#### hist-math.fr

#### 0 Les cent volailles

Pourquoi choisir un peintre animalier baroque pour illustrer cette histoire? Aucune raison en particulier, j'aurais pu choisir une autre représentation des mêmes oiseaux, venant de Chine ou de Perse.

Dans l'Europe baroque, comme en Chine ou en Perse, la plupart des oiseaux sont associés à un certain symbolisme, plus ou moins variable selon les pays et les siècles. Vous voulez un exemple? Voici une fable d'Ésope.

#### histoires d'algèbre

Les cent volailles voyages d'une devinette



hist-math.fr Bernard YCART

### 1 Le paon et la grue

« Le paon se moquait de la grue et critiquait sa couleur. Moi, disait-il, je suis vêtu d'or et de pourpre; toi, tu ne portes rien de beau sur tes ailes. – Mais moi, répliqua la grue, je chante tout près des astres et je m'élève dans les hauteurs du ciel; toi, comme les cogs, tu marches sur le sol, avec les poules. »

La morale de la fable est qu'il vaut mieux être illustre sous un vêtement pauvre que de vivre sans gloire, en se paradant dans la richesse.

#### Le paon et la grue Ésope (ca 620–564 av. J.-C.)



## 2 Ésope (ca 620–564 av. J.-C.)

On dirait que Velásquez illustre la fable : il représente Ésope comme un vieil homme plutôt négligé; on n'en sait rien, bien sûr. Ésope est plus ancien que Platon, il se peut qu'il ait été contemporain de Thalès.

Ce qui est sûr, c'est qu'il a inspiré La Fontaine pour ses fables, et Charles Perrault pour ses contes. Mais Ésope lui-même n'avait pas inventé ses fables : elles faisaient partie d'un vieux fond de culture populaire, probablement transmis aux Grecs par les Mésopotamiens.

Le « problème des cent volailles », est un peu comme une fable d'Ésope mathématique : nous allons suivre son énoncé sur plus de dix siècles, de la Chine à l'Europe en passant par l'Inde et la Perse.

Ésope (ca 620–564 av. J.-C.) Diego Velásquez (1599–1660)



#### 3 le problème des cent volailles

Rien ne dit que le problème soit né en Chine, mais sa plus ancienne occurrence attestée vient du classique mathématique de Zhang Qiujian, écrit au cinquième siècle.

Voici l'énoncé.

#### le problème des cent volailles Zhang Qiujian (ca 430–490)



### 4 le problème des cent volailles

le problème des cent volailles Zhang Qiujian (ca 430–490)

Si un coq vaut 5 sapèques, une poule 3 sapèques et 3 poussins 1 sapèque. À condition d'acheter 100 têtes, combien de coqs, de poules et de poussins aura-t-on pour 100 sapèques?

Si un coq vaut 5 sapèques, une poule 3 sapèques et 3 poussins 1 sapèque. À condition d'acheter 100 têtes, combien de coqs, de poules et de poussins aura-t-on pour 100 sapèques?

# 5 le problème des cent volailles

En suivant, l'auteur donne trois réponses, et une méthode.

La méthode explique seulement comment passer d'une réponse à l'autre, ce n'est pas vraiment un algorithme pour trouver les solutions. D'ailleurs si l'énoncé du problème s'est répandu au-delà des frontières et des siècles, les méthodes pour le résoudre, elles, ne se sont pas diffusées aussi bien.

le problème des cent volailles Zhang Qiujian (ca 430–490)

> Réponse 1 : 4 coqs, 18 poules, 78 poussins Réponse 2 : 8 coqs, 11 poules, 81 poussins Réponse 3 : 12 coqs, 4 poules, 84 poussins

Méthode : Augmente les coqs chaque fois de 4, diminue les poules chaque fois de 7 et augmente les poulets chaque fois de 3.

#### 6 un problème d'analyse indéterminée

Mais au fait, quelles méthodes? Le problème posé a deux équations et trois inconnues. Si x, y, z, désignent les trois nombres d'objets, a, b, c leurs coûts unitaires, N leur nombre total et P leur prix total, l'équation de nombre est : x+y+z=N. L'équation de prix est : ax+by+cz=P.

Bien sûr, cette écriture algébrique est totalement anachronique : elle ne s'imposera pas avant le dix-huitième siècle en Europe. De même que la résolution qui suit. Si on tire par exemple z=N-x-y de la première équation et qu'on reporte dans la seconde, on obtient :

$$(a-c)x + (b-c)y = P - cN.$$

Moins d'équations que d'inconnues, donc potentiellement plusieurs solutions, cela s'appelait de l'analyse indéterminée. Le point crucial est que ce sont des entiers que l'on cherche, et même des entiers strictement positifs. La dernière équation est une équation du premier degré à deux inconnues. Ses solutions en entiers relatifs, s'obtiennent par l'algorithme d'Euclide. Selon les cas, le problème initial peut avoir zéro solution, une seule, ou bien plusieurs, il peut même en avoir beaucoup. L'algorithme d'Euclide, Zhang Qiujian ne le connaît pas. Cela ne l'empêche pas de donner les trois seules solutions dans son cas particulier, mais on ne saura jamais comment il les a obtenues.

#### 7 autres données

Les successeurs de Zhang Qiujiang ont varié les énoncés et les problèmes. Sur ce tableau, vous voyez quelques unes des valeurs de paramètres rencontrées dans les manuels chinois.

