hist-math.fr

0 La série du binôme

Pour une fois, le récit est relativement simple : les faits se sont déroulés sur environ un siècle et demi, les acteurs sont parfaitement identifiés, les publications sont accessibles. Je pourrais presque m'en dispenser.

Eh non, ne partez pas tout de suite! Cette histoire illustre la mutation fondamentale qui a eu lieu dans l'histoire de l'analyse, entre le dix-huitième siècle où l'on se préoccupait plutôt de calculs et de formules, et le dix-neuvième où l'on s'est mis à placer la rigueur et les concepts généraux avant les cas particuliers. La série binomiale, est emblématique de cette transition entre l'analyse par les formules et l'analyse par les concepts.

Quant à cette belle jeune femme,...

1 Christine Kemp (1804–1862)

Elle s'appelle Christine Kemp. Elle était la fiancée d'Abel, quand il est mort de tuberculose à seulement 26 ans. Sur son lit de mort, Abel lui a fait promettre d'épouser un de ses amis, promesse qu'elle a scrupuleusement exécutée. Quelle noblesse! quelle belle histoire!

Ah non, je ne vais pas vous resservir mon couplet sur le romantisme en mathématiques. Je vous raconte ailleurs Galois, Hamilton, Poncelet, je vous parle aussi d'Abel à propos des équations du cinquième degré : cela devrait vous suffire!

Comment dites-vous? Vous trouvez cela plus amusant que la formule du binôme? C'est un point de vue qui se défend. Bon, on verra si je change d'avis d'ici la fin de l'histoire. En attendant, j'espère qu'il n'y a pas de confusion dans votre esprit sur ce qu'est la formule du binôme de Newton.

2 Formule et série du binôme

Pour m'en assurer, je vais utiliser deux dénominations différentes. La formule du binôme donne l'expression finie de a+b à la puissance n, pour n entier positif, a et b quelconques. C'est un résultat d'arithmétique ou d'algèbre. Son histoire est compliquée : il est apparu sous différentes formes dans toutes les civilisations qui se sont occupées de mathématiques. Ce n'est pas lui qui nous intéresse aujourd'hui. Sachez simplement qu'il n'y a aucune raison de lui associer le nom de Newton.

Tandis que la série du binôme, elle, a bien été trouvée pour la première fois par Newton. Nous voyons cela comme un théorème, qui dit que la série dans le membre de droite, converge pour tout x dans le disque unité ouvert, et pour tout exposant n complexe, et que sa somme est (1+x) à la puissance n. Bien sûr, le résultat n'a pas été énoncé par Newton sous cette forme, ni avec ce degré de généralité.

histoires d'analyse

La série du binôme



hist-math.fr Bernard YCARD

Christine Kemp (1804–1862) Niels Henrik Abel (1802–1829)



Formule et série du binôme

Formule du binôme : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall a, b \in \mathbb{C}$,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Série du binôme : $\forall n \in \mathbb{C} \,, \; \forall x \in \mathbb{C} \,, \; |x| < 1 \;,$

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} x^k$$

La série du binôme est la première de l'incroyable série de découvertes du jeune Newton. Cela se passait pendant l'hiver 1664-65, Newton avait tout juste 22 ans, il était étudiant du Trinity college à Cambridge depuis à peine trois ans. Non, il n'était pas assis sous un pommier, il n'y avait pas encore la peste à Cambridge : ne mélangez pas tout!

