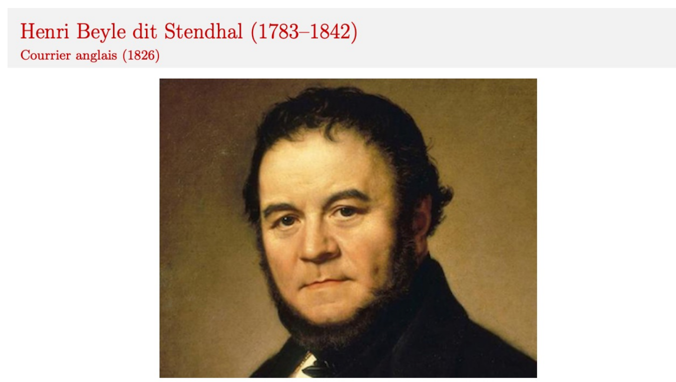
0 Le rossignol et les chenilles

Nous allons, une fois de plus, nous livrer à une activité trop fréquente dans ces histoires : le Cauchy bashing. Nous allons dire du mal du plus grand des mathématiciens français. Mais cette fois-ci, après avoir comme d'habitude, bêtement ricané, nous nous poserons une question toute simple : pourquoi est-il considéré comme le plus grand ?

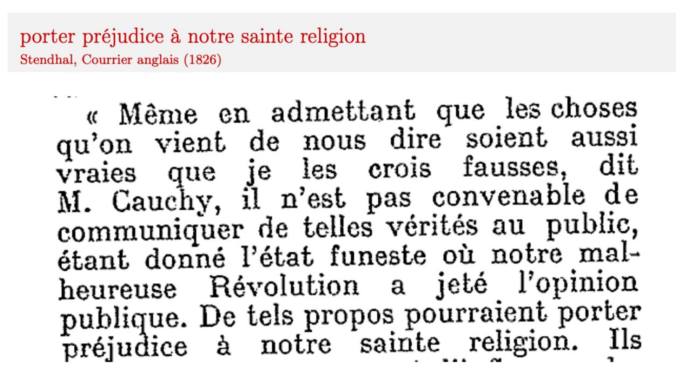
1 Henri Beyle dit Stendhal (1783–1842)



Notre première mauvaise langue est coutumier des faits : c'est Stendhal. Il a quelques raisons idéologiques de s'opposer à Cauchy, mais il a surtout quelques raisons bassement financières de faire rire les lecteurs britanniques des revues qui lui paient ses articles. Cela donne des chroniques savoureuses qui ont été publiées plus tard sous le nom de « courrier anglais ». Écoutez-le raconter une séance à l'Académie des sciences. Elle se déroule en octobre 1826.

« Il y a quelque temps, un naturaliste, dont je tais le nom de peur de lui nuire, a lu un mémoire sur les phénomènes qui peuvent être observés dans la vie de certains insectes. Le sujet, en lui-même d'un autre intérêt, était traité d'une façon fort spirituelle. À la fin de sa lecture, on entendit un murmure d'approbation, sur quoi M. Cauchy se leva et fit remarquer que l'Académie ne devait pas honorer de ses applaudissements ce curieux exposé de la vie animale. »

2 porter préjudice à notre sainte religion



« Même en admettant que les choses qu'on vient de nous dire soient aussi vraies que je les crois fausses, dit M. Cauchy, il n'est pas convenable de communiquer de telles vérités au public, étant donné l'état funeste où notre malheureuse Révolution a jeté l'opinion publique. De tels propos pourraient porter préjudice à notre sainte religion. Ils

« Même en admettant que les choses qu'on vient de nous dire soient aussi vraies que je les crois fausses, » dit M. Cauchy, « il n'est pas convenable de communiquer de telles vérités au public, étant donné l'état funeste où notre malheureuse Révolution a jeté l'opinion publique. De tels propos pourraient porter préjudice à notre sainte religion. »

Stendhal poursuit :

3 Augustin-Louis Cauchy (1789–1857)

« On accueillit avec de grands rires les paroles de M. Cauchy[...]. Ce brave homme, qui est fort entreprenant et qui semble bien vouloir être un martyr du mépris, a demandé à la séance de lundi dernier que l'Académie retire de sa bibliothèque tout livre teinté d'esprit philosophique. Jusqu'ici l'Académie n'a pas osé répondre à la demande de M. Cauchy. »

À l'époque, Cauchy est encore jeune, comme sur cette gravure de Boilly. Comme Abel l'écrit à peu près au même moment à un ami : « Cauchy est extrêmement catholique et bigot. Chose bien étrange pour un mathématicien. »

Oui : Cauchy est croyant, royaliste fervent, et il le restera toute sa vie. Il est né au début de la Révolution, et il est possible qu'il ait été traumatisé par la peur de son père pendant la Terreur. Mais ce même père a su écrire des poèmes à la gloire de Napoléon comme de Louis XVIII. Le fils lui, n'a pas ce genre de souplesse. Voici un portrait peu flatteur paru dans un dictionnaire biographique en 1828.

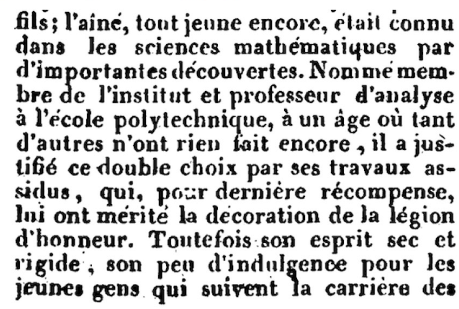
Augustin-Louis Cauchy (1789–1857)
Cauchy par Jules Boilly (ca. 1825)

4 son esprit sec et rigide

« L'aîné, tout jeune encore, était connu dans les sciences mathématiques par d'importantes découvertes. Nommé membre de l'Institut et professeur d'analyse à l'École polytechnique, il a justifié ce double choix par des travaux assidus, qui, pour dernière récompense, lui ont mérité la décoration de la légion d'honneur.

