Une histoire de mathématiques à écouter sur

hist-math.fr

0 Lune de miel à Interlaken

histoires d'analyse

Lune de miel à Interlaken

la construction des nombres réels

hist-math.fr Bernard Ycart

Comme vous l'avez sans doute remarqué, dans l'histoire des mathématiques l'ordre chronologique ne suit pas toujours l'ordre logique.

En analyse, il y a une inversion flagrante. Newton et Leibniz ont commencé à dériver des fonctions bien avant que Cauchy et Bolzano ne parlent de continuité ; et quand Cauchy et Bolzano ont défini la continuité, ils ne savaient pas vraiment ce qu'étaient les nombres réels.

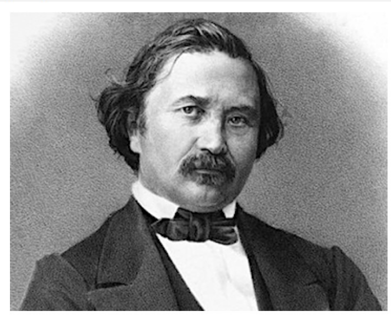
1 Bernard Bolzano (1781–1848)

Bernard Bolzano (1781–1848)

Pour être juste, Bolzano s'était posé la question. On en a retrouvé la trace dans ses manuscrits. Mais autant sa théorie des fonctions, publiée un siècle après qu'elle ait été écrite, contenait des résultats majeurs, autant sa théorie des nombres réels, élaborée sans doute aussi dans les années 1830, était restée à l'état d'ébauche. Bolzano aura eu le mérite de poser le problème d'une définition rigoureuse des nombres, mais c'est tout.

2 Joseph Bertrand (1822–1900)

Joseph Bertrand (1822–1900)
Traité d'Arithmétique (1849)



Je vous ai déjà fait part de ma conviction que l'exigence croissante de rigueur en analyse au dix-neuvième siècle est, au moins en partie, liée à la nécessité d'enseigner à des publics de plus en plus larges et exigeants.

Cet homme, Joseph Bertrand, en est une illustration. Il a enseigné à l'École normale supérieure, à l'École polytechnique, avant d'être élu au collège de France. Son traité d'arithmétique, publié en 1849, est peut-être aussi en partie le fruit de ses souvenirs d'enfance dans la classe préparatoire de son oncle. Il débute par un avertissement.

3 une rigueur et une précision

« Cet ouvrage est spécialement destiné aux jeunes gens qui étudient l'arithmétique avec l'intention d'aborder ensuite les autres parties des mathématiques ; c'est pour eux surtout que j'ai cherché à apporter, dans les raisonnements et dans les définitions, une rigueur et une précision dont ils ne sauraient trop tôt prendre l'habitude. »

une rigueur et une précision
Bertrand, Traité d'Arithmétique (1849)

AVERTISSEMENT.

Cet ouvrage est spécialement destiné aux jeunes gens qui étudient l'arithmétique avec l'intention d'aborder ensuite les autres parties des mathématiques; c'est pour eux surtout que j'ai cherché à apporter, dans les raisonnements et dans les définitions, une rigueur et une précision dont ils ne sauraient trop tôt prendre l'habitude.

Oui c'est bien le même Joseph Bertrand qui écrira quinze ans plus tard dans un autre manuel, que toute fonction admet une dérivée. Mais passons.

Ici, Bertrand met en pratique ses bonnes résolutions. Par exemple quand il définit la racine carrée, il commence par préciser qu'un nombre est plus grand ou plus petit que $\sqrt{N}$ selon que son carré est plus grand ou plus petit que N. Voyant alors les nombres comme étant des longueurs reportées sur une ligne droite, il ajoute :

4 un *point de démarcation*

« Une portion de cette ligne recevra les extrémités des longueurs dont la mesure est moindre que $\sqrt{N}$, et une autre portion celles des lignes dont la mesure est plus grande que $\sqrt{N}$; entre ces ceux régions, il ne pourra évidemment exister aucun intervalle, mais, seulement, un *point de démarcation*. La distance à laquelle se trouve ce point, est, par définition, mesurée par $\sqrt{N}$. »

un *point de démarcation*
Bertrand, Traité d'Arithmétique (1849)