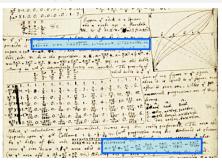
Trinity College, Cambridge Isaac Newton (1643–1727)



4 a square, a circle, a Parabola

Voici un des premiers manuscrits dans lequel Newton fait usage de la formule. Dans le premier encadré bleu il écrit des puissances de $1-x^2$: puissance un demi, un, trois demis, deux, cinq demis. Sa formule du binôme lui permet d'écrire les développements en série correspondants, puis d'en prendre la primitive. Une primitive conduit à des aires sous la courbe, en particulier des formules d'approximation de π , c'est-à-dire des quadratures du cercle. C'est le cas dans le second encadré bleu. En voici l'explication.

a square, a circle, a Parabola Isaac Newton, MS Add.3958.3:72r (1665)



5 Série du binôme

Si vous prenez α égale un demi dans la série du binôme, vous obtenez le développement de racine carrée de 1+x. En remplaçant x par « moins x^2 », vous développez en série l'équation d'un cercle, et en prenant la primitive vous calculez des surfaces de morceaux de cercle. D'où la quadrature que Newton annonce.

Remarquez, qu'il pousse les développements en série jusqu'à l'ordre 13, et il ajoute ensuite « et cetera ». Pour Newton, les séries qu'il manipule, correspondent à des quantités concrètes. Il ne se pose pas la question des conditions de convergence.

Série du binôme Isaac Newton (1643–1727)

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \dots$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \dots$$

$$\sqrt{1-x^2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 + \frac{5}{128}x^8 + \dots$$

$$\int_0^X \sqrt{1-x^2} \, \mathrm{d}x = X - \frac{1}{6}X^3 - \frac{1}{40}X^5 - \frac{1}{112}X^7 - \frac{5}{1152}X^9 + \dots$$

6 Celeberrimi Wallisii nostri

Comment avait-il trouvé cela? Il l'explique dans sa seconde lettre à Leibniz, datée du 24 octobre 1676.

« Au début de mes études mathématiques, quand je lisais les œuvres de notre célèbre Wallis, en considérant la série par laquelle lui-même trouve l'aire du cercle et de l'hyperbole, etc.

Je trouvai qu'en posant m pour le second chiffre, le reste serait produit en multipliant continuellement les termes ainsi. » Et il donne en bas de l'image, l'expression du terme général de la série binomiale. Les exemples qui suivent, montrent bien qu'il l'utilise pour un exposant fractionnaire quelconque, positif ou négatif.

Celeberrimi Wallisii nostri Newton, Epîstola posterior (24 octobre 1676)

Sub initio fludiorum meorum Mathematicorum, ubi incideram in * opera Celeberrinii Wadijfi nosliri, confiderando Series quarum intercalatione ipie extinter Aream Circuti & Hyperbola: , unpote quod in Series Curvarum, quarum Bafis feu Axis communis fit: x_i , x_i ,

« Notre célèbre John Wallis », le voici. Il tient à défendre la mathématique anglaise contre ce qu'il perçoit comme une tendance des continentaux à revendiquer des découvertes qui ne leur appartiennent pas. Il pousse Newton à rédiger ses méthodes, et n'hésite pas à publier lui-même ce que Newton tarde à rédiger.

C'est ainsi que la première parution imprimée de la formule du binôme, se trouve dans son traité d'algèbre de 1685.

John Wallis (1616-1703)



8 but unsuccessfully

Newton est cité à de nombreuses reprises dans ce traité. Voici ce que dit Wallis, sur sa découverte de la série du binôme.

« Il observe alors, ce que j'avais jadis recherché, mais sans succès, que l'on touve les nombres suivants », etc. Pour avoir écrit ceci à 69 ans, Wallis a droit à tout mon respect.

but unsuccessfully Wallis, A treatise of Algebra (1685)

He then observes what I had formerly fought after, but unsuccessfully,) that the following Numbers are, from the I wo first, to be found by continual Multiplication of this Series, $\frac{m-0}{1 \times m} \times \frac{m-1}{m} \times \frac{m-2}{m} \times \frac{m-3}{m} \times \frac{m-5}{m} \times \frac{m-5}{m}$

9 elevare una serie infinita ad una data potestà

Pendant tout le dix-huitième siècle, la série du binôme a fait partie des outils de base du calcul différentiel, dans tous les manuels d'enseignement.

Souvenez vous qu'à cette époque une fonction était une expression algébrique contenant la variable. Une grande partie des fonctions prises en exemple contiennent des radicaux. Leur développement fait donc intervenir la série du binôme.

