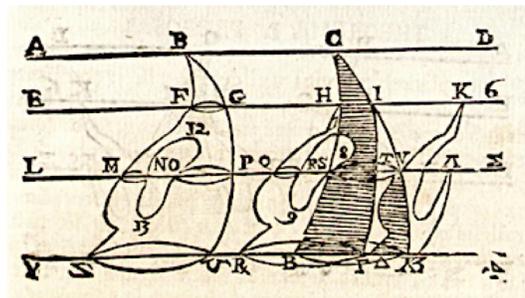


16 Geometria indivisibilibus continuorum (1635)

Ce que Cavalieri apporte de neuf par rapport à Kepler, c'est une tentative de théorie. Contrairement à Kepler, qui s'était contenté de démontrer la technique sur des exemples, certes nombreux, Cavalieri se place dans un cadre général, auquel ses successeurs vont pouvoir se référer. C'est pour cela que l'on parle du « principe de Cavalieri ».

Geometria indivisibilibus continuorum (1635)

Bonaventura Cavalieri (1598–1647)



17 Pierre de Fermat (ca 1606–1665)

C'était une chose que de savoir découper des volumes, de savoir réagencer leurs tranches, encore fallait-il pouvoir calculer la somme de ces infinités de tranches que l'on empilait. Il manquait pour cela un ingrédient, que Pierre de Fermat, Gilles Personne de Roberval, et d'autres sans doute, étaient en train de concocter, à peu près au moment où paraissait la géométrie des indivisibles.

Voici ce que Fermat écrivait à Roberval, le 4 novembre 1636

Pierre de Fermat (ca 1606–1665)



18 Lettre de Fermat à Roberval (4 novembre 1636)

« Vous vous êtes servi aussi d'un même medium que moi en la quadrature des paraboles solides, quarréquarrées etc. à l'infini ; mais vous supposez une chose de laquelle vous n'avez possiblement pas la démonstration précise, qui est que la somme des carrés est plus grande que le tiers du cube qui a pour côté le côté du plus grand carré ; etc. Or, pour démontrer cela plus généralement, il faut, étant donné un nombre *in progression naturali*, trouver la somme, non seulement de tous les carrés et cubes, ce que les auteurs qui ont écrit ont déjà fait, mais encore la somme des quarrésquarrés, quarrécubes etc. ce que personne que je sache n'a encore trouvé ; et pourtant cette connaissance est belle et de grand usage et n'est pas des plus aisées. »

Lettre de Fermat à Roberval (4 novembre 1636)

Pierre de Fermat (ca 1606–1665), Gilles Personne de Roberval (1602–1675)

Vous vous êtes servi aussi d'un même *medium* que moi en la quadrature des paraboles solides, quarréquarrées etc. à l'infini ; mais vous supposez une chose de laquelle vous n'avez possiblement pas la démonstration précise, qui est que la somme des carrés est plus grande que le tiers du cube qui a pour côté le côté du plus grand carré ; la somme des cubes plus que le quart du quarréquarré, la somme des quarréquarrés plus qu'un cinquième du quarrécube ; etc. Or, pour démontrer cela plus généralement, il faut, étant donné un nombre *in progression naturali*, trouver la somme, non seulement de tous les carrés et cubes, ce que les auteurs qui ont écrit ont déjà fait, mais encore la somme des quarrésquarrés, quarrécubes etc. ce que personne que je sache n'a encore trouvé ; et pourtant cette connaissance est belle et de grand usage et n'est pas des plus aisées.

19 Quadrature des paraboles

À l'époque, on appelait parabole n'importe quelle courbe dont l'équation était un polynôme en x . Quand Fermat parle de parabole solide, il veut dire une équation de degré trois ; quarréquarré se réfère au degré quatre, quarrécube au degré cinq, etc. Disons que petit a est un entier. Quand on découpe l'aire sous la courbe de x^a en tranches verticales régulières, et qu'on l'encadre par des rectangles, on est amené à sommer les n premiers entiers, à la puissance a . Il suffit de savoir que n puissance $a + 1$ divisé par $a + 1$ est un équivalent de cette somme. Fermat connaissait des résultats beaucoup plus précis que celui-ci.

Quadrature des paraboles

Pierre de Fermat (ca 1606–1665), Gilles Personne de Roberval (1602–1675)

$$\int_0^X x^a dx = \frac{X^{a+1}}{a+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^{a+1}} \sum_{i=1}^n i^a = \frac{1}{a+1}$$

20 Somme des puissances d'entiers (1636)

Partant de ses études arithmétiques sur les nombres géométriques, Fermat avait démontré cette magnifique identité : si on somme de 1 à n des nombres de la forme i fois $(i + 1)$ jusqu'à $i + a$, divisés par le même nombre de facteurs de 1 à a , la somme est un nombre de la même forme, à l'ordre suivant. À partir de ce résultat, on peut calculer la somme des entiers à une puissance entière quelconque, et surtout démontrer l'encadrement que vous voyez au-dessous, qui est largement suffisant pour calculer la quadrature de n'importe quelle parabole, ou en termes modernes l'intégrale de n'importe quel polynôme.