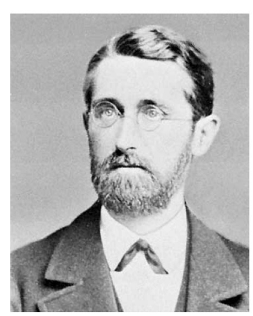
donnée. Une portion de cette ligne recevra les extrémités des longueurs dont la mesure est moindre que $\sqrt{N}$, et une autre portion celles des lignes dont la mesure est plus grande que $\sqrt{N}$; entre ces deux régions, il ne pourra évidemment exister aucun intervalle, mais, seulement, un *point de démarcation*. La distance à laquelle se trouve ce point, est, par définition, mesurée par $\sqrt{N}$.

Vue la longue histoire des approximations de racines, et en particulier par des fractions continues, alternativement par excès et par défaut, il était assez naturel d'écrire une racine comme un « point de démarcation » entre deux ensembles de rationnels, ceux qui sont inférieurs et ceux qui sont supérieurs.

Bertrand est parfaitement conscient que sa définition s'étend à des irrationnels quelconques, mais il ne pousse pas tout à fait jusqu'au bout la logique axiomatique. Il est vrai que ce manuel d'arithmétique élémentaire n'était pas forcément le bon endroit pour développer cette logique.

5 Richard Dedekind (1831–1916)

Richard Dedekind (1831–1916)



Le plus étonnant finalement, c'est que la définition que Dedekind a donnée des nombres réels, suit exactement la même idée que l'exposé de Bertrand. Comme pour Bertrand, la motivation initiale de Dedekind est l'enseignement.

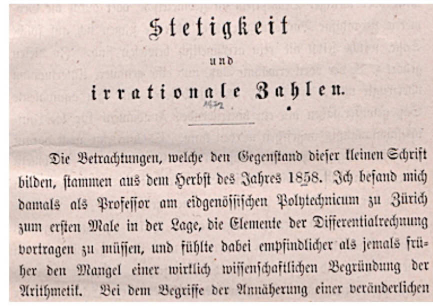
6 Stetigkeit und Irrationale Zahlen (1872)

Son mémoire est intitulé « Continuité et nombres irrationnels. » Il dit :

« Les considérations qui font l'objet de ce court essai datent de l'automne 1858. Je me trouvai alors, en tant que professeur à l'École polytechnique fédérale de Zurich, obligé pour la première fois d'exposer les éléments du calcul différentiel et je ressentis à cette occasion, plus vivement encore qu'auparant, combien l'arithmétique manque d'un fondement véritablement scientifique. À propos du concept d'une grandeur variable qui tend vers une limite fixe, et notamment pour prouver le théorème que toute grandeur qui croît constamment, mais non au-delà de toute limite, doit nécessairement tendre vers une valeur limite, je cherchai refuge dans les évidences géométriques. »

Stetigkeit und Irrationale Zahlen (1872)

Richard Dedekind (1831–1916)


Stetigkeit

und

irrationale Zahlen.

Die Betrachtungen, welche den Gegenstand dieser kleinen Schrift bilden, stammen aus dem Herbst des Jahres 1858. Ich befand mich damals als Professor am eidgenössischen Polytechnicum zu Zürich zum ersten Male in der Lage, die Elemente der Differentialrechnung vortragen zu müssen, und fühlte dabei empfindlicher als jemals früher den Mangel einer wirklich wissenschaftlichen Begründung der Arithmetik. Bei dem Begriffe der Annäherung einer veränderlichen

7 Mon sentiment d'insatisfaction était si puissant

« [. . .] Maintenant encore, admettre ainsi l'intuition géométrique dans le premier enseignement du calcul différentiel me semble, du point de vue didactique, extrêmement utile, indispensable même, si l'on ne veut pas perdre trop de temps. Mais, personne ne le niera, cette façon d'introduire au calcul différentiel, ne peut aucunement prétendre avoir un caractère scientifique. Mon sentiment d'insatisfaction était alors si puissant que je pris la ferme décision de réfléchir jusqu'à ce que j'aie trouvé un fondement purement arithmétique et parfaitement rigoureux des principes de l'analyse infinitésimale. »

Mon sentiment d'insatisfaction était si puissant

Dedekind, Stetigkeit und Irrationale Zahlen (1872)

[. . .] Maintenant encore, admettre ainsi l'intuition géométrique dans le premier enseignement du calcul différentiel me semble, du point de vue didactique, extrêmement utile, indispensable même, si l'on ne veut pas perdre trop de temps. Mais, personne ne le niera, cette façon d'introduire au calcul différentiel, ne peut aucunement prétendre avoir un caractère scientifique. Mon sentiment d'insatisfaction était alors si puissant que je pris la ferme décision de réfléchir jusqu'à ce que j'aie trouvé un fondement purement arithmétique et parfaitement rigoureux des principes de l'analyse infinitésimale.

8 la droite doit être complète

« La comparaison [. . .] entre le domaine des nombres rationnels et une droite a induit à reconnaître que le premier est lacunaire, incomplet ou discontinu, tandis que la droite doit être dite complète, non-lacunaire ou continue. Mais en quoi consiste en fait cette continuité ? »

La réponse date du 24 novembre 1858.

la droite doit être complète

Dedekind, Stetigkeit und Irrationale Zahlen (1872)

La comparaison [. . .] entre le domaine des nombres rationnels et une droite a induit à reconnaître que le premier est lacunaire, incomplet ou discontinu, tandis que la droite doit être dite complète, non-lacunaire ou continue. Mais en quoi consiste en fait cette continuité ?

9 tout point de la droite opère une division

« [. . .] J'y ai réfléchi longtemps en vain, mais finalement j'ai trouvé ce que je cherchais. Les avis sur cette découverte seront peut-être partagés ; je crois cependant que la plupart des gens en trouveront le contenu très trivial. Il consiste en ceci. Au paragraphe précédent, on attire l'attention sur le fait que tout point p de la droite opère une division de celle-ci en deux portions telles que tout point d'une portion est à gauche de tout point de l'autre. Je trouve l'essence de la continuité dans la réciproque, c'est-à-dire dans le principe suivant : »

tout point de la droite opère une division

Dedekind, Stetigkeit und Irrationale Zahlen (1872)

[. . .] J'y ai réfléchi longtemps en vain, mais finalement j'ai trouvé ce que je cherchais. Les avis sur cette découverte seront peut-être partagés ; je crois cependant que la plupart des gens en trouveront le contenu très trivial. Il consiste en ceci. Au paragraphe précédent, on attire l'attention sur le fait que tout point p de la droite opère une division de celle-ci en deux portions telles que tout point d'une portion est à gauche de tout point de l'autre. Je trouve l'essence de la continuité dans la réciproque, c'est-à-dire dans le principe suivant :

10 il existe un point et un seul qui opère cette division

« Si tous les points de la droite sont répartis en deux classes, telles que tout point de la première classe soit à gauche de tout point de la seconde classe, il existe un point et un seul qui opère cette partition de tous les points en deux classes, cette découpe de la droite en deux portions. »

C'est ce que l'on appelle les « coupures de Dedekind ».

il existe un point et un seul qui opère cette division

Dedekind, Stetigkeit und Irrationale Zahlen (1872)

« Si tous les points de la droite sont répartis en deux classes, telles que tout point de la première classe soit à gauche de tout point de la seconde classe, il existe un point et un seul qui opère cette partition de tous les points en deux classes, cette découpe de la droite en deux portions. »

11 Charles Méray (1835–1911)

Vous connaissez ma prédilection pour les illustres inconnus. Concernant Charles Méray, j'exagère un peu, il n'est pas aussi totalement inconnu qu'il en a l'air. Déjà, nous en avons ce magnifique portrait, ce qui n'est pas si mal. Il faut dire qu'il a été doyen de la faculté des sciences de Dijon, où il était professeur, et son portrait trône toujours sur un mur de ladite faculté. Et puis, par rapport à d'autres qui ont fait quelques apparitions dans ces histoires, lui au moins a une page wikipedia et une sur Mactutor, ce qui est tout de même un bon indicateur d'une postérité prospère.