Ce que vous avez sous les yeux est extrait des Institutions Analytiques à l'usage de la jeunesse italienne, de Maria Agnesi. Je vous raconte ailleurs l'exploit que représente ce manuel. Maria Agnesi, qui ne recule jamais devant les gros calculs, vous explique ici comment développer une puissance quelconque d'une série infinie.

elevare una serie infinita ad una data potestà Agnesi, Instituzioni analitiche ad uso della gioventù italiana (1748)

Abbiań dz elevare una ferie inflaita ad una data potefila. E fia per efempio y = siy + bj' + cj' + fj' ec. -da elevarú alla potefila w_1 farà duaque P = y, Q = sj' + bj' + cj' + fj' ec. y = siy + bj' + cj' + fj' ec. -y = siy + bj' + cj' + fj' ec. -y = siy + bj' + cj' + cj' + fj' ec. -y = siy + cj' + c

10 ex hoc theoremate universali

La même année 1748 paraît un autre manuel à succès, également accessible sur ce site. C'est l'Introduction à l'Analyse des Infinis, par Leonhard Euler. La série du binôme figure au début du livre.

« Les fonctions irrationnelles se transforment habituellement en séries infinies par ce théorème universel », qui, vous le voyez, est énoncé pour une puissance rationnelle.

Quelques pages plus loin, Euler ajoute:

ex hoc theoremate universali

Euler, Introductio in analysin infinitorum (1748)

71. Functiones irrationales ex hoe theoremate universali in Series infinitas transformari solent, quod sit $(P+Q)^{\frac{m}{n}}$ $= P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}P^{\frac{m-n}{n}}Q + \frac{m(m-n)}{n \cdot 2^n}P^{\frac{m-2n}{n}}Q^1 + \frac{m(m-n)(m-2n)}{n \cdot 2^n}P^{\frac{m-2n}{n}}Q^1 + &c. : hi enimitermini, nisi fuerit <math>\frac{m}{n}$ numerus integer affirmativus, in infinitum excurrunt. Sic erit pro $m \cdot 8n$ numeros definitos scribendo.

11 per principia calculi differentiali

« Au reste, ce n'est pas ici le lieu de démontrer directement la loi de cette progression : ce qui pourra se faire facilement dans la suite par les principes du calcul différentiel ; il suffira donc en attendant d'en avoir prouvé la vérité par l'application que nous en avons faite à toutes sortes d'exemples. »

Les principes du calcul différentiel hein? Qu'avait-il en tête?

per principia calculi differentiali Euler, Introductio in analysin infinitorum (1748)

> fus congruent. Interim hoc loco non licet rationem hujus progressionis legis a priori demonstrare, id quod per principia calculi differentialis demum commode fieri poterit; interea ergo sufficiet veritatem per applicationem ad omnis generis exempla comprobasse.

12 notissima expressio Neutoniana

Il le dit quelques années plus tard dans ses Institutions de calcul différentiel. Comme vous le voyez, il part de la fonction $y = x^n$, dont il écrit les dérivées successives, pour appliquer ensuite ce que nous appelons la formule de Taylor.

Et là, quelque chose ne va pas. Plusieurs choses en réalité. D'une part les conditions de validité de la formule de Taylor sont tout sauf claires au moment où Euler écrit. Mais surtout, justifier a posteriori par une formule qui est en quelque sorte l'aboutissement de la théorie, la série du binôme qui en est une des bases, et qui est considérée comme une évidence depuis le début du livre, cela ressemble fort à un cercle vicieux.

notissima expressio Neutoniana Euler, Institutiones calculi differentialis (1755)

fit $y = x^n$; eritque fi $x + \omega$ loco x ponatur $z = (x + \omega)^n$.