Toutefois, son esprit sec et rigide, son peu d'indulgence pour les jeunes gens qui suivent la carrière des sciences, »

son esprit sec et rigide
Gallerie historique des contemporains : Cauchy (1828)



fils; l'aîné, tout jeune encore, était connu dans les sciences mathématiques par d'importantes découvertes. Nommé membre de l'institut et professeur d'analyse à l'école polytechnique, à un âge où tant d'autres n'ont rien fait encore, il a justifié ce double choix par ses travaux assidus, qui, pour dernière récompense, lui ont mérité la décoration de la légion d'honneur. Toutefois son esprit sec et rigide, son peu d'indulgence pour les jeunes gens qui suivent la carrière des

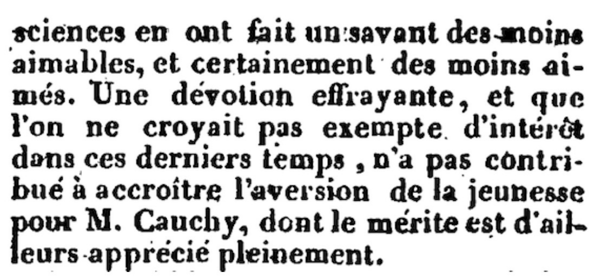
5 une dévotion effrayante

« en ont fait un savant des moins aimables, et certainement des moins aimés. Une dévotion effrayante, et que l'on ne croyait pas exempte d'intérêt dans ces derniers temps, n'a pas peu contribué à accroître l'aversion de la jeunesse pour M. Cauchy, dont le mérite est d'ailleurs apprécié pleinement. »

Petite explication de texte : Cauchy a été nommé professeur à l'École polytechnique au début de la restauration. Il profitait de l'éviction de Monge, ami de Napoléon, à qui l'école et ses élèves devaient beaucoup. Pour couronner le tout, deux places ayant été libérées par l'épuration à l'Académie des sciences, celles de Monge et de Carnot, Cauchy avait été nommé à l'Institut par décret, et non élu comme cela s'était toujours fait. Beaucoup avaient considéré qu'il devait ces promotions à ses opinions plutôt qu'à son mérite. En tout cas les élèves de l'École polytechnique ne le lui avaient pas pardonné, et il n'avait rien fait pour se les concilier.

Le 12 avril 1821, quelques élèves l'avaient même sifflé et hué à la fin de son cours, ce dont il s'était plaint à la direction de l'école. Le rapport que le gouverneur avait bien été obligé d'adresser au ministre, ne défendait pas vraiment Cauchy.

une dévotion effrayante
Gallerie historique des contemporains : Cauchy (1828)



sciences en ont fait un savant des moins aimables, et certainement des moins aimés. Une dévotion effrayante, et que l'on ne croyait pas exempte d'intérêt dans ces derniers temps, n'a pas contribué à accroître l'aversion de la jeunesse pour M. Cauchy, dont le mérite est d'ailleurs apprécié pleinement.

6 ce professeur retient les élèves

« Tantôt ce professeur retient les élèves plus d'une heure et demie, tantôt il emploie la partie de ce temps consacrée aux interrogations, à des explications nouvelles, quoiqu'il soit bien reconnu que, pour des matières aussi abstraites que l'analyse, les démonstrations du professeur ne doivent durer qu'une heure [. . .] Ces jeunes gens connaissent en outre par les programmes le nombre des leçons déterminées pour chaque cours, et ils voient qu'au lieu de se renfermer dans cinquante leçons, M. Cauchy en est déjà à la soixante-cinquième et qu'il lui en faudra peut-être encore deux ou trois pour finir l'analyse. »

Le paradoxe est que le « Cours d'analyse à l'école polytechnique, » dont il s'agit, publié cette même année 1821, est celui que je vous cite souvent : il a servi de modèle à de nombreux mathématiciens du siècle, à commencer par Abel.

En plus de retenir les élèves, et de leur imposer des séances supplémentaires, il y avait plus grave : la plupart d'entre eux ne comprenaient rien à l'enseignement de Cauchy : seuls les tout meilleurs pouvaient en profiter.

Écoutez le témoignage de l'un d'eux. Nous sommes quelques années plus tard à Turin, où Cauchy s'est exilé pour avoir refusé de prêter serment à Louis-Philippe après les trois glorieuses. Le roi de Piémont-Sardaigne Charles-Albert lui a offert une chaire, et la renommée de Cauchy a attiré un bon nombre d'auditeurs ; au moins au début.

ce professeur retient les élèves

Rapport du Baron Bouchu, gouverneur de l'École polytechnique (mai 1821)

Tantôt ce professeur retient les élèves plus d'une heure et demie, tantôt il emploie la partie de ce temps consacrée aux interrogations, à des explications nouvelles, quoiqu'il soit bien reconnu que, pour des matières aussi abstraites que l'analyse, les démonstrations du professeur ne doivent durer qu'une heure [. . .] Ces jeunes gens connaissent en outre par les programmes le nombre des leçons déterminées pour chaque cours, et ils voient qu'au lieu de se renfermer dans cinquante leçons, M. Cauchy est déjà à la soixante-cinquième et qu'il lui en faudra peut-être encore deux ou trois pour finir l'analyse.

7 un nuage obscur parfois illuminé

« Il était toute confusion, passant tout d'un coup d'une idée, d'une formule à l'autre, sans trouver le chemin de la transition. Son enseignement était un nuage obscur parfois illuminé par des éclairs de génie, mais il était fatigant pour des jeunes élèves, aussi bien peu purent le suivre jusqu'au bout et de trente que nous étions au début du cours, je restais le dernier sur la brèche. »

Je vous rappelle que ce « dernier sur la brèche », Menabrea, sera une dizaine d'années plus tard l'auteur du tout premier article d'informatique de l'histoire, celui qui décrit la machine de Babbage.

un nuage obscur parfois illuminé

Luigi Federico Menabrea (1809–1896)

Il était toute confusion, passant tout d'un coup d'une idée, d'une formule à l'autre, sans trouver le chemin de la transition. Son enseignement était un nuage obscur parfois illuminé par des éclairs de génie, mais il était fatigant pour des jeunes élèves, aussi bien peu purent le suivre jusqu'au bout et de trente que nous étions au début du cours, je restais le dernier sur la brèche.