Mais trêve de calembours, je vous l'avoue tout net : c'est en fouillant la documentation pour préparer l'histoire de l'analyse, que j'ai découvert son existence. Qu'a-t-il donc écrit de si précieux ?

Charles Méray (1835–1911)

12 Remarques sur la nature des quantités (1869)

« Remarques sur la nature des quantités définies par la condition de servir de limites à des variables données », par Monsieur Charles Méray, professeur à la Faculté des sciences de Dijon.

Voyons un peu :

« La théorie des quantités incommensurables, celle des séries, des quadratures, et en général toutes les parties des mathématiques où il y a lieu de considérer les limites de quantités variables, ont pour fondement essentiel les principes suivants :

Primo. Une quantité variable (comprenez une suite) tend vers une certaine limite, si les termes de cette limite vont toujours soit en augmentant, soit en diminuant, pourvu qu'ils restent dans le premier cas inférieurs, dans le second cas supérieurs à une quantité fixe quelconque. »

Non mais attendez, c'est n'importe quoi ! une suite ne peut converger que si elle est croissante et majorée ou décroissante et minorée ? Euh, oui, mais non, ce n'est pas exactement ce qu'il veut dire. Méray a une manière très personnelle d'exprimer ses mathématiques, ce qui n'a pas aidé à leur diffusion.

Ce qu'il veut dire en fait, c'est qu'un réel, rationnel ou non, peut-être défini comme une classe d'équivalence de suites de Cauchy, dont la différence deux à deux tend vers 0. Sauf que l'exprimer ainsi est un anachronisme complet pour l'époque. Il n'est pas encore question de classes d'équivalence, loin s'en faut.

Écoutez comment Méray présente sa définition trois ans plus tard, dans son manuel d'enseignement.

Remarques sur la nature des quantités (1869)
Charles Méray (1835–1911)

Remarques sur la nature des quantités définies par la condition de servir de limites à des variables données, par M. Charles Méray, professeur à la Faculté des sciences de Dijon.

I. La *théorie* des quantités incommensurables, celle des séries, des quadratures, et en général toutes les parties des mathématiques où il y a lieu de considérer des limites de quantités variables, ont pour fondement essentiel les principes suivants :

1° Une quantité variable v, qui prend successivement les valeurs en nombre indéfini :

$$v_1, v_2, \ldots, v_n \ldots\ldots$$

tend vers une certaine limite, si les termes de cette limite vont toujours soit en augmentant, soit en diminuant, pourvu qu'ils restent dans le premier cas inférieurs, dans le second supérieurs à une quantité fixe quelconque.

13 ce sont des fictions permettant d'énoncer

« Toutefois, on peut convenir de dire au figuré qu'une variante tend vers une limite fictive *incommensurable*, quand elle est convergente et n'a point de limite numériquement assignable. »

Traduisez : une suite de Cauchy qui ne converge pas vers un rationnel, converge vers un irrationnel, par définition.

« Telle est pour nous la nature des nombres incommensurables ; ce sont des fictions permettant d'énoncer d'une manière uniforme et plus pittoresque toutes les propositions relatives aux variables convergentes. »

Pittoresque, Méray lui-même l'était autant que ses fictions. En dehors de sa qualité, ma foi fort louable, de propriétaire viticole à Mercurey en Bourgogne (excusez du peu), Méray était aussi connu pour son caractère épouvantable. On en retrouve la trace savoureuse dans quelques textes qu'il a écrits vers la fin de sa carrière, à propos de l'enseignement des mathématiques.

ce sont des fictions permettant d'énoncer
Méray, Nouveau précis d'analyse infinitésimale (1872)

Toutefois, on peut convenir de dire au figuré qu'une variante tend vers une limite fictive *incommensurable*, quand elle est convergente et n'a point de limite numériquement assignable.

Telle est pour nous la nature des nombres incommensurables ; ce sont des fictions permettant d'énoncer d'une manière uniforme et plus pittoresque toutes les propositions relatives aux variables convergentes.