Ce n'est qu'au dix-neuvième siècle que l'on trouve en Chine la préoccupation de l'énumération exhaustive des solutions, sur un problème un tant soit peu compliqué. La question est d'acheter en tout 160 objets avec 96 onces d'argent. Il y a quatre sortes d'objets, qui coûtent respectivement 9, 7, 5, et 3 dixièmes d'once. L'auteur du manuel trouve 4681 solutions.

## 8 Mahāvīrāchārya

Passons maintenant en Inde. Mahavira, vous le connaissez déjà, vous savez à quel point j'aime son imagination foisonnante quand il s'agit de rédiger des exercices.

Il donne plusieurs versions du problème.

#### un problème d'analyse indéterminée

$$x + y + z = N$$
,  
 $ax + by + cz = P$ .

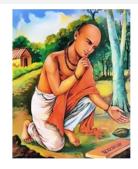
$$(a-c)x + (b-c)y = P - cN.$$

#### autres données

traités chinois de mathématiques,  ${\rm VI^e-XVIII^e}$  siècle

a	b	c	N	P
5	3	1/3	100	100
3	1/3	1/5	100	100
3	5/3	1/5	100	100
5	5/3	1/3	100	100
7/3	5/3	2/3	138	138
3/2	3/5	3/7	138	138
8/13	4/7	6/13	768	384
21	63	28	1463	1463

#### Mahāvīrāchārya <sub>IX<sup>e</sup></sub> siècle



paons, grues, pigeons et cygnes Maḥāvīra, Ganita-sāra-saṅgraha, ca 850



« Les pigeons se vendent à raison de 5 pour 3 paṇas, les grues de 7 pour 5 paṇas, les cygnes de 9 pour 7 paṇas, et les paons de 3 pour 9 paṇas. On a dit à un homme de ramener à ces prix 100 oiseaux pour 100 paṇas, pour l'amusement du fils du roi. »

### 10 paons, grues, pigeons et cygnes

paons, grues, pigeons et cygnes Mahāvīra, Ganita-sāra-saṅgraha, ca 850



Ou encore, avec les mêmes oiseaux :

« À raison de 3 paons pour 2 paṇas, 4 pigeons for 3 paṇas, 5 cygnes pour 4 paṇas, et 6 grues for 5 paṇas, achète, ô mon ami, 72 oiseaux pour 56 panas et ramène-moi les. »

## 11 Śrīdharāchārya

Le maître Sridhara, on n'est pas vraiment sûr de ses dates, il pourrait avoir vécu après Mahavira.

Lui aussi donne plusieurs versions du problème. Il reprend les paons et les grues de Mahavira, puis il remplace les oiseaux par des fruits.

Śrīdharāchārya <sup>IXe</sup>-xe siècle</sup>



## 12 grenades, mangues, et pommes à coque

 $\ll$  Les prix de vente respectifs des grenades, des mangues, et des pommes à coque sont de 1 pour 2 roupies, 5 pour trois roupies, et 2 pour une roupie. Ramène 100 fruits pour 80 roupies.  $\gg$ 

Il donne aussi une version en salaires : « un homme gagne 3 mandas en un jour, une femme un manda et demi, un enfant un demi manda. Si 20 d'entre eux gagnent 20 mandas en un jour, combien y avait-il de chaque? »

grenades, mangues, et pommes à coque Śrīdharāchārya, Pātī-ganita (IX°-X° siècle)







#### 13 le manuscrit de Bakhsali

Ce problème des salaires se retrouve mot pour mot dans le manuscrit de Bakhsali. Selon certains, ce serait le plus ancien manuel indien de mathématiques. Mais les spécialistes donnent des dates qui varient entre le cinquième et le douzième siècle. Bien sûr, on n'en connaît pas l'auteur.

Par rapport aux Chinois, les Indiens ont disposé très tôt d'un algorithme pour résoudre les équations du premier degré en entiers, l'équivalent de l'algorithme d'Euclide. Il l'appelaient Kuttaka, ce qui peut se traduire par « pulvérisateur ». L'algorithme est dû à Aryabhata, à la toute fin du cinquième siècle.

## 14 Bhāskarāchārya (1114–1185)

De sorte que quand Bhaskara, au douzième siècle, reprend le même type d'énoncé, il sait parfaitement le transformer en un problème à deux inconnues, et appliquer le pulvérisateur pour obtenir des solutions.

# 15 Bijaganita

« On peut avoir cinq colombes pour trois drachmes, sept grues pour cinq; neuf oies pour sept, et trois paons, pour neuf : ramène une centaine de ces oiseaux pour cent drachmes, pour satisfaire le prince. »

La seule différence avec Mahavira est que les cygnes ont été remplacés par des oies, mais les données sont exactement les mêmes.

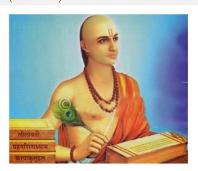
## 16 la conférence des oiseaux (1493)

Venons-en aux Arabes. J'ai choisi comme illustration un magnifique manuscrit enluminé de la « conférence des oiseaux ». Ce recueil de poèmes raconte l'histoire d'une bande d'oiseaux qui partent à la recherche de leur roi. Évidemment c'est une allégorie, et chaque oiseau incarne des qualités ou des défauts des humains, comme dans les fables d'Ésope.

#### le manuscrit de Bakhsali



Bhāskarāchārya (1114–1185)



Bijaganita Bhāskarāchārya (1114–1185)

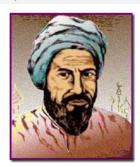


la conférence des oiseaux (1493) Farid ud-Din Attar, Mantiq-ut-Tayr (1177)



Abū Kāmil (ca 830-900)

Abu-Kamