Une histoire de mathématiques à écouter sur

hist-math.fr

0 La chevelure de Bérénice

histoires d'analyse

La chevelure de Bérénice

quadratures d'Archimède

hist-math.fr Bernard Ycart

Eh oui, une fois de plus, il va être question d'Archimède. Mais cette fois-ci, on oublie le siège de Syracuse, la couronne de Héron, l'assassinat par un soldat romain ; on ne parle plus des grains de sable dans l'univers, ni de l'ancêtre du tangram. Il sera question de vraies mathématiques : les tous premiers calculs d'intégrales. J'aurais eu scrupule à parler sans arrêt du plus grand mathématicien ayant jamais existé, sans vous dire pourquoi il est le plus grand.

Mais d'abord, qui a dit qu'il était le plus grand ?

1 Archimède par Giuseppe Nogari (1699–1763)

Archimède par Giuseppe Nogari (1699–1763)

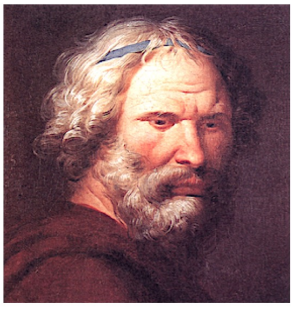
Cicéron (106–43 av. J.-C.) De la République I, 14

Les auteurs antiques d'abord. En particulier Cicéron, qui a retrouvé son tombeau à Syracuse : « il y avait eu dans ce Sicilien plus de génie qu'on ne pouvait en attendre de l'homme. »

2 Archimède par Giuseppe Patania (1780–1852)

Archimède par Giuseppe Patania (1780–1852)

Plutarque (ca 46–125) Les vies des hommes illustres V, 18



Ou encore Plutarque : « Archimède avait une âme si élevée, un esprit si profond et une si grande richesse de théories géométriques, qu'il ne voulut jamais rien laisser par écrit sur la construction de ces machines qui lui avaient acquis tant de gloire, et lui avaient fait attribuer, non une science humaine, mais une intelligence divine. »

3 Archimède par José de Ribera (1591–1630)

Archimède par José de Ribera (1591–1630)
Tite-Live (59 av. J.-C.–17) Histoire Romaine XXIV, 34

Allons-y pour Tite-Live : « Archimède, homme sans rival dans l'art d'observer les cieux et les astres, mais plus merveilleux encore par son habileté à inventer, à construire des machines de guerre. »

Dois-je vous le préciser, les portraits que je vous montre sont totalement imaginaires.

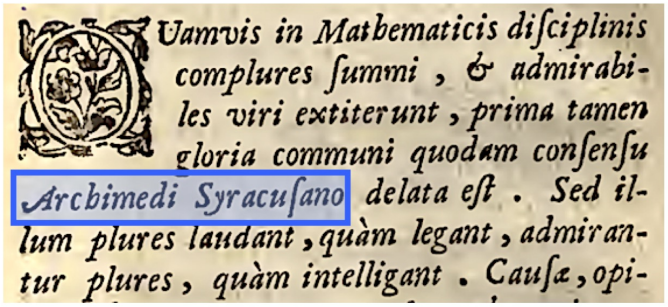
4 Archimède par Giovanni Battista Gaulli (1639–1709)

Archimède par Giovanni Battista Gaulli (1639–1709)
André Tacquet (1612–1660), Elementa geometriae planae ac solidae

Bien sûr Archimède a été admiré ensuite par les Arabes, puis les Européens. Parmi eux, un Jésuite flamand, le père André Tacquet. En 1654 il publie ses « Éléments de géométrie plane et solide », avec dans une seconde partie, une sélection des théorèmes d'Archimède. Voici ce qu'il dit en introduction.