14 la forme passionnée de mes critiques

« Je veux seulement parler des Mathématiques *classiques* qui ont abreuvé mon enfance de tant de dégoûts, dont mon âge mûr s'est usé à percer de part en part les épaisses ténèbres. À certains yeux sans doute, la forme passionnée de mes critiques est une irrévérence, mais en les écrivant j'entends déjà les applaudissements de leurs victimes, hélas ! trop nombreuses, car ce sont tous ceux qui les ont étudiées. »

Et en conclusion :

la forme passionnée de mes critiques
Méray, Considérations sur l'enseignement des mathématiques (1892)

Je veux seulement parler des Mathématiques *classiques* qui ont abreuvé mon enfance de tant de dégoûts, dont mon âge mûr s'est usé à percer de part en part les épaisses ténèbres. À certains yeux sans doute, la forme passionnée de mes critiques est une irrévérence, mais en les écrivant j'entends déjà les applaudissements de leurs victimes, hélas ! trop nombreuses, car ce sont tous ceux qui les ont étudiées.

15 un devoir de ma modeste charge

« Il en sera ce qu'il pourra, mais j'ai cru remplir un devoir de ma modeste charge, en dénonçant ainsi l'édifice inhospitalier et déplaisant des mathématiques classiques, au public, comme à tout ministre qui serait particulièrement désireux d'élever partout le niveau de cet enseignement et d'en rendre les parties les plus indispensables, pour la première fois vraiment populaires. »

Quelques années après, en réponse à une enquête sur les méthodes de travail des mathématiciens :

un devoir de ma modeste charge
Méray, Considérations sur l'enseignement des mathématiques (1892)

Il en sera ce qu'il pourra, mais j'ai cru remplir un devoir de ma modeste charge, en dénonçant ainsi l'édifice inhospitalier et déplaisant des Mathématiques classiques, au Public, comme à tout Ministre qui serait particulièrement désireux d'élever partout le niveau de cet enseignement et d'en rendre les parties les plus indispensables, pour la première fois vraiment populaires.

16 Celle-ci m'a paru pitoyable

« Bientôt, je me suis aperçu que la géométrie n'est qu'un mythe comme science *pure*, qu'elle n'est que *l'application de l'analyse à l'étude des faits géométriques*, et je ne me suis plus occupé que de l'analyse. Celle-ci m'a paru pitoyable par son décousu, ses procédés, son manque absolu de rigueur, et mes principaux efforts ont tendu à la rendre naturelle, claire et rigoureuse autant que la moindre question d'algèbre élémentaire. Je crois que ces efforts n'ont pas été fournis en pure perte. »

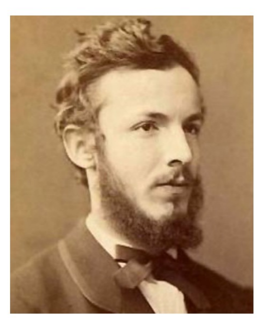
Celle-ci m'a paru pitoyable
Méray, Réponse à une enquête sur les mathématiciens (1906)

Mais bientôt, je me suis aperçu que la géométrie n'est qu'un mythe comme science *pure*, qu'elle n'est que *l'application de l'Analyse à l'étude des faits géométriques*, et je ne me suis plus occupé que de l'Analyse. Celle-ci m'a paru pitoyable par son décousu, ses procédés, son manque absolu de rigueur, et mes principaux efforts ont tendu à la rendre naturelle, claire et rigoureuse autant que la moindre question d'Algèbre élémentaire. Je crois que ces efforts n'ont pas été fournis en pure perte.

17 Georg Cantor (1845–1918)

En lisant ce qui précède, je ne peux pas m'empêcher de penser que Méray se serait bien entendu avec Georg Cantor. En tout cas, ils auraient eu des choses à se dire s'ils s'étaient rencontrés. Parce que la définition des réels comme limites de suites de Cauchy, c'est à Cantor, au lieu de Méray, qu'elle est attribuée.

Georg Cantor (1845–1918)



18 Extension d'un théorème (1872)

Cela vient de cet article : « Extension d'un théorème de la théorie des séries trigonométriques. » L'essentiel de l'article n'est pas dans les séries trigonométriques, mais dans la définition que Cantor donne des nombres réels, comme classe d'équivalence de suites de rationnels.

Extension d'un théorème (1872)
Georg Cantor (1845–1918)

EXTENSION D'UN THÉORÈME DE LA THÉORIE
DES SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES.