8 789 mémoires !

Avant de nous demander pourquoi Cauchy est le plus grand mathématicien français, constatons qu'il est le plus prolifique. D'après le décompte de son biographe Valson, outre d'une dizaine de volumes totalisant quelques milliers de pages, Cauchy est l'auteur d'une quantité impressionnante de mémoires : 789 ! Seuls Euler et Cayley ont fait plus. Certains de ses collègues ont osé parler de diarrhée. Il a fallu modifier le règlement des comptes-rendus de l'Académie des sciences. Écoutez ce qu'en disait Jean-Baptiste Biot, au beau milieu de l'avalanche.

789 mémoires !

C.-A. Valson, La vie et les travaux du Baron Cauchy (1868)

MÉMOIRES.

Sept cent quatre-vingt-neuf Mémoires, Rapports, Notes, etc., répartis comme il suit :

Mémoires détachés	18
Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences	549
Mémoires de l'Institut	23
Mémoires des savants étrangers	3
Journal de l'École Polytechnique	14
Annales de Gergonne	4
Bulletin Férussac	15
Bulletin de la Société Philomathique	15
Journal de M. Liouville	7

MÉMOIRES PUBLIÉS EN CORPS D'OUVRAGE :

* Anciens *Exercices de Mathématiques*	88
** Nouveaux *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique*	53
Total	789

9 le seul qui puisse en profiter

« Un géomètre assurément très-habile, a profité de l'opportunité des comptes-rendus pour publier, presque dans chaque numéro, une série de mémoires entiers, hérissés de symboles, sans connexion entre eux, reproduisant plusieurs fois les mêmes résultats ou les mêmes idées sous diverses formes, à mesure qu'elles se présentent à son esprit ; brisés aussi de renvois qui se rapportent à une multitude de publications éparses ; de sorte qu'aujourd'hui, s'ils se correspondent dans la pensée de l'auteur, comme je n'en fais aucun doute, il semblerait devoir être à peu près le seul qui puisse en profiter, ou qui soit capable d'en suivre le fil. »

Trente ans plus tard, Joseph Bertrand en parlait à peu près dans les mêmes termes.

le seul qui puisse en profiter
J.-B. Biot, Journal des Savants (novembre 1842)

Un géomètre assurément très-habile, a profité de l'opportunité des comptes rendus pour publier, presque dans chaque numéro, une série de mémoires entiers, hérissés de symboles, sans connexion entre eux, reproduisant plusieurs fois les mêmes résultats ou les mêmes idées sous diverses formes, à mesure qu'elles se présentent à son esprit ; brisés aussi de renvois qui se rapportent à une multitude de publications éparses ; de sorte qu'aujourd'hui, s'ils se correspondent dans la pensée de l'auteur, comme je n'en fais aucun doute, il semblerait devoir être à peu près le seul qui puisse en profiter, ou qui soit capable d'en suivre le fil.

10 La dangereuse facilité d'une publicité immédiate

« Le génie de Cauchy est digne de tous nos respects ; mais pourquoi s'abstenir de rappeler que la trop grande abondance de ses travaux, en diminuant souvent leur précision, en a plus d'une fois caché la force ? La dangereuse facilité d'une publicité immédiate a été pour Cauchy une tentation irrésistible et souvent un écueil. Son esprit, toujours en mouvement, apportait chaque semaine à l'Académie ses travaux à peine ébauchés, des projets de mémoire et des tentatives parfois infructueuses, et, lors même qu'une brillante découverte devait couronner ses efforts, il forçait le lecteur à le suivre dans les voies souvent stériles essayées et abandonnées tour à tour sans que rien vînt l'en avertir. »

À en croire Biot et Bertrand, ce n'est donc pas le nombre des mémoires qui place Cauchy au firmament des mathématiques. Écoutez le même Bertrand exprimer son admiration sincère.

La dangereuse facilité d'une publicité immédiate
J. Bertrand, Revue Bibliographique (1870)

Le génie de Cauchy est digne de tous nos respects ; mais pourquoi s'abstenir de rappeler que la trop grande abondance de ses travaux, en diminuant souvent leur précision, en a plus d'une fois caché la force ? La dangereuse facilité d'une publicité immédiate a été pour Cauchy une tentation irrésistible et souvent un écueil. Son esprit, toujours en mouvement, apportait chaque semaine à l'Académie ses travaux à peine ébauchés, des projets de Mémoire et des tentatives parfois infructueuses, et, lors même qu'une brillante découverte devait couronner ses efforts, il forçait le lecteur à le suivre dans les voies souvent stériles essayées et abandonnées tour à tour sans que rien vînt l'en avertir.

11 une intégrale prise entre des limites imaginaires

« La définition d'une intégrale prise entre des limites imaginaires, sa valeur indépendante de la route suivant laquelle on l'intègre, son changement brusque lorsque cette route franchit certains points pour lesquels la fonction devient infinie ou mal déterminée, les conséquences relatives au calcul des intégrales définies, aux racines des équations, au développement en séries et à la périodicité des intégrales, forment une chaîne de vérités nouvelles que l'on ne saurait trop admirer, et dont il faut renoncer à louer dignement la découverte ; aucun géomètre, à aucune époque, n'a fait faire à l'Analyse pure un progrès plus considérable. »

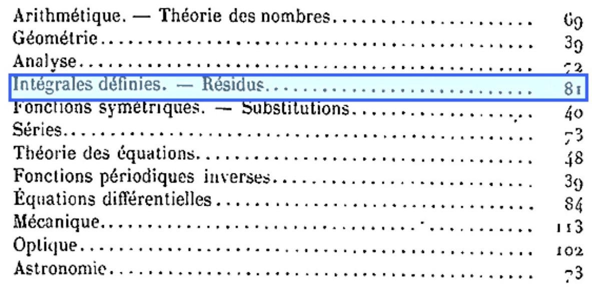
une intégrale prise entre des limites imaginaires
J. Bertrand, Revue Bibliographique (1870)

aux progrès de la science analytique. La définition d'une intégrale prise entre des limites imaginaires, sa valeur indépendante de la route suivant laquelle on intègre, son changement brusque lorsque cette route franchit certains points pour lesquels la fonction devient infinie ou mal déterminée, les conséquences relatives au calcul des intégrales définies, aux racines des équations, au développement en séries et à la périodicité des intégrales, forment une longue chaine de vérités nouvelles que l'on ne saurait trop admirer, et dont il faut renoncer à louer dignement la découverte ; aucun géomètre, à aucune époque, n'a fait faire à l'Analyse pure un progrès plus considérable.