5 admirantur plures, quàm intelligant

admirantur plures, quàm intelligant
André Tacquet (1612–1660), Elementa geometriae planae ac solidae

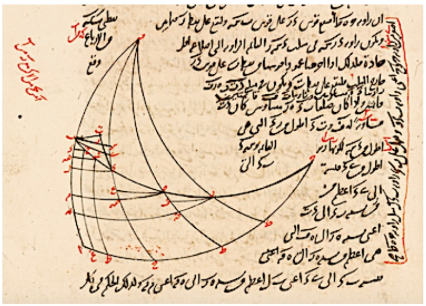

Vamvis in Mathematicis disciplinis complures ſummi, & admirabiles viri extiterunt, prima tamen gloria communi quodam conſenſu Archimedi Syracuſano delata eſt. Sed illum plures laudant, quàm legant, admirantur plures, quàm intelligant. Cauſæ, opi-

« Bien qu'il ait existé dans les disciplines mathématiques de nombreux hommes excellents et admirables, cependant un certain consensus veut attribuer la gloire principale à Archimède de Syracuse. Pourtant ceux le louent sont plus nombreux que ceux qui le lisent, ceux qui l'admirent plus nombreux que ceux qui le comprennent. »

Pourtant au fil des siècles, les plus grands mathématiciens ont lu et compris les œuvres d'Archimède.

6 Taḥrīr kitāb al-kura wa'l-usṭuwāna li Arshimīdis

Taḥrīr kitāb al-kura wa'l-usṭuwāna li Arshimīdis
Naṣīr al-Dīn al-Ṭūsī (1201–1274)



À commencer bien sûr par les Arabes.

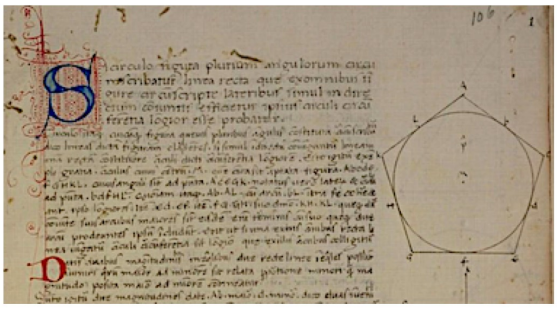
Ceci provient d'une version du traité de la sphère et du cylindre, révisée par Thabit ibn Qurra au neuvième siècle, puis par al-Quhi au dixième, et commentée par al-Tusi au treizième. Que du beau monde !

7 Archimedis Opera

En Europe aussi, ceux qui le louaient étaient plus nombreux que ceux qui le lisaient. Mais il y en a eu tout de même, y compris avant l'imprimerie.

Ce manuscrit est un témoignage émouvant. Il est probablement écrit de la main même de Piero della Francesca. Je vous en parle ailleurs. C'est un des peintres mathématiciens du quatrocento italien. Il est le premier à avoir écrit un livre théorique sur la perpective. Il a aussi écrit un livre d'abaque et un livre sur les polyèdres réguliers, qui ont largement inspiré son élève Luca Pacioli. Dans ses livres, della Francesca cite Archimède à plusieurs reprises. Eh bien ceci est la source de ses citations. Vous le voyez, le texte commence sans fioriture : « Soit une figure polygonale circonscrite à un cercle », et cetera.

Archimedis Opera
Piero della Francesca (1420–1492), manuscrit Ricc. Lat. 106



8 Archimedis Opera

On a pu établir que le manuscrit que della Francesca a étudié, a été copié sur un autre, lui-même issu d'une traduction en latin d'un certain Jacopo da Cremona effectuée dans les années 1450. Cette version-ci a des enluminures beaucoup plus spectaculaires que celle de della Francesca, mais le texte est à peu près le même. On y trouve les traités qui ont fait la célébrité d'Archimède.

Archimedis Opera
Biblioteca Apostolica Vaticana, manuscrit Urb. Lat. 261

9 Archimedis circuli dimensio

Il y a ceux dont je vous parle ailleurs, comme la mesure du cercle, dans laquelle se trouve un encadrement de π utilisant des polygones à 96 côtés.

Archimedis circuli dimensio
Biblioteca Apostolica Vaticana, manuscrit Urb. Lat. 261

10 Archimedis tractatus de arene numero

Il y a aussi l'Arénaire, où Archimède évalue le nombre de grains de sable dans l'univers, en manipulant avec virtuosité des nombres vertigineux.

Archimedis tractatus de arene numero
Biblioteca Apostolica Vaticana, manuscrit Urb. Lat. 261

11 Archimedis centro gravitatis planorum

Comme il fallait bien faire un choix, je ne vous parlerai pas des centres de gravité.