Cum igitur fit: $\frac{dy}{dx} = nx^{n-1} \qquad ; \qquad \frac{ddy}{dx^2} = n(n-1)x^{n-1}$ $\frac{d^3y}{dx^n} = n(n-1)(n-2)x^{n-3}; \qquad \frac{d^3y}{dx^4} = n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4}$ &c.
his valoribus fubflitutis fiet: $(x+\omega)^n = x^n + \frac{n}{1}x^{n-1}\omega + \frac{n(n-1)}{1,2}x^{n-1}\omega^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1,2}x^{n-1}\omega^3 + \text{&c.}$ quae eft notiffima expression Neutoniana, qua potestas binomii $(x+\omega)^n$ in feriem convertitur. Huisisque feri-

13 Leonhard Euler en 1778

Euler en est parfaitement conscient. Voyez-vous, on a souvent tendance à schématiser. D'un côté Euler et les mathématiciens du dix-huitième, superbement dédaigneux de la rigueur et des démonstrations; à l'opposé Cauchy et les mathématiciens du dix-neuvième, obsédés par la perfection logique de leurs raisonnements. S'il y a bien une morale que je voudrais que vous reteniez de cette histoire, c'est que la réalité n'est pas aussi tranchée.

Jusqu'à près de soixante-dix ans, Euler s'est préoccupé de trouver une démonstration élémentaire et rigoureuse de la série du binôme. Leonhard Euler en 1778 Joseph Darbès (1747–1803)



14 Nova demonstratio quod euolutio potestatum (1776)

En 1776, il avait présenté ce mémoire, intitulé « Nouvelle démonstration du fait que l'évolution newtonnienne des puissances du binôme vaut pour des exposants fractionnaires ». Il n'est paru qu'en 1787, après la mort d'Euler. Vous voyez ici le début du résumé en français.

« Tout le monde sait combien les démonstrations qu'on a données jusqu'à présent du théorème binomial de Newton laissent encore à désirer pour les cas où l'exposant n'est pas un nombre entier positif. Plusieurs géomètres ont tâché, avec plus ou moins de succès, de remédier au défaut de généralité de cette vérité si élémentaire. Notre auteur lui-même en avait donné autrefois une démonstration déduite de l'Analyse Infinitésimale; mais comme cette Analyse est fondée elle-même sur le théorème binomial, ce n'est pas sans raison qu'on lui a reproché une pétition de principe, et M. Euler a avoué luimême ce défaut en donnant, dans le dix-neuvième volume des nouveaux commentaires, une démonstration libre d'induction aussi bien que de toute considération qui ne soit pas élémentaire. Cependant, il ne paraît pas avoir été entièrement satisfait de cette tentative, car il revient à la charge, dans le mémoire que nous avons sous les yeux, et il réussit à nous donner une démonstration beaucoup plus parfaite du théorème de Newton. »

15 semper esse $[m] \cdot [n] = [m+n]$

Ce résumé faisait référence à un autre article d'Euler, paru en 1774 : « Démonstration du théorème newtonien sur l'évolution de la puissance d'un binôme pour le cas où les exposants ne sont pas des nombres entiers. »

Dans cet extrait, vous voyez l'idée de base de ce que propose Euler. Il pose m entre crochets, égal à la série entière dont il veut montrer que sa somme vaut $(1+x)^m$. Il calcule le produit des deux séries m entre crochets et n entre crochets, et il trouve m+n entre crochets. Il ne lui reste plus qu'à montrer que cette équation a forcément pour solution (1+x) puissance n. Il sait déjà que c'est vrai pour les entiers. Il le déduit pour les rationnels positifs, puis négatifs, et le tour est joué... ou presque.

Cette technique de l'équation fonctionnelle sera le point de départ de tous ceux qui chercheront une démonstration rigoureuse, jusqu'à Cauchy inclus.

$$16 \quad F(m+n) = Fm + Fn$$

Dans ses « Leçons sur la théorie des fonctions », Lagrange consacre la troisième leçon aux « Fonctions dérivées des puissances, et au développement d'une puissance quelconque d'un binôme ». Vous voyez ici son argument clé : le premier coefficient du développement, qu'il note F(n) vérifie l'équation fonctionnelle F(m+n) = F(m) + F(n).