12 Mémoires par sujets

Mémoires par sujets

C.-A. Valson, La vie et les travaux du Baron Cauchy (1868)



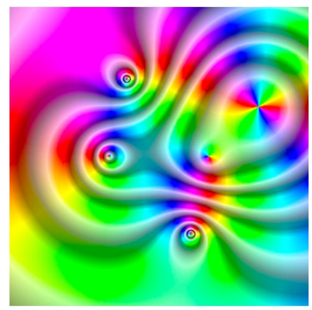
Arithmétique. — Théorie des nombres	69
Géométrie	39
Analyse	72
Intégrales définies. — Résidus	81
Fonctions symétriques. — Substitutions	40
Séries	73
Théorie des équations	48
Fonctions périodiques inverses	39
Équations différentielles	84
Mécanique	113
Optique	102
Astronomie	73

Bertrand a raison : s'il y a bien une théorie qui force le respect, c'est celle des fonctions d'une variable complexe. Plus que les 102 mémoires d'optique ou les 113 mémoires de mécanique, les 81 mémoires sur les intégrales définies et les résidus, méritent que l'on se souvienne de leur auteur. Oh, certes pas tous les 81. Comme l'a expliqué Bertrand, il y a parmi eux beaucoup de redites, d'erreurs et de contradictions.

13 Représentation de $z \mapsto \frac{(z^2-1)(z-2-\mathrm{i})^2}{z^2+2+2\mathrm{i}}$

Représentation de $z \mapsto \frac{(z^2-1)(z-2-\mathrm{i})^2}{z^2+2+2\mathrm{i}}$

Jan Winnicki (2010)



Il n'en reste pas moins que Cauchy a défriché un terrain qui s'est révélé extrêmement fertile. C'est à lui que nous devons la caractérisation de ce que nous appelons les fonctions holomorphes ; leur développement en série de Taylor, c'est-à-dire l'analyticité ; le fait que l'intégrale d'une telle fonction le long d'un contour fermé est nulle ; la définition des pôles et des résidus ; le théorème de Cauchy donnant la valeur d'une intégrale lorsque le contour englobe des pôles : tout ce que nous enseignons encore dans ce domaine, sans oublier les innombrables applications aux calculs d'intégrales indéfinies pour des fonctions d'une variable réelle.

Tout cela bien sûr, sans disposer d'aucun des outils informatiques qui donnent d'aussi belles visualisations d'une fonction dans le plan complexe, en traduisant le module par l'intensité et l'argument par la couleur.

14 Controverse sur les logarithmes

Controverse sur les logarithmes

Johann Bernoulli (1667–1748), Gottfried Leibniz (1646–1716)

Comme vous avez déjà écouté d'autres histoires avant celle-ci, vous vous doutez bien que Cauchy n'a pas tout inventé. La théorie des fonctions d'une variable complexe avait débuté bien avant lui. Elle a commencé par une controverse célèbre autour des logarithmes de nombres négatifs, qui a opposé Jean Bernoulli à Leibniz.

15 problème concernant le calcul intégral (1702)

Vous vous souvenez qu'au début de l'analyse des infinitésimaux, Newton, Leibniz, Bernoulli et les autres ne se préoccupaient pas beaucoup des justifications rigoureuses. Regardez ce qu'on lit à la fin de l'article de 1702 où Jean Bernoulli explique comment calculer des primitives de fractions rationnelles.

« Pour transformer la différentielle a dz sur $b^2 - z^2$ en une différentielle logarithmique a dt sur $2bt$, posez $z = (t-1)/(t+1)$ fois b. Et avec le même changement, vous transformerez la différentielle a dz sur b^2+z^2 en une différentielle de logarithme imaginaire. »

Ah bon ? Et c'est quoi au juste un logarithme imaginaire ? Dix ans plus tard, ni Bernoulli, ni même Leibniz ne le savent. Cela donne cet échange aigre-doux, plutôt savoureux.

problème concernant le calcul intégral (1702)
Johann Bernoulli (1667–1748)

PROBL. I. Transformer la différentielle $\frac{a\,dz}{bb-zz}$ en une différentielle Logarithmique $\frac{a\,dt}{2bt}$, & réciproquement.

Faites $z = \frac{t-1}{t+1} \times b$, & vous aurez $\frac{a\,dz}{bb-zz} = \frac{a\,dt}{2bt}$. Réciproquement prenez $t = \frac{+z+b}{-z+b}$, & vous aurez $\frac{a\,dt}{2bt} = \frac{a\,dz}{bb-zz}$.

Corol. On transformera de même la différentielle $\frac{a\,dz}{bb+zz}$ en $\frac{-a\,dt}{2bt\sqrt{-1}}$ différentielle de Logarithme imaginaire; & réciproquement.

16 aucun logarithme ne répond à ce rapport

Leibniz pense que les logarithmes de nombres négatifs n'existent pas. En mars 1712, il écrit à Bernoulli :

« Si on peut dire que -1 et des expressions semblables signifient moins que rien, cependant on ne peut leur donner d'autre rapport qu'imaginaire. Donc les rapports de 1 à -1 et de -1 à 1 sont imaginaires. De ceci, entre autres, je prouve qu'aucun logarithme ne répond à ce rapport ou à un semblable. »

Ce à quoi Bernoulli rétorque :

aucun logarithme ne répond à ce rapport
Leibniz à Jean Bernoulli (mars 1712)

que ; etsi possit dici -1 & similes expressiones significare nihilo minora, non tamen dari rationes nisi imaginarias, quarum antecedens aut consequens sit quantitas nihilo minor, seu rationem -1 ad 1, vel 1 ad -1 esse imaginariam. Quod inter alia ex eo probo, quia huic rationi vel simili nullus respondet Logarithmus.