PAR

G. CANTOR
À HALLE a. S.

(Traduction d'un mém. publ. d. l. Annales math. de Leipsic t. V. p. 123.)

Je voudrais faire connaître dans ce travail une extension du théorème d'après lequel une fonction ne peut être développée que d'une seule manière en série trigonométrique.

19 La série a une limite déterminée b

Cantor part d'une suite infinie de rationnels $a_1, a_2, \ldots, a_n$ etc., qui vérifie la propriété de Cauchy. Il déclare par définition qu'une telle suite a une limite déterminée b. Il remarque ensuite que deux suites de Cauchy dont la différence tend vers 0 définissent la même limite. Il note enfin grand B l'ensemble de ces limites possibles. Il ne reste plus qu'à étendre les opérations à ce nouvel ensemble grand B, et c'est l'ensemble des réels.

Là où on a plus de mal à le suivre, c'est quand il itère sa construction.

La série a une limite déterminée b
Cantor, Extension d'un théorème de la théorie des séries trigonométriques (1872)

On rencontre une première généralisation de la notion de grandeur numérique dans le cas où l'on a, obtenue par une loi, une série infinie de nombres rationnels:

$$(1) \qquad a_1,\ a_2,\ \ldots\ldots\ a_n,\ \ldots\ldots,$$

constituée de telle sorte que la différence $a_{n+m} - a_n$ devient infiniment petite à mesure que n croît, quel que soit le nombre entier positif m, ou, en d'autres termes, qu'avec ε (positif rationnel) pris arbitrairement on a un nombre entier n_1 tel que $(a_{n+m} - a_n) < \varepsilon$, si $n \geqq n_1$, et si m est un nombre entier positif pris à volonté.

J'exprime ainsi cette propriété de la série (1): »La série (1) a une limite déterminée b«.

20 Les grandeur numériques c constituent le système C

« Le système A a donné naissance au système B ; de même les deux systèmes B et A réunis, donneront naissance, par le même procédé, à un nouveau système C.

Soit en effet une série infinie de nombres choisis dans les systèmes A et B, cette série étant constituée de telle sorte qu'elle possède la propriété de Cauchy je dirai que cette série a une limite indéterminée c. Les grandeurs numériques c constituent le système grand C. »

Et ainsi de suite. Si cela peut vous rassurer, nous ne sommes pas les seuls à ne pas comprendre l'intérêt de cette cascade. Écoutez Dedekind.

Les grandeurs numériques c constituent le système C
Cantor, Extension d'un théorème de la théorie des séries trigonométriques (1872)

Le système A a donné naissance au système B; de même les deux systèmes B et A réunis, donneront naissance, par le même procédé, à un nouveau système C.

Soit en effet une série infinie:

$$(2) \qquad b_1,\ b_2,\ \ldots\ldots\ b_n,\ \ldots\ldots$$

de nombres choisis dans les systèmes A et B et n'appartenant pas tous au système A, et cette série étant constituée de telle sorte que $b_{n+m} - b_n$ devient infiniment petit à mesure que n croît, quel que soit d'ailleurs m (et cette condition, d'après les définitions précédentes, peut se concevoir comme quelque chose de parfaitement déterminé) je dirai que cette série a une limite déterminée c.

Les grandeurs numériques c constituent le système C.

21 Tandis que je rédige cette préface

« Tandis que je rédige cette préface (20 mars 1872), je reçois l'intéressante étude de Cantor « Sur l'extension d'un théorème de la théorie des séries trigonométriques, » [. . .] dont je remercie vivement le pénétrant auteur. Un parcours rapide m'a permis de constater que l'axiome de son paragraphe 2, abstraction faite de la forme extérieure, concorde pleinement avec ce que je désigne dans mon paragraphe 3 comme l'essence de la continuité.

Mais étant donnée justement ma conception même du domaine, complet en soi, des nombres réels, je ne puis encore reconnaître l'utilité qu'il y a à distinguer, ne fût-ce que conceptuellement, des grandeurs numériques réelles d'un genre encore supérieur. »

Dedekind lui ayant envoyé son mémoire, Cantor avait bien vu lui aussi que les deux approches étaient équivalentes.