Nova demonstratio quod euolutio potestatum (1776) Leonhard Euler (1707–1783)

Noua demonstratio quod cuolutio potestatum binomii Newtoniana etiam pro exponentibus fractis valeat.

Tout le monde fait combien, les démonsfrations qu'on a données, jusqu'à prédent du Théoreme binomial de Newton Ialifient encore à défirer pour les ces où l'exponênt rêth pais un nombre entier pofitif. Plufeurs Géomètres ont tiché, aver plus ou moins de fuccès, de remedier au défaut de géneralité de cette vérité fi elémentaire. Notre auteur lui même en avoit donnée autrefois une démonfration déduité de l'Analyle infinitéfimale; mais comme cette Analyfe est fondée elle même fur le Théorème binomial, c c nêtl pas sûns raifon qu'ou lui a reproché une petition de principe, & M. Euler a avouel lui même ce défaut, en donnant dans le XIX. Vo-lume des Nouveaux Commentaires une démonsfration aible neite conféderation qui ne foit pas élementaire. Cependant il ne paroit pas avoir été entiférement fritisfit de cette tentaitée; car il ir evient à la charge dans le mémoire que nous avons sous les yeux, & il y reutifit à nous donner une démonsfration beaucoup plus parfaite du Théorème de Newton. Voici la marche de son raisonnement.

semper esse $[m] \cdot [n] = [m+n]$ Euler, Demonstratio theorematis neutoniani (1774)

nunc igitur si literas m et n in genere spectemus hanc seriem isso signo [m+n] indicari oportet, vn-de hanc insignem veritatem nanciscimur, semper esse [m], [n] = [m+n] quicunque etiam numeri loco intarum interarum adhibeantur.

F(m+n)=Fm+FnLagrange, Leçons sur la théorie des fonctions (1806)

être représenté par F(m+n), puisque la fonction $(1+\omega)^n$ devient $(1+\omega)^{m+n}$, en y substituant m+n pour m. Donc il faudra que la fonction désignée par la caractéristique F soit telle que l'on ait

$$F(m+n)=Fm+Fn,$$

m et n étant des quantités quelconques.

Augustin-Louis Cauchy (1789–1857) Cours d'Analyse de l'École royale polytechnique (1821)



Dans ce domaine, comme dans bien d'autres, la rupture allait venir du jeune Cauchy, et de son célèbre « Cours d'Analyse de l'École royale polytechnique ». Ah enfin! Voyons comment il démontre la série du binôme!

18
$$\phi(\mu) \cdot \phi(\mu') = \phi(\mu + \mu')$$

Euh, mais attendez... Aux notations près, c'est exactement la démonstration d'Euler! Elle est où la rupture? Peut-être dans sa manière de résoudre l'équation deux du chapitre cinq? Allons voir!

$$\phi(\mu) \cdot \phi(\mu') = \phi(\mu + \mu')$$
Cauchy, Cours d'Analyse de l'École royale polytechnique (1821)

(15)
$$\Phi(\mu)=1+\frac{\mu}{1}x+\frac{\mu(\mu-1)}{1,2}x^2+\&c...\begin{cases}x=-1\\x=+1\end{cases}$$

En vertu du 1.º théorème [\S . 1.º], $\varphi(\mu)$ sera fonction continue de la variable μ entre des limites quelconques de cette variable, et l'on aura [voyez le 3.º théorème, corollaire 4]

(16)
$$\varphi(\mu).\varphi(\mu') = \varphi(\mu + \mu').$$

Cette dernière équation, étant entièrement semblable à l'équation (2) du chapitre V [5, 1."], se résoudra de la même manière; et l'on en conclura

19 continue entre deux limites

C'est bien l'équation qu'il a annoncée, celle que savaient déjà résoudre Euler, Lagrange, et bien d'autres. La vraie rupture est dans l'hypothèse : « Déterminer la fonction $\phi(x)$, de manière qu'elle reste continue entre deux limites réelles quelconques de la variable x, et que l'on ait, etc. »

continue entre deux limites Cauchy, Cours d'Analyse de l'École royale polytechnique (1821)