Archimedis centro gravitatis planorum
Biblioteca Apostolica Vaticana, manuscrit Urb. Lat. 261

12 Archimedis de konoidalibus et speroidibus

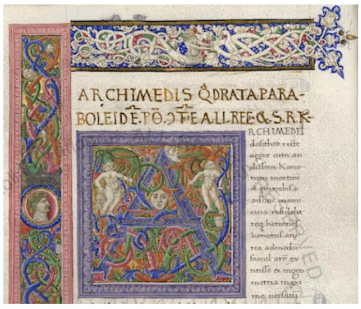
Ni d'ailleurs des conoïdes et sphéroïdes. Pourtant, Archimède y déploie toute sa virtuosité en calculant des surfaces et des volumes de solides de révolution, obtenus par rotation d'une conique autour d'un de ses axes.

Archimedis de konoidalibus et speroidibus
Biblioteca Apostolica Vaticana, manuscrit Urb. Lat. 261

13 Archimedis quadrata parabolei

Je réserve la quadrature de la parabole pour une autre histoire : c'est un calcul extrêmement astucieux, mais qui me paraît relever plus des séries géométriques, que d'une quadrature classique.

Archimedis quadrata parabolei
Biblioteca Apostolica Vaticana, manuscrit Urb. Lat. 261



14 Archimedis de spera & kilindro

Il reste encore deux traités magistraux. Par ordre chronologique, et aussi par ordre d'importance, celui-ci : « De la sphère et du cylindre ». Il contient les résultats dont Archimède lui-même était le plus fier, au point de faire graver sur sa tombe une sphère incrite dans un cylindre. Écoutez plutôt Héron d'Alexandrie, dans l'introduction des Métriques.

Archimedis de spera & kilindro
Biblioteca Apostolica Vaticana, manuscrit Urb. Lat. 261

15 les deux tierces parties du cylindre

« En effet, avant qu'Eudoxe ne le conçoive, il n'y avait pas moyen de produire la preuve que le cylindre est triple du cône qui a la même base que lui et une hauteur égale [...]. Et avant qu'Archimède ne le comprenne, il était invraisemblable de concevoir pourquoi la surface de la sphère est quatre fois le grand cercle qui est en elle et que son volume est les deux tierces parties du cylindre qui la contient, et tout ce qui se trouve être apparenté à ces choses. »

les deux tierces parties du cylindre
Héron d'Alexandrie (ca 10–75), Metrica

En effet, avant qu'Eudoxe ne le conçoive, il n'y avait pas moyen de produire la preuve que le cylindre est triple du cône qui a la même base que lui et une hauteur égale [...]. Et avant qu'Archimède ne le comprenne, il était invraisemblable de concevoir pourquoi la surface de la sphère est quatre fois le grand cercle qui est en elle et que son volume est les deux tierces parties du cylindre qui la contient, et tout ce qui se trouve être apparenté à ces choses.

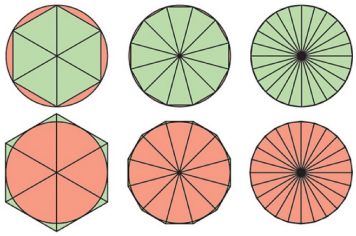
16 Méthode d'exhaustion

Eudoxe, c'est à lui que l'on attribue en général la méthode d'exhaustion. Vous la voyez illustrée ici pour le cercle. L'idée est de l'encadrer par des polygones inscrits et circonscrits, pour majorer et minorer la quantité que l'on cherche. Ensuite, on augmente le nombre de côtés, de sorte que la différence entre la minoration et la majoration devienne arbitrairement petite. On termine par un double raisonnement par l'absurde. Si la quantité est différente de ce qu'on veut démontrer, elle est soit plus grande, soit plus petite. Si elle est strictement plus grande, alors on montre qu'un majorant lui est inférieur, d'où la contradiction. Si elle est plus petite, alors un minorant lui est supérieur, nouvelle contradiction.

Vous trouvez cela compliqué ? C'est vrai, c'est plus facile de passer à la limite quand n tend vers l'infini. Oui, mais c'est précisément ce que les Grecs refusaient de faire. On a l'impression que le mot infini était tabou pour eux. Tenez par exemple, vous savez comment Euclide dit qu'il y a une infinité de nombres premiers ? « Les nombres premiers sont en plus grande quantité que toute la quantité proposée des nombres premiers. » On accepte de dire qu'une quantité dépasse n'importe quelle autre, mais pas qu'elle est infinie.