17 la différentielle du logarithme

« Je ne suis pas d'accord avec toi lorsque tu dis que le rapport de -1 à 1 est imaginaire et que tu en déduis qu'aucun logarithme ne correspond à ce rapport. Je prouve le contraire comme suit. Je dis que $\log(x)$ correspond à x comme à $-x$, c'est-à-dire $\log(-x) = \log(x)$. On obtient la différentielle du logarithme en divisant la différentielle du nombre par ce même nombre. Or dx sur x est égal $-$dx sur $-x$. Donc $\log(-x) = \log(x)$. »

Cet argument agace un peu Leibniz : après tout c'est bien lui l'inventeur des différentielles, non ?

la différentielle du logarithme
Jean Bernoulli à Leibniz (25 mai 1712)

Non prorsus Tecum sentio, rationem -1 ad 1, vel 1 ad -1 esse imaginariam, ex eo quod huic rationi nullus respondeat Logarithmus ; supponis enim numerum negativum nullum habere Logarithmum ; cujus contrarium ego sic probo. Esto x numerus variabilis, per infinite parva crescens, cujus Logarithmus sit lx ; dico eumdem lx respondere ipsi $-x$, æque ac ipsi $+x$: hoc est $lx = l-x$: Nam scis dlx esse $= dx : x$, hoc est differentiale alicujus Logarithmi haberi dividendo differentiale numeri per ipsum numerum ; cum itaque $dx : x$ sit $= -dx : -x$; patet propositum. Ecce rei connexionem $dlx = dx : x = -dx : -x = dl-x$: Ergo etiam $lx = l-x$: Unde vides, (*Fig.* 118.) curvam Loga-

18 avec ta pénétration d'esprit

« Je m'étonne que toi, avec ta pénétration d'esprit, tu ne vois pas qu'on ne peut pas donner de logarithme à -2, parce qu'on ne peut pas donner de logarithme à $\sqrt{-2}$, qui est la moitié du précédent. Mais, dis-tu, la différentielle du nombre $-x$, qui est $-\mathrm{d}x$, divisée par le nombre $-x$ donnera un élément logarithmique $-\mathrm{d}x$ sur $-x$ ou $\mathrm{d}x$ sur x. Mais cette règle, que la différentielle divisée par le nombre donne la différentielle du logarithme et n'importe quoi d'autre sur la nature et la construction des logarithmes, n'a pas lieu pour les nombres négatifs. »

avec ta pénétration d'esprit

Leibniz à Jean Bernoulli (30 juin 1712)

Miror Te, pro acumine Tuo, non vidisse, haud posse dari Logarithmum τῷ -2, quia non potest dari Logarithmus τῷ $\sqrt{-2}$, qui esset prioris dimidius. At dicis; differentiale numeri $-x$, quod est $-dx$ divisum per numerum $-x$ dabit elementum logarithmicum $-dx : -x$, seu $dx : x$. Sed hæc regula, quod differentiale divisum per numerum dat differentiale Logarithmi, & quævis alia de Logarithmorum natura & constructione non habet locum in numeris negativis, ut reperies, ubi demonstrare voles.

19 De la controverse entre Mrs. Leibnitz et Bernoulli (1751)

Il faudra attendre le milieu du siècle pour savoir vraiment ce qu'est un logarithme. Euler, après avoir traité à fond l'exponentielle complexe, et reconnu sa périodicité, comprend que le logarithme qui en est la réciproque, ne peut pas être unique : tout nombre a une infinité de logarithmes, et seuls les réels positifs ont parmi leurs logarithmes un nombre réel.

Dans l'article que vous voyez, « De la controverse entre Messieurs Leibniz et Bernoulli sur les logarithmes des nombres négatifs et imaginaires », Euler prend la peine de détailler les différents arguments de l'un et de l'autre, puis d'expliquer l'apparent paradoxe des logarithmes multiples.

De la controverse entre Mrs. Leibnitz et Bernoulli (1751)

Leonard Euler (1707–1783)

DE LA CONTROVERSE ENTRE *Mrs. LEIBNITZ & BERNOULLI*

SUR LES LOGARITHMES

DES NOMBRES

NEGATIFS ET IMAGINAIRES.

PAR M. EULER.

20 Jean le Rond dit d'Alembert (1717–1783)

Jean le Rond dit d'Alembert (1717–1783)

Vous ne pensez tout de même pas qu'il a convaincu tout le monde ? Vous devinez qui va continuer à soutenir l'opinion de Bernoulli, contre toute raison ? D'Alembert bien sûr, comme d'habitude !

On sentirait presque une pointe d'agacement chez Euler. Voici ce qu'il écrit à Maupertuis, en février 1757.

21 l'article *prétention* dans l'*Encyclopédie*

« Il avait prétendu aussi que j'insérasse de nouvelles déclarations sur quantité d'articles que je lui avais volé. Mais ma patience est poussée à bout, et je lui ai fait répondre que je n'en ferais rien, et qu'il puisse publier lui-même ses prétentions partout où il veut, et que je ne m'y opposerais point. Il aura de quoi remplir l'article de *prétention* dans l'*Encyclopédie.* »

De fait l'opposition de d'Alembert, n'empêchera jamais Euler de poursuivre sa cueillette miraculeuse de formules.

l'article *prétention* dans l'*Encyclopédie*

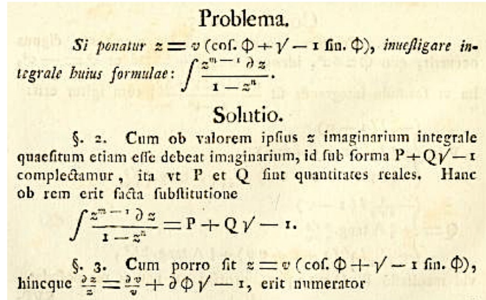
Euler, Lettre à Maupertuis (février 1757)