Somme des puissances d'entiers (1636)

Pierre de Fermat (ca 1606–1665)

$$\sum_{i=1}^n \frac{i(i+1) \cdots (i+a)}{1 \cdot 2 \cdots (a+1)} = \frac{n(n+1) \cdots (i+a+1)}{1 \cdot 2 \cdots (a+2)}$$

$$\sum_{i=1}^n i^a > \frac{n^{a+1}}{a+1} > \sum_{i=1}^{n-1} i^a$$

21 Somme des premiers entiers

L'expression de la somme des n premiers entiers était connue des Pythagoriciens qui la qualifiaient de nombre triangulaire. La justification géométrique de la formule, que vous avez sous les yeux, devait leur être familière. Il est probable qu'elle était connue des Babyloniens avant les Grecs. Connaissaient-ils aussi l'expression de la somme des n premiers carrés ? C'est possible, mais moins probable, car Archimède qui l'utilise pour la quadrature de la spirale, la démontre de manière indirecte. Si cela avait été un résultat bien connu, il n'y aurait pas consacré autant de développements.

Pour la quadrature de la parabole, Thabit ibn Qurra utilise aussi la somme des premiers carrés et la redémontre.

On trouve la somme des premiers entiers, des premiers carrés et des premiers cubes chez Aryabhata à la toute fin du cinquième siècle. Il dit :

22 Āryabhaṭīya (499)

« On multiplie la somme du premier et du dernier terme par la moitié du nombre des termes. C'est pour une progression arithmétique.

Le dernier terme, celui-ci plus 1, celui-ci plus le nombre des termes : du produit de ces trois nombres prenez le sixième, c'est le volume de la pile des carrés.

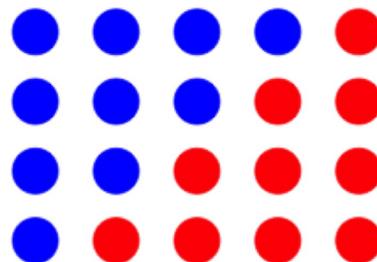
Le carré de la pile des nombres est le volume de la pile des cubes. »

On ignore bien sûr comment il avait découvert ces résultats.

23 Ibn al-Haytham (ca 965–1040)

Le premier à dépasser la puissance trois est al-Haytham, vers l'an mille. Dans son traité sur la mesure du parabolicoïde, il donne en lemme la somme des premiers entiers, des premiers carrés, des premiers cubes, puis il dit :

Somme des premiers entiers Nombres triangulaires



Āryabhaṭīya (499) Āryabhaṭa (476–550)

XIX b. – On multiplie la somme du premier et du dernier terme par la moitié du nombre des termes.

XXII a. – Le dernier terme, celui-ci plus 1, celui-ci plus le nombre des termes : du produit de ces trois nombres prenez le sixième, c'est le volume de la pile des carrés.

XXII b. – Le carré de la pile des nombres est le volume de la pile des cubes.

Ibn al-Haytham (ca 965–1040)



24 Sur la mesure du paraboloïde

« Si on prend le cinquième du plus grand d'entre les nombres successifs, si on lui ajoute le cinquième de l'unité, etc., alors, ce qui résulte de tout cela est la somme des carrés-carrés, c'est-à-dire des puissances quatrièmes, des nombres successifs. »

Je vous laisse le soin de traduire tout cela en langage algébrique, puis de vérifier qu'al-Haytham a donné la bonne formule ; sachant qu'il dit rarement n'importe quoi ! Plus important, sa démonstration consiste à multiplier la somme des premiers cubes par la somme des premiers entiers, et il est clair qu'il aurait su passer à la puissance suivante s'il en avait eu besoin.

Mais cela, Fermat l'ignorait. Revenons donc au dix-septième européen. Malgré les oppositions, les querelles, les accusations de plagiat dont tous les mathématiciens étaient familiers à l'époque, les idées diffusent. Vers 1650, tous ceux qui comptent dans le milieu mathématique ont assimilé les techniques de Fermat et de Cavalieri. Dans les années 1650 plusieurs livres font date. D'abord une nouvelle édition du traité des indivisibles de Cavalieri, qui répond à tous les détracteurs de sa technique.

25 Arithmetica Infinitorum (1656)

Puis en 1656 paraît l'Arithmétique des infinis de Wallis. Le titre n'est pas anodin, et fait écho aux indivisibles de Cavalieri : parler d'arithmétique signifie que les infiniment petits vont être traités, comme chez Cavalieri, comme des unités à sommer.

26 Arithmetica Infinitorum (1656)

Regardez par exemple la quadrature du demi-cercle : il est question d'une quantité petit a , qui est infiniment petite, car elle est égale au diamètre divisé par l'infini.

Évidemment, la rigueur laisse à désirer, mais la méthode est diablement efficace.