2. PROBLÈME. Déterminer la fonction $\phi(x)$, de manière qu'elle reste continue entre deux limites réelles quelconques de la variable x, et que l'on ait pour toutes les valeurs réelles des variables x et y

20 de manière à converger

Comme Euler et les autres, Cauchy vérifie la propriété pour les entiers positifs et négatifs, puis il passe aux rationnels. La nouveauté est qu'il utilise la continuité pour passer à la limite sur un réel quelconque μ ; c'est ce que nous appelons toujours un « argument de continuité ».

Mais si on revient à la série binomiale, cela veut-il dire que Cauchy a vérifié l'hypothèse de continuité? Bien sûr! Vous pouvez compter sur lui! La continuité de la somme d'une série entière est une conséquence triviale du tout premier théorème de son chapitre six. Le voici.

de manière à converger Cauchy, Cours d'Analyse de l'École royale polytechnique (1821)

puis, en supposant que la fraction $\frac{m}{n}$ varie de manière à converger vers un nombre quelconque μ , et passant aux limites, on trouvera

$$\varphi(\mu a) = [\varphi(a)]^r.$$

Si maintenant on prend $\alpha=1$, on aura pour toutes les valeurs positives de μ

(8)
$$\varphi(\mu) = [\varphi(1)]^*,$$

et par suite, en faisant converger μ vers la limite zéro,

$$\phi(0) = 1.$$

21 la somme est fonction continue de x

Théorème. Lorsque les différents termes d'une série sont des fonctions d'une même variable x, continues par rapport à cette variable dans le voisinage d'une valeur particulière pour laquelle la série est convergente, la somme s de la série est aussi, dans le voisinage de cette valeur particulière, fonction continue de x.

(silence gêné)

Euh, Cauchy a vraiment écrit que la somme d'une série de fonctions continues est continue? Eh bien oui, vous l'avez sous les yeux. *Le* Cauchy? L'inventeur de la rigueur mathématique? Lui-même.

22 Niels Henrik Abel (1802–1829)

Un qui est bien embêté, c'est Niels Henrik Abel. Ce portrait est signé du même Johann Gørbitz qui a peint le portrait de jeune femme que je vous ai montré au début, celui de la fiancée d'Abel. Il était installé à Paris, et ce portrait-ci a été peint pendant le séjour d'Abel à Paris, à l'été 1826. Sa recherche sur la série du binôme, Abel l'a menée pendant son séjour à Berlin à l'automne 1825.

Le 16 janvier 1826, il écrit à son ami Holmboe : « Il ne se trouve dans les mathématiques presque aucune série infinie dont la somme est déterminée d'une manière rigoureuse, c'est-à-dire que la partie la plus essentielle des mathématiques est sans fondement.[...] Pas même la formule du binôme n'est encore rigoureusement démontrée ».

la somme est fonction continue de xCauchy, Cours d'Analyse de l'École royale polytechnique (1821)

1. Théorème. Lorsque les différens termes de la série (1) sont des fonctions d'une même variable x, continues par rapport à cette variable dans le voisinage d'une valeur particulière pour laquelle la série est convergente, la somme s de la série est aussi, dans le voisinage de cette valeur particulière, fonction continue de x

Niels Henrik Abel (1802–1829) Recherche sur la série $1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2} + \dots$ etc (1826)



23 Résumé des leçons sur le calcul infinitésimal

Ceci est extrait de l'original de la lettre du 16 janvier 1826. Abel explique ce qu'il a obtenu sur la série du binôme en haut, puis il dit :

« Le théorème de Taylor, base de tout le calcul infinitésimal, n'est pas mieux fondé. Je n'en ai trouvé qu'une seule démonstration rigoureuse, et elle est de M. Cauchy dans son Résumé des leçons sur le calcul infinitésimal, où il a démontré qu'on a, etc. »

Résumé des leçons sur le calcul infinitésimal Abel à Holmboe (16 janvier 1826)

for find at men for and and of the second of

24 L'exellent ouvrage de M. Cauchy

L'admiration d'Abel pour les cours de Cauchy est sincère. Voici le début de son développement dans l'article sur la série du binôme.