Le plus impressionnant finalement, c'est que malgré le handicap de ne connaître ni l'infini, ni les limites, Archimède a produit des démonstrations parfaitement rigoureuses, qui sont très proches de ce que nous ferions avec l'intégration.

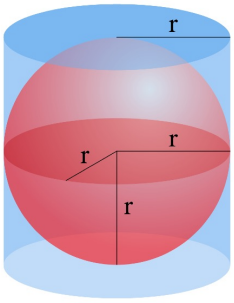
Méthode d'exhaustion
Eudoxe de Cnide (408–355 av. J.C.)



17 De la sphère et du cylindre

Selon Héron, les résultats principaux d'Archimède donnent la surface et le volume de la sphère. Pour nous $4\pi r^2$ et $\frac{4}{3}\pi r^3$. Mais il n'est pas question de notation algébrique, pas question non plus du nombre π. Les résultats sont exprimés comme des rapports de surface ou de volume. La sphère est quatre fois plus grande que son grand cercle (en rouge plus sombre), et son volume est les deux tiers de celui du cylindre bleu. Comment Archimède s'y prend-il ?

De la sphère et du cylindre
Archimède (287–212 av. J.-C.)

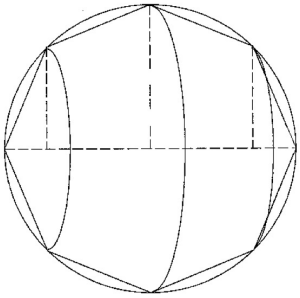


18 Surface de la sphère par exhaustion

Suivant la méthode d'exhaustion, il encadre un cercle par des polygones. Puis il met ces polygones en rotation autour d'un diamètre. Il obtient ainsi deux solides qui encadrent une sphère. Chaque côté d'un polygone en rotation engendre un tronc de cône. Donc les solides qui encadrent la sphère sont tous des réunions de cônes et de troncs de cône.

Archimède prend soin de n'utiliser que des polygones dont le nombre de côtés est multiple de quatre. Sur l'image, vous voyez ce que ça donne avec un octogone inscrit. Le volume obtenu est la réunion de deux cônes identiques, et deux troncs de cônes identiques. La surface et le volume des cônes sont connus depuis Eudoxe et figurent dans les éléments d'Euclide. Il ne reste plus qu'à faire le calcul.

Surface de la sphère par exhaustion
Archimède (287–212 av. J.-C.)



19 Les Neuf Chapitres (263)

Je vous propose une parenthèse dans la pensée d'Archimède, pour interroger notre vieil ami Liu Hui sur le volume de la sphère. Nous sommes environ cinq siècles après Archimède, mais Lui Hui bien sûr n'en a pas entendu parler.

La tradition empirique en Chine, donne neuf seizièmes pour le rapport du volume de la sphère à celui du cube circonscrit. Liu Hui en connaît la justification intuitive, mais il sait que c'est faux. Voici le début de son raisonnement.

Les Neuf Chapitres (263)
Liu Hui (ca. 220–280)

20 des dais carrés qui s'emboîteraient exactement

Il dit en substance : prenons un cube, et découpons-le, le long d'un cercle, de manière à en faire un cylindre. Recommençons encore une fois l'opération transversalement. La forme correspondante présente des ressemblances avec des dais carrés qui s'emboîteraient exactement.

Prenez « dai », D A I, au sens de « voile ». De nos jours, cette forme, intersection de deux cylindres, s'appelle un solide de Steinmetz.

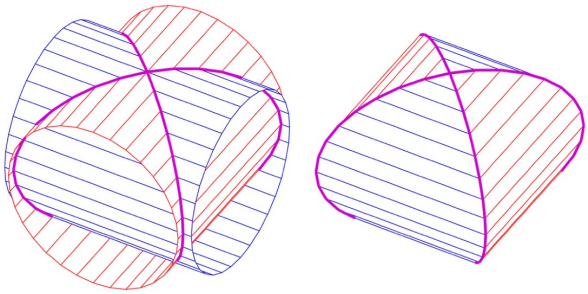
Là, Liu Hui fait une remarque cruciale : « Si la figure des dais emboîtés a le lu du carré, la boule inscrite en son centre a par conséquent le lu du cercle. » En termes modernes, si vous coupez par un plan horizontal, l'intersection avec le solide de Steinmetz est un carré, l'intersection avec la sphère inscrite est un cercle inscrit dans ce carré. Le rapport des deux surfaces est $\pi/4$. Comme ce rapport est le même, quel que soit le plan d'intersection, c'est aussi le rapport entre les deux volumes. Même sans démonstration, c'est une intuition remarquable pour l'époque.