Il avoit prétendu aussi que j'insérasse de nouvelles déclarations sur quantité d'articles que je lui avois volé. Mais ma patience est poussée à bout, et je lui ai fait répondre que je n'en ferois rien, et qu'il puisse publier lui-même ses prétentions par tout où il veut, et que je ne m'y opposerois point. Il aura de quoi remplir l'article de *prétention* dans l'*Encyclopédie.*

22 circa integrationem formulae (1777)

Comme par exemple dans cet article de 1777 où il se pose le problème d'écrire sous forme de module et argument la variable complexe z dans l'intégrale de z puissance $m-1$ sur $1-z^n$. Que signifie exactement pour lui l'intégrale complexe ? Comment justifie-t-il le changement de variable ? Quel sens donne-t-il à la dérivée logarithmique sur la dernière ligne ? Lui-même n'en est pas très sûr, mais il sait bien que les résultats auxquels il parvient avec ces manipulations sont corrects. Il a 70 ans. Il termine l'article par une phrase émouvante : « Je ne doute pas de proposer à la sagacité des géomètres à venir, le soin d'établir ces calculs sur des bases fermes et solides ».

circa integrationem formulae (1777)
Leonard Euler (1707–1783)



Problema.

Si ponatur $z = v(\cos.\Phi + \sqrt{-1}\sin.\Phi)$, *inuestigare integrale huius formulae:* $\int \frac{z^{m-1}\partial z}{1-z^n}$.

Solutio.

§. 2. Cum ob valorem ipsius z imaginarium integrale quaesitum etiam esse debeat imaginarium, id sub forma $P+Q\sqrt{-1}$ complectamur, ita vt P et Q sint quantitates reales. Hanc ob rem erit facta substitutione

$$\int\frac{z^{m-1}\partial z}{1-z^n} = P + Q\sqrt{-1}.$$

§. 3. Cum porro sit $z = v(\cos.\Phi + \sqrt{-1}\sin.\Phi)$, hincque $\frac{\partial z}{z} = \frac{\partial v}{v} + \partial\Phi\sqrt{-1}$, erit numerator

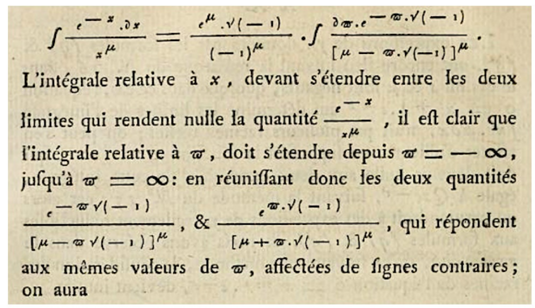
23 Mémoire sur les approximations des formules (1782)

Euler n'est pas le seul à effectuer des changements de variables imaginaires. Laplace, qui utilise souvent des intégrales contenant une exponentielle négative (ce que nous appelons la transformée de Laplace), trouve commode également de passer en complexe.

Voyez dans cet article de 1782 comment il transforme l'intégrale de e^{-x} sur x^{μ}, par le changement de variable x devient $-\mu$ plus $\omega\sqrt{-1}$, c'est-à-dire pour nous $-\mu+\omega i$. Il précise que comme x varie entre les deux valeurs qui annulent la fonction, c'est-à-dire 0 et $+\infty$, ω doit varier de $-\infty$ à $+\infty$. On est bien en présence d'une fonction d'une variable complexe, que l'on intègre sur une droite du plan complexe.

Laplace lui-même n'est pas dupe. Il dit : « On peut considérer ces passages du réel à l'imaginaire comme des moyens de découvertes semblables à l'induction dont les géomètres font depuis longtemps usage. Mais ces moyens, quoique employés avec beaucoup de précaution et de réserve, laissent toujours à désirer des démonstrations de leurs résultats. »

Mémoire sur les approximations des formules (1782)
Pierre-Simon Laplace (1749–1827)



$$\int \frac{c^{-x}.\partial x}{x^\mu} = \frac{c^\mu.\sqrt{(-1)}}{(-1)^\mu}.\int\frac{\partial\varpi.c^{-\varpi.\sqrt{(-1)}}}{[\mu-\varpi.\sqrt{(-1)}]^\mu}.$$

L'intégrale relative à x, devant s'étendre entre les deux limites qui rendent nulle la quantité $\frac{c^{-x}}{x^\mu}$, il est clair que l'intégrale relative à ϖ, doit s'étendre depuis $\varpi = -\infty$, jusqu'à $\varpi = \infty$: en réunissant donc les deux quantités $\frac{c^{-\varpi\sqrt{(-1)}}}{[\mu-\varpi\sqrt{(-1)}]^\mu}$, & $\frac{c^{\varpi.\sqrt{(-1)}}}{[\mu+\varpi.\sqrt{(-1)}]^\mu}$, qui répondent aux mêmes valeurs de ϖ, affectées de signes contraires; on aura

24 Siméon Denis Poisson (1781–1840)

Un qui ne croit pas beaucoup à cette induction, c'est Siméon Denis Poisson. Élève brillant de l'École polytechnique de 1798 à 1800, il avait eu comme professeurs Laplace et Lagrange, qui avaient immédiatement détecté ses dons, et l'avaient fortement poussé et encouragé. Grâce à la recommandation de Laplace, Poisson avait été nommé répétiteur, puis professeur à l'École polytechnique. Le mémoire qu'il publie en 1811 peut être compris à la lumière de ses relations amicales avec Laplace. Écoutez le début.