« Nous allons d'abord établir quelques théorèmes nécessaires sur les séries. L'excellent ouvrage de Monsieur Cauchy "Cours d'analyse de l'école polytechnique", qui doit être lu par tout analyste qui aime la rigueur dans les recherches mathématiques, nous servira de guide. »

Il définit ensuite ce qu'est une série convergente, pratiquement dans les mêmes termes que Cauchy et avec les mêmes notations.

Pourtant il a parfaitement remarqué le théorème sur la continuité de la somme. Un peu plus loin, on trouve cette note de bas de page.

L'exellent ouvrage de M. Cauchy Abel, Recherche sur la série $1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}+\ldots$ etc (1826)

Nous allons d'abord établir quelques théorèmes nécessaires sur les séries. L'exellent ouvrage de M. Cauchy "Cours d'analyse de l'école polytechnique", qui doit être la par tout analyste qui aime la rigueur dans les recherches mathématiques, nous servira de guide.

Définition. Une série quelconque

 $v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_n$ etc. somme $v_0 + v_1 + \cdots + v_m$ si pour des valeurs toujours croissantes de m, la somme $v_0 + v_1 + \cdots + v_m$ s'approche indéfiniment d'une certaine limite. Cette limite s'appellera la somme de la série. Dans le cas contraire la série sera dite divergente, et elle n'a pas de somme. D'après cette définition, pour qu'une

25 il me semble que ce théorème admet des exceptions

« Dans l'ouvrage cité de M. Cauchy on trouve (page 131) le théorème suivant : (vous connaissez l'énoncé). Mais il me semble que ce théorème admet des exceptions. Par exemple la série $\sin\varphi-\frac{1}{2}\sin(2\varphi)+$ etc. est discontinue pour toute valeur $(2m+1)\pi$ de $\varphi.$ Il y a comme on sait, plusieurs séries de cette espèce. »

On peut argumenter sur le sens que le mot « théorème » avait pour Abel. Pour nous, un théorème qui « admet des exceptions », comme il le dit joliment, est tout bonnement faux. Il est possible qu'Abel ne l'ait pas perçu ainsi. Reste qu'il était bien conscient du fait que la démonstration de Cauchy pour la série du binôme, était insuffisante.

La sienne de démonstration, est correcte, et c'est même la plus complète qui ait été donnée jusque là : Abel traite de toutes les valeurs complexes possibles de la variable et de l'exposant. Au passage, il introduit entre autres la transformation d'Abel et le théorème d'Abel de convergence radiale.

Par contre, il ne semble pas avoir été conscient de ceux qui l'ont précédé, et qui avaient même précédé Cauchy.

il me semble que ce théorème admet des exceptions Abel, Recherche sur la série $1+\frac{m}{12}x+\frac{m(m-1)}{12}+\ldots$ etc (1826)

*) Dans l'ouvrage cité de M. Cauchy on trouve (page 131) le théorème suivant: "Lors"que les différens termes de la série, $u_0 + u_1 + u_2 + \dots$ etc. sont des fonctions d'une
"même variable x, continues par rapport à cette variable dans le voisinage d'une va"leur particulière pour laquelle la série est convergente, la somme s de la série est
"aussi, dans le voisinage de cette valeur particulière, fonction continue de x." Mais
il me semble que ce théorème admet des exceptions.

Sin $\varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi + \frac{1}{2} \sin 3\varphi - \dots$ etc.

est discontinue pour tonte valeur $(2m+1)\pi$ de G, où m est un nombre entier. Il y a,
comme en sait, plusieurs séries de cette espèce.