Malheureusement, Liu Hui ne parvient pas à trouver le rapport des volumes entre les dais emboîtés, et il exprime sa frustration.

« Je souhaite exposer mes humbles réflexions, mais je crains de manquer le principe correct. J'ose laisser les points douteux en l'état, en attendant qu'un autre les résolve. »

Deux siècles plus tard, Zu Gengzhi réussit à montrer que le rapport du volume des dais emboîtés au volume du cube est deux tiers.

des dais carrés qui s'emboîteraient exactement
Liu Hui, Commentaire aux neuf chapitres (263)



21 Zu Chongzhi (429–501) (approximation de π)

Je n'ai pas trouvé de portrait de Zu Gengzhi, même imaginaire. Mais son père Zhu Chongzhi est plus célèbre. C'est lui qui a trouvé l'approximation de π par 355 sur 113. Comment le fils avait-il fait pour ses calculs de volume ? Le même type d'intuition que Liu Hui : des découpages et ce que nous appelons le principe de Cavalieri pour comparer des volumes. Il en est très fier.

Zu Chongzhi (429–501) (approximation de π)
Zu Gengzhi (ca 450–520) (volume de la sphère)

22 Il suffit de réfléchir

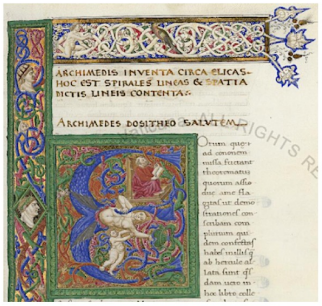
« Les proportions sont extrêmement précises et mon cœur brille. Zhang Heng avait copié les anciens, souriant à la prospérité. Liu Hui avait suivi les anciens, mais n'avait pas eu le temps de les corriger. Mais qu'y a-t-il de difficile à cela ? Il suffit de réfléchir. »

Il suffit de réfléchir
Zu Gengzhi (ca 450–520)

Les proportions sont extrêmement précises et mon cœur brille. Zhang Heng avait copié les anciens, souriant à la prospérité. Liu Hui avait suivi les anciens, mais n'avait pas eu le temps de les corriger. Mais qu'y a-t-il de difficile à cela ? Il suffit de réfléchir.

23 Archimedis inventa circa elicas

Archimedis inventa circa elicas
Biblioteca Apostolica Vaticana, manuscrit Urb. Lat. 261



Revenons à Archimède. Voici les « Inventions d'Archimède sur les hélices ou spirales et sur les espaces que ces lignes contiennent. » Ce mémoire présente un résultat magnifique que je voudrais vous faire goûter. Mais avant, regardez la première ligne, au-dessus de l'enluminure. « Archimède à Dosithée, salut ». Qui est ce Dosithée auquel Archimède adresse ses mathématiques ?

24 Ptolémée III Évergète (ca 280–222 av. J.-C.)

Ptolémée III Évergète (ca 280–222 av. J.-C.)

Du temps d'Archimède, le roi d'Égypte s'appelle Ptolémée III. Il est le petit fils du fondateur de la dynastie Lagide, qui était un général d'Alexandre le Grand. Ptolémée III règne à Alexandrie, et il a à son service des astronomes, dont le plus connu est Ératosthène. Dosithée est probablement l'un deux, comme l'était Conon, que Archimède ne manque jamais de citer, et dont il regrette la mort.

« Il eût fallu, dit-il qu'elles fussent publiées encore du vivant de Conon ; car c'est surtout lui, à mon avis, qui eût été en mesure de les comprendre et de porter sur elles un jugement adéquat. »

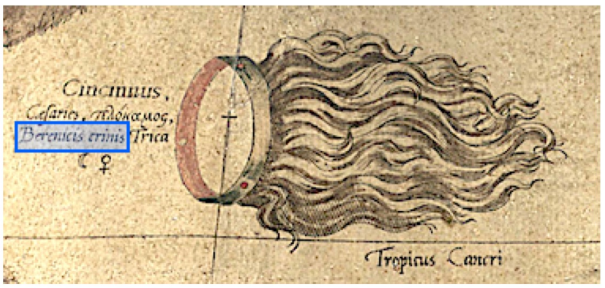
25 Bérénice II de Cyrène (ca 270–221 av. J.-C.)