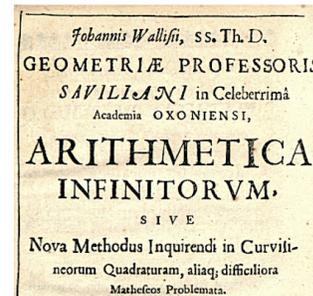
Sur la mesure du paraboloïde

Ibn al-Haytham (ca 965–1040)

Si on prend le cinquième du plus grand d'entre les nombres successifs, si on lui ajoute le cinquième de l'unité, si on multiplie cette somme par le plus grand nombre, si on ajoute ensuite au plus grand nombre la moitié de l'unité, si on multiplie cela par ce qu'on a obtenu de la première multiplication, si on retient ce produit, si ensuite on ajoute un au plus grand nombre, si on multiplie cela par le plus grand nombre, si on retranche du produit un tiers d'unité, si enfin on multiplie le reste par ce qu'on a retenu, alors, ce qui résulte de tout cela est la somme des carrés-carrés des nombres successifs.

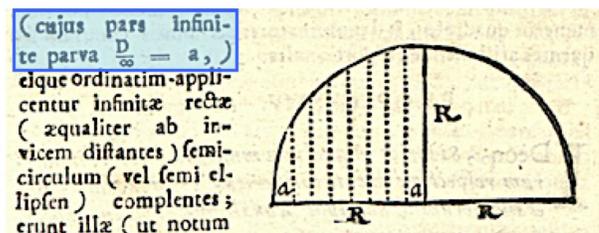
Arithmetica Infinitorum (1656)

John Wallis (1616–1703)



Arithmetica Infinitorum (1656)

John Wallis (1616–1703)

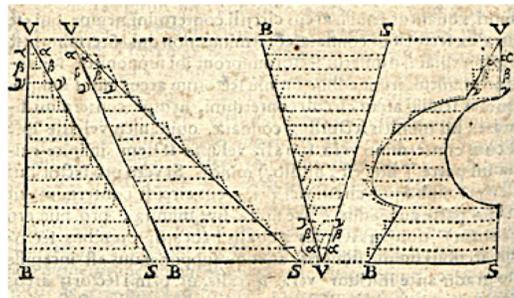


27 Principe de Cavalieri

Bien entendu, Wallis a parfaitement intégré le principe de Cavalieri, qu'il illustre ici.

Principe de Cavalieri

Wallis, *Arithmetica Infinitorum* (1656)

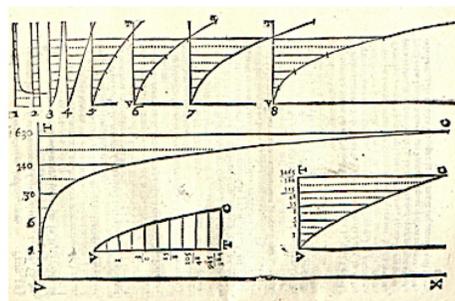


28 Quadratures de fonctions puissance

Il est désormais capable de calculer toute sorte d'intégrales, ou de quadratures comme on disait encore; en particulier celles des fonctions puissance, l'exposant n'étant plus nécessairement entier positif, mais pouvant être rationnel, voire même négatif.

Quadratures de fonctions puissance

Wallis, *Arithmetica Infinitorum* (1656)

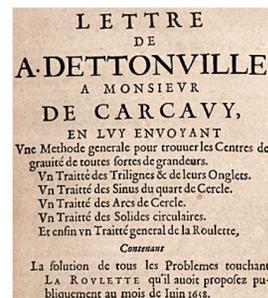


29 Lettre de A. Dettonville

Deux ans plus tard Pascal, sous un anonymat qui ne trompe personne, publie un recueil de ses propres quadratures, comme un témoignage de sa virtuosité dans la manipulation des indivisibles. Ce recueil sera soigneusement étudié par Leibniz.

Lettre de A. Dettonville

Blaise Pascal (1623–1662)



30 James Gregory (1638–1675)

Quand dix ans après Pascal, Gregory puis Barrow ont publié leurs propres leçons de géométrie, j'imagine que certains ont pu avoir l'impression que la théorie des quadratures était achevée. En fait elle n'attendait plus que Newton et Leibniz pour démarrer.

James Gregory (1638–1675)



31 références

Tout de même, une invention comme le calcul intégral, cela mérite d'être fêté. Et si on faisait venir quelques tonneaux de vin pour arroser cela dignement ? Attention, il faut que ce soit des tonneaux autrichiens, puisque Kepler a démontré qu'ils étaient les meilleurs !

références

- A. Alexander (2014) The secret spiritual history of calculus, *Scientific American*, 310(4), 82-85
- P. Dugac (2003) *Histoire de l'analyse*, Paris : Vuibert
- V. Jullien ed. (2015) *Seventeenth-century indivisibles revisited*, Basel : Birkhäuser
- J. Kepler (2018) *New solid geometry of wine barrels (E. Knobloch transl.)*, Paris : Les Belles Lettres
- J. A. Stedall (2004) *The arithmetic of infinitesimals; John Wallis 1656*, New York : Springer