26 Disquisitiones generales circa seriem infinitam (1813)

Parmi eux, figure bien évidemment Gauss. « Recherches générales autour de la série infinie » dont vous voyez l'expression : c'est la série hypergéométrique, dont la série du binôme est un cas particulier. En plus de toutes les relations fonctionnelles imaginables sur la somme, Gauss étudie les valeurs de x pour lesquelles la série converge, en fonction des trois paramètres.

Disquisitiones generales circa seriem infinitam (1813) Carl Friedrich Gauss (1777–1855)

DISQUISITIONES GENERALES CIRCA SERIEM INFINITAM

 $1 + \frac{\alpha \ell}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\ell(\ell+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)} x x + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ell(\ell+1)(\ell+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} x^{2} + \text{etc.}$

AVCTORE
CAROLO FRIDERICO GAVSS.

PARS I.

27 Der binomische Lehrsatz (1816)

Trois ans plus tard, Bernard Bolzano, consacre un livre entier à la série du binôme. Le titre exact est « Le théorème binomial, et ses conséquences sur le théorème polynomial et sur les séries qui servent au calcul des quantités logarithmiques et exponentielles, démontrées de manière plus exacte que jusqu'ici ». Le livre fait plus de 160 pages.

Pour vous montrer que Bolzano est au moins aussi strict que Cauchy et Abel, voici un exemple des lemmes qui jalonnent la démonstration.

28 so muss genau A = B seyn

Bolzano exprime ce qu'est une limite égale à grand A en écrivant $A+\omega$, où ω peut être rendu aussi petit que n'importe quelle quantité donnée. Le lemme dit : « si dans l'équation $A+\omega=B+\omega_1$, les quantités ω et ω_1 peuvent devenir aussi petites que l'on veut, alors A doit être exactement égale à B ». En clair, Bolzano énonce, et démontre rigoureusement l'unicité de la limite, ce qui n'était venu à l'idée de personne avant lui.

29 Bernard Bolzano (1781–1848)

Mais voilà : Bolzano, Cauchy et la naissance de la rigueur mathématique, il m'a fallu plusieurs histoires pour épuiser le sujet. Alors je vous propose de décider que celle sur la série du binôme s'arrête là.

30 références

Comment? Pas d'anecdote croustillante sur Abel et sa fiancée? Et bien non, j'ai pas eu envie, c'est comme ça.

Vous n'avez qu'à fouiller dans les références, vous les avez sous les yeux!

Der binomische Lehrsatz (1816) Bernard Bolzano (1781–1848)



so muss genau A=B seyn Bolzano, Der binomische Lehrsatz (1816)

§. 27.

Lehnsas. Wenn in der Gleichung A + • = B + •, die Größen •, • so flein werden könneth, als man nur immer will, während A und B unverändert bleiben: so muß genau A = B seon.

Beweis. Denn wären A und B ungleich, so müßte eine derfelden, §. W. A, die größere seon. Man hätte also A = B + D, wo D eine unveränderliche Größe wäre, weil A, B selbst unveränderlich sind. Es wäre also auch B + D + • = B + •; werans D = • • • • .

Und sonach könnte • • nicht kleiner als jede gegedene Größe, (nähmlich nicht kleiner als D) werden, gegen §. 15.

Bernard Bolzano (1781-1848)



références

- J. Dhombres (1987) Les présupposés d'Euler dans l'emploi de la méthode fonctionnelle, Revue d'histoire des sciences, 40(2), 179-202
- H.-H. Körle (2015) Infinite series in a history of analysis, Berlin : de Gruyter
- H. N. Jahnke ed. (2003) A history of analysis, American Mathematical Society
- S. Russ (2004) The mathematical works of Bernard Bolzano, Oxford : University Press
- H. K. Sørensen (2005) Exceptions and counterexamples: understanding Abel's comment on Cauchy's Theorem, Historia Mathematica, 32, 453–480
- A. Stubhaug (2003) Niels Henrik Abel et son époque, Paris : Springer