Bérénice II de Cyrène (ca 270–221 av. J.-C.)

Et c'est parti pour la légende ! L'épouse du roi Ptolémée s'appelait Bérénice. Rhhm oui, bon euh… elle avait fait assassiner son premier époux. Mettez-vous à sa place, il l'avait trompée avec sa propre mère à elle. Bref. Toujours est-il que Bérénice est une épouse aimante et inquiète. Un jour où Ptolémée III était parti guerroyer en Syrie, elle fait vœu de sacrifier à la déesse Aphrodite sa magnifique chevelure si Ptolémée revient vivant. Aphrodite fait le nécessaire, Ptolémée est de retour sain et sauf, et Bérénice tient parole ; elle dépose sa chevelure coupée au temple d'Aphrodite, euh… d'où elle disparaît dans la nuit ! Vous imaginez le scandale ?

26 La chevelure de Bérénice

La chevelure de Bérénice
Globe céleste de Mercator (1551)



Et là, l'astronome Conon trouve une solution splendide, qui montre qu'il est bien digne de l'admiration d'Archimède.

Si la chevelure a disparu dit-il, c'est parce qu'Aphrodite a tellement apprécié le cadeau qu'elle l'a emporté jusqu'aux cieux, où règne désormais une nouvelle constellation d'étoiles. Laquelle constellation s'appelle depuis : « La chevelure de Bérénice ».

Un poète, directeur de la bibliothèque d'Alexandrie, se charge d'immortaliser le haut fait. Il s'appelle Callimaque de Cyrène.

27 La chevelure de Bérénice (galaxie Messier 64)

« J'étais fraîchement coupée, et regrettée de mes sœurs, quand soudain, faisant tournoyer ses ailes rapides, [...] le doux Zéphyre, [...] me dépose sur le sein auguste de la divine Cypris. [...] Et afin que la Couronne d'or de la fille de Minos ne fût pas seule, pour les hommes, à siéger et à briller dans le ciel entre tant d'astres, et qu'on m'y vit aussi, moi la belle Boucle de Bérénice, Cypris, alors que tout humide des flots de la mer, je montais vers les Immortels, Cypris me mit, astre nouveau, parmi les anciens. »

Voilà, voilà !

Vous êtes prêts pour un peu de mathématiques archimédiennes ?

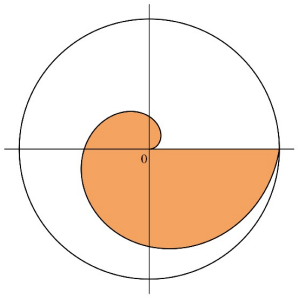
La chevelure de Bérénice (galaxie Messier 64)
Callimaque de Cyrène (ca 310–240 av. J.-C.)

28 Spirale d'Archimède

Archimède définit ses spirales par un double mouvement : une rotation uniforme d'un rayon autour d'un centre, et un point en translation uniforme le long de ce rayon. Chaque rotation complète du rayon correspond à ce qu'il appelle une « révolution de la spirale ».

Voici l'énoncé de sa proposition 24. « L'aire comprise entre la spirale décrite dans la première révolution et la première droite origine de la révolution est équivalente à la troisième partie du premier cercle ». En clair, la surface colorée est le tiers de la surface du cercle qui l'englobe. Comment Archimède a-t-il fait ?

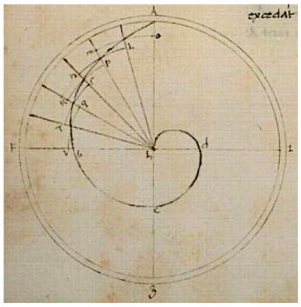
Spirale d'Archimède
Archimède (287–212 av. J.-C.)



29 Encadrement de spirale

J'ai choisi la figure dessinée par Piero della Francesca lui-même. Elle illustre parfaitement l'idée. Les 360 degrés sont divisés en secteurs égaux. Dans chacun des secteurs passe un arc de la première révolution de la spirale. La surface sous cet arc à l'intérieur du secteur peut-être encadrée par deux secteurs de disque, dont on connaît l'aire.