Tandis que je rédige cette préface

Dedekind, Stetigkeit und Irrationale Zahlen (1872)

Tandis que je rédige cette préface (20 mars 1872), je reçois l'intéressante étude de G. Cantor « Sur l'extension d'un théorème de la théorie des séries trigonométriques, »[. . .] dont je remercie vivement le pénétrant auteur. Un parcours rapide m'a permis de constater que l'axiome de son paragraphe 2, abstraction faite de la forme extérieure, concorde pleinement avec ce que je désigne dans mon paragraphe 3 comme l'essence de la continuité.

Mais étant donnée justement ma conception même du domaine, complet en soi, des nombres réels, je ne puis encore reconnaître l'utilité qu'il y a à distinguer, ne fût-ce que conceptuellement, des grandeurs numériques réelles d'un genre encore supérieur.

22 il n'y a de différence que dans *l'introduction conceptuelle*

« Je vous remercie très vivement pour l'envoi de votre traité sur la continuité et les nombres rationnels. Comme j'avais déjà pu m'en convaincre, le point de vue auquel je suis arrivé sur ce sujet depuis quelques années, à partir de préoccupations d'arithmétique, coïncide en fait avec vos conceptions : il n'y a de différence que dans *l'introduction conceptuelle* des grandeurs numériques. Que vous ayiez bien mis en évidence ce qui constitue l'essence de la continuité, j'en suis absolument convaincu. »

il n'y a de différence que dans *l'introduction conceptuelle*

Lettre de Cantor à Dedekind (28 avril 1872)

Je vous remercie très vivement pour l'envoi de votre traité sur la continuité et les nombres rationnels. Comme j'avais déjà pu m'en convaincre, le point de vue auquel je suis arrivé sur ce sujet depuis quelques années, à partir de préoccupations d'arithmétique, coïncide en fait avec vos conceptions : il n'y a de différence que dans *l'introduction conceptuelle* des grandeurs numériques. Que vous ayiez bien mis en évidence ce qui constitue l'essence de la continuité, j'en suis absolument convaincu.

23 Gersau, canton de Schwyz (Suisse)

Au printemps 1872, quand cet échange a lieu, Cantor et Dedekind ne se connaissent pas encore personnellement. Ils se rencontrent l'été suivant, « par hasard » selon Cantor, au bord du lac des quatre cantons, à Gersau en Suisse.

Gersau, canton de Schwyz (Suisse)

Richard Dedekind (1831–1916), Georg Cantor (1845–1918)

24 Madame et monsieur Cantor

Madame et monsieur Cantor
Vally Guttmann-Cantor (1849–1923), Georg Cantor (1845–1918)

À l'époque, Cantor n'est pas encore marié. Ce sera fait deux ans plus tard, avec une amie de sa sœur, Vally Guttmann. Ils se marient le 9 août 1874, et partent aussitôt en voyage de noces à Interlaken, toujours en Suisse.

25 Interlaken, canton de Bern (Suisse)

Et devinez quoi, Dedekind séjourne aussi à Interlaken : quel hasard tout de même ! Bien sûr les discussions mathématiques vont bon train, et on ignore quelle part la jeune mariée a pu y prendre.

Interlaken, canton de Bern (Suisse)
Lune de Miel des Cantor (fin août - début septembre 1874)

Madame Cantor aura l'élégance de pardonner à son mari sa lune de miel mathématique. Ils auront six enfants.

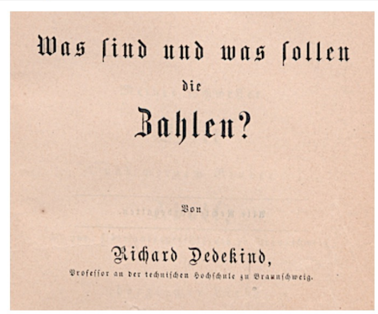
Vingt-cinq ans plus tard, les Cantor fêtent leurs noces d'argent, et Dedekind leur adresse ses félicitations. Cantor remercie, le 26 août 1899, en son nom et celui de son épouse :

« Les jours que nous avons passés avec vous à Interlaken pendant notre lune de miel il y a 25 ans, restent pour toujours dans notre mémoire. »

Ils restent aussi dans l'histoire des mathématiques. Parce qu'après avoir construit les réels et défini la continuité, il restait encore d'autres étapes à accomplir.