Siméon Denis Poisson (1781–1840)
Sur les intégrales définies (1811)

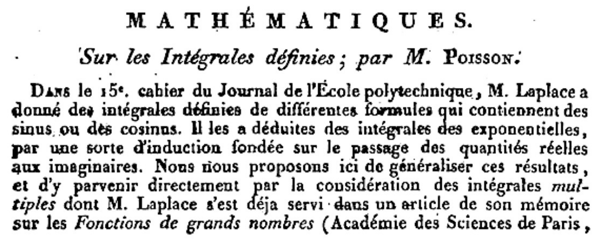
25 le passage des quantités réelles aux imaginaires

« M. Laplace a donné des intégrales définies de différentes formules qui contiennent des sinus ou des cosinus. Il les a déduites des intégrales des exponentielles, par une sorte d'induction fondée sur le passage des quantités réelles aux imaginaires. Nous nous proposons ici de généraliser ces résultats, et d'y parvenir directement par la considération des intégrales *multiples* dont M. Laplace s'est déjà servi dans un article de son mémoire sur les *Fonctions de grands nombres.* »

Donc cette induction du réel au complexe dont Laplace s'était servi sans trop y croire, Poisson a réussi à la remplacer par des manipulations d'intégrales doubles parfaitement rigoureuses, qui de plus, donnent des résultats plus généraux.

Trois ans plus tard, Cauchy soumet à l'Académie son propre mémoire sur les intégrales définies, qui donne un sens rigoureux aux intégrales imaginaires, justifiant ainsi les calculs de Laplace et Euler avant lui. Poisson tient à tempérer le rapport de Lacroix et Legendre, qu'il juge sans doute trop favorable. Voici ce qu'il écrit.

le passage des quantités réelles aux imaginaires
Poisson, Sur les intégrales définies (1811)



MATHÉMATIQUES.

Sur les Intégrales définies; par M. Poisson.

Dans le 15e. cahier du Journal de l'École polytechnique, M. Laplace a donné des intégrales définies de différentes formules qui contiennent des sinus ou des cosinus. Il les a déduites des intégrales des exponentielles, par une sorte d'induction fondée sur le passage des quantités réelles aux imaginaires. Nous nous proposons ici de généraliser ces résultats, et d'y parvenir directement par la considération des intégrales *multiples* dont M. Laplace s'est déja servi dans un article de son mémoire sur les *Fonctions de grands nombres* (Académie des Sciences de Paris,

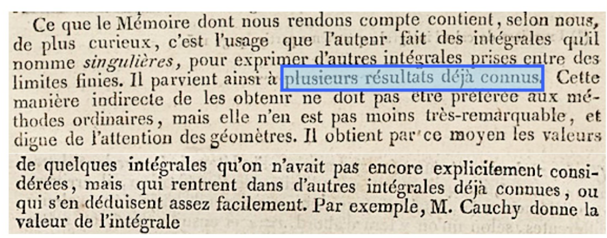
26 *Mémoire sur les intégrales définies* ; par M. Cauchy

« Ce que le mémoire dont nous rendons compte contient, selon nous, de plus curieux, c'est l'usage que l'auteur fait des intégrales qu'il nomme *singulières*, pour exprimer d'autres intégrales prises entre des limites finies. Il parvient ainsi à plusieurs résultats déjà connus. Cette manière indirecte de les obtenir ne doit pas être préférée aux méthodes ordinaires, mais elle n'en est pas moins très remarquable, et digne de l'attention des géomètres. Il obtient par ce moyen les valeurs de quelques intégrales qu'on n'avait pas encore explicitement considérées, mais qui rentrent dans d'autres intégrales déjà connues, ou qui s'en déduisent assez facilement. »

Poisson ne conteste pas la validité des méthodes de Cauchy, mais il ne pense pas qu'elles fournissent des résultats essentiellement nouveaux.

Le mémoire de 1814 de Cauchy ne sera pas publié avant 1827. Entre temps, Cauchy aura affiné ses résultats, et répondu à la critique de Poisson par une avalanche de formules nouvelles.

Mémoire sur les intégrales définies; par M. Cauchy
Siméon Denis Poisson (1814)



Ce que le Mémoire dont nous rendons compte contient, selon nous, de plus curieux, c'est l'usage que l'auteur fait des intégrales qu'il nomme *singulières*, pour exprimer d'autres intégrales prises entre des limites finies. Il parvient ainsi à plusieurs résultats déjà connus. Cette manière indirecte de les obtenir ne doit pas être préférée aux méthodes ordinaires, mais elle n'en est pas moins très-remarquable, et digne de l'attention des géomètres. Il obtient par ce moyen les valeurs de quelques intégrales qu'on n'avait pas encore explicitement considérées, mais qui rentrent dans d'autres intégrales déjà connues, ou qui s'en déduisent assez facilement. Par exemple, M. Cauchy donne la valeur de l'intégrale

27 Mémoire sur les intégrales définies (1825)

Mémoire sur les intégrales définies (1825)
Augustin Louis Cauchy (1789–1857)

MÉMOIRE

SUR

LES INTÉGRALES DÉFINIES,

PRISES ENTRE DES LIMITES IMAGINAIRES;

PAR M. AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY,

Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, Professeur à l'École royale Polytechnique, Professeur adjoint à la Faculté des Sciences, Membre de l'Académie des Sciences, Chevalier de la Légion d'Honneur.

Entre autres il publie en 1825 ce mémoire magistral de 80 pages sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires. Comme rien ne vaut la confiance familiale, le mémoire est publié par la maison d'édition de son beau-père.

Il se termine par un appendice que Cauchy nomme Addition et qui sonne comme une réponse à Poisson.

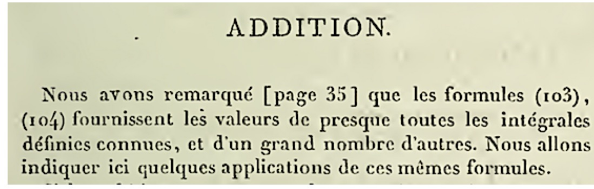
28 presque toutes les intégrales définies connues

« Nous avons remarqué que les formules (103) et (104), fournissent les valeurs de presque toutes les intégrales définies connues, et d'un grand nombre d'autres. Nous allons indiquer ici quelques applications de ces mêmes formules. »

Suit une liste impressionnante d'intégrales calculées par le théorème des résidus.

presque toutes les intégrales définies connues

Cauchy, Mémoire sur les intégrales définies (1825)



ADDITION.