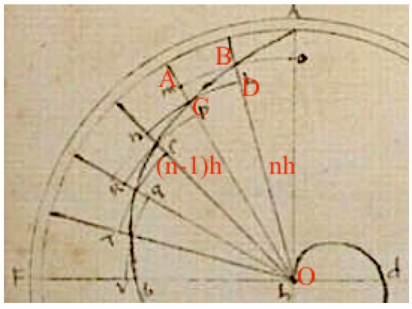
Encadrement de spirale
Piero della Francesca (1420–1492), manuscrit Ricc. Lat. 106



30 Encadrement de spirale

Pour être un peu plus précis, je me suis permis de rajouter quelques annotations sur la figure. En langage moderne, disons que grand N est le nombre de petits secteurs et petit h égale $2\pi/N$ est le pas de discrétisation. Nous regardons le secteur compris entre les angles $(n-1)h$ et nh. Si v est le rapport de la vitesse le long du rayon vecteur à la vitesse angulaire, la distance OA est nhv, tandis que la distance OC est $(n-1)hv$. Le secteur circulaire OAB, a pour surface nhv au carré, multiplié par $h/2$. Le secteur circulaire OCD, a pour surface $(n-1)hv$ au carré, multiplié par $h/2$.

Encadrement de spirale
Piero della Francesca (1420–1492), manuscrit Ricc. Lat. 106



31 Encadrement de l'aire

Voici l'encadrement obtenu, avec des notations algébriques totalement anachroniques. Il ne reste plus qu'à calculer la somme des N premiers carrés, ce qu'Archimède a pris soin de faire dans sa proposition onze. Le rayon du grand disque est $2\pi v$, son aire est $4\pi^3 v^2$. Nous prenons la limite de un sur N^3 fois la somme des N premiers carrés, et nous trouvons un tiers. Archimède ne prend pas la limite, mais termine par une double démontration par l'absurde, et cela revient exactement au même.

Encadrement de l'aire
Archimède (287–212 av. J.-C.)

$$\sum_{n=1}^{N}((n-1)hv)^2\,\frac{h}{2} < \text{Aire} < \sum_{n=1}^{N}(nhv)^2\,\frac{h}{2}$$

$$4\pi^3v^2\,\frac{1}{N^3}\sum_{n=1}^{N}(n-1)^2 < \text{Aire} < 4\pi^3v^2\,\frac{1}{N^3}\sum_{n=1}^{N}n^2$$

$$\frac{1}{N^3}\sum_{n=1}^{N}(n-1)^2 < \frac{1}{3} < \frac{1}{N^3}\sum_{n=1}^{N}n^2$$

32 Aire sous la spirale

Disposant du calcul intégral, voici ce que nous écririons. Le facteur devant l'intégrale est l'aire du grand disque, la fonction à intégrer est la dérivée de l'aire sous la spirale, vue comme fonction du temps.

Maintenant, reprenez le raisonnement d'Archimède, et posez-vous la question suivante : pourquoi a-t-il fallu dix-neuf siècles pour passer du transparent précédent à celui ?

Aire sous la spirale
Archimède (287–212 av. J.-C.)

$$\text{Aire} = \int_0^{2\pi}(\theta v)^2\,\frac{\mathrm{d}\theta}{2} = \frac{1}{3}\times 4\pi^3v^2$$

33 références

Je n'ai pas la réponse. Qui sait, peut-être Archimède paraissait-il si grand qu'on avait peur de le dépasser ? Grand comment ? Euh… jusqu'à la chevelure de Bérénice vous croyez ?

références

- J. R. Banker (2005) A manuscript of the works of Archimedes in the hand of Piero della Francesca, *The Burlington Magazine*, 147(1224), 165–169
- E. J. Dijksterhuis (19877) *Archimedes*, Princeton : University Press
- R. Netz (2017) *The works of Archimedes vol. II : On spirals*, Cambridge : University Press
- A. Ross (2004) La méthode d'Archimède, *Bulletin AMQ*, 44(2), 37–45
- B. Vitrac (2004) Les géomètres de la Grèce antique, *culturemath.ens.fr*
- D. B. Wagner (1978) Liu Hui and Zu Gengzhi on the volume of the sphere, *Chinese Science*, 3, 59–79