26 Was sind und was sollen die Zahlen ? (1888)

Was sind und was sollen die Zahlen ? (1888)
Richard Dedekind (1831–1916)



Was sind und was sollen
die
Zahlen?

Von

Richard Dedekind,
Professor an der technischen Hochschule zu Braunschweig.

L'une d'elles est la définition axiomatique des entiers naturels. Dedekind le fait dans ce mémoire : « Que sont et que doivent être les nombres ». Il avait commencé à le rédiger dès 1872.

27 Ueber unendliche Punktmannichfaltigkeiten (1883)

Quant à Cantor, sa construction des réels est le point de départ d'une réflexion sur les ensembles des nombres, qui le conduira à développer sa théorie des cardinaux infinis. Il le fait dans une série de six articles parus aux Annales Mathématiques de Leipzig entre 1879 et 84.

Ils sont intitulés « Sur les variétés de points, linéaires et infinies ». Celui-ci est le cinquième.

Ueber unendliche Punktmannichfaltigkeiten (1883)
Georg Cantor (1845–1918)

Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten.

Von

Georg Cantor in Halle.

(Fortsetzung des Artikels in Bd. XXI, pag. 51.)

5.

§ 1.

Die bisherige Darstellung meiner Untersuchungen in der Mannichfaltigkeitslehre [1]) ist an einen Punkt gelangt, wo ihre Fortführung von einer Erweiterung des realen ganzen Zahlbegriffs über die bisherigen Grenzen hinaus abhängig wird, und zwar fällt diese Erweiterung in eine Richtung, in welcher sie meines Wissens bisher von Niemandem gesucht worden ist.

28 Fondements d'une théorie générale des ensembles (1883)

Le traducteur français a décidé de changer le titre en « Fondements d'une théorie générale des ensembles ». L'article débute ainsi.

« Dans l'exposition de mes recherches sur la théorie des ensembles, je suis maintenant arrivé à un point où il me faut développer une généralisation de nombre entier réel, et ce développement m'entraîne dans une direction où personne, à ma connaissance, ne s'est engagé jusqu'à présent. »

Fondements d'une théorie générale des ensembles (1883)
Georg Cantor (1845–1918)

FONDEMENTS D'UNE THÉORIE GÉNÉRALE
DES ENSEMBLES

PAR

G. CANTOR
À HALLE a. S.

(Extrait d'un article des Annales mathématiques de Leipsic, t. XXI, pag. 545.)

§ 1.

Dans l'exposition de mes recherches sur la théorie des ensembles, je suis maintenant arrivé à un point où il me faut développer une généralisation de la notion de nombre entier réel, et ce développement m'entraîne dans une direction où personne, à ma connaissance, ne s'est engagé jusqu'à présent.

29 références

Mais ce n'est pas vraiment la peine de l'y suivre puisque je vous en parle ailleurs. Et puis j'ai décidé arbitrairement que la construction des entiers et la théorie des ensembles feraient partie de l'histoire de la logique plutôt que de l'analyse. C'est comme ça et pas autrement. Après tout j'ai forcément raison puisque c'est moi qui raconte !

Allons bon, voilà que Méray devient contagieux maintenant.

références

- V. Cossart (2005) Conte de la Saint-Vincent, *Gazette des mathématiciens*, 103, 52–56
- R. Dedekind (2008) *La création des nombres, H. Benis Sinaceur trad.*, Paris : Vrin
- P. Dugac (1970) Charles Méray (1835–1911) et la notion de limite, *Revue d'histoire des sciences et de leurs applications*, 23(4), 333–350
- P. Dugac (1976) *Richard Dedekind et les fondements des mathématiques*, Paris : Vrin
- J. Ferreirós (1993) On the relations between Georg Cantor and Richard Dedekind, *Historia Mathematica*, 20, 343–363
- K. Rychlík (1961) La théorie des nombres réels dans un ouvrage posthume manuscrit de Bernard Bolzano, *Revue d'histoire des sciences et de leurs applications*, 14(3-4), 317–327