Nous avons remarqué [page 35] que les formules (103), (104) fournissent les valeurs de presque toutes les intégrales définies connues, et d'un grand nombre d'autres. Nous allons indiquer ici quelques applications de ces mêmes formules.

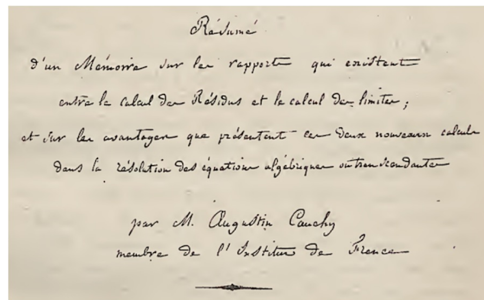
29 Résumé d'un mémoire (1831)

Les deux mémoires dont je vous ai parlé ne sont pas les seuls. Le sujet s'étend jusqu'en 1846. On a ce manuscrit, de la propre main de Cauchy, daté de Turin en 1831.

« Résumé d'un mémoire sur les rapports qui existent entre le calcul des résidus et le calcul des limites, et sur les avantages que présentent ces deux nouveaux calculs dans la résolution des équations algébriques ou transcendantes. »

Résumé d'un mémoire (1831)

Augustin Louis Cauchy (1789–1857)



Résumé

d'un Mémoire sur les rapports qui existent

entre le calcul des Résidus et le calcul des limites;

et sur les avantages que présentent ces deux nouveaux calculs

dans la résolution des équations algébriques ou transcendantes

par M. Augustin Cauchy

membre de l'Institut de France

30 Joseph Liouville (1809–1882)

Parmi ceux qui ont compris et appliqué la théorie de Cauchy, voici Joseph Liouville. Il a vingt ans de moins de Cauchy. Lui aussi a eu une production impressionnante : environ 400 mémoires, en plus d'une activité soutenue d'enseignant, dans laquelle il a laissé d'excellents souvenirs, contrairement à Cauchy.

En 1843, il est candidat, en même temps que Cauchy et Libri, sur une chaire au collège de France. Je vous ai déjà parlé de Libri. En 1843, Liouville sait déjà que c'est un charlatan, mais il ne sait pas encore que c'est un escroc. Il cherche à tout prix à faire barrage à son élection. Écoutez la curieuse lettre de candidature qu'il envoie à l'administrateur du collège de France.

Joseph Liouville (1809–1882)

31 Rendre justice au mérite supérieur d'un confrère

« Toutefois je dois déclarer que si laissant de côté des obstacles étrangers à sa science, le Conseil portait son choix sur M. Cauchy, loin de me trouver blessé de cette nomination, je serais le premier à y applaudir. Rendre justice au mérite supérieur d'un confrère est à mes yeux un devoir sacré qu'il me sera doux de remplir en toute occasion, et contre lequel ne prévaudront jamais dans mon cœur de mesquines considérations d'intérêt personnel. »

Les « obstacles étrangers à sa science » sont les opinions politiques de Cauchy et son refus de prêter serment à Louis-Philippe. Libri fait habilement campagne sur le terrain politique, en présentant Cauchy comme le candidat des Jésuites, et il finit par être élu, au grand scandale de Liouville.

Reconnaissons-le, Liouville n'a pas toujours été aussi fairplay. À propos de deux de ses collègues, Briot et Bouquet dont il enrage qu'ils aient publié ses résultats avant lui, Liouville cite une phrase de Voltaire, qui va me fournir une excellente conclusion.

Rendre justice au mérite supérieur d'un confrère

Liouville à J.-A. Letronne, administrateur du College de France (9 juin 1843)

Toutefois je dois déclarer que si laissant de côté des obstacles étrangers à sa science, le Conseil portait son choix sur M. Cauchy, loin de me trouver blessé de cette nomination, je serais le premier à y applaudir. Rendre justice au mérite supérieur d'un confrère est à mes yeux un devoir sacré qu'il me sera doux de remplir en toute occasion, et contre lequel ne prévaudront jamais dans mon cœur de mesquines considérations d'intérêt personnel.

32 des chenilles pour que les rossignols les mangent

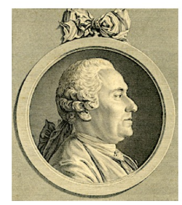
Voltaire s'adresse à un jeune collègue, Jean-François de la Harpe, qui comme lui a publié des écrits anti-religieux, ce qui lui a valu l'hostilité de la bête noire de Voltaire, le critique Élie Fréron. Voltaire conclut sa lettre par :

« Il y a eu de tout temps des Frérons dans la littérature ; mais on dit qu'il faut qu'il y ait des chenilles, pour que les rossignols les mangent afin de mieux chanter. »

des chenilles pour que les rossignols les mangent

Voltaire (1694–1778), J.-F. de la Harpe (1739–1803), E. Fréron (1718–1776)





33 références

Je vous dis souvent du mal de Voltaire, comme de Cauchy. Vous reconnaîtrez avec moi que Fréron n'est resté dans l'histoire que par ses démêlés avec Voltaire.

À votre avis, entre Cauchy, Liouville et moi : qui sont les rossignols, qui est la chenille ? Oui, c'est bien mon avis également. Vous savez quoi ? Je prends une décision : plus jamais de Cauchy bashing dans ces histoires.

Euh, en même temps, je crois bien que je n'aurai plus l'occasion de vous parler de lui. Ça devrait me faciliter la tâche.

références

- B. Belhoste (1985) *Cauchy, un mathématicien légitimiste au XIXe siècle*, Paris : Belin
- C. Gilain (2008) Euler, d'Alembert et la controverse sur les logarithmes, *Quaderni della Accademia delle Scienze di Torino*, 16, 43–60
- J. Gray (2015) *The real and the complex : a history of analysis in the 19th century*, Cham : Springer
- Y. Kosmann-Schwarzbach ed. (2013) *Siméon-Denis Poisson, les mathématiques au service de la science*, Paris : École polytechnique
- F. Smithies (1997) *Cauchy and the creation of complex function theory*, Cambridge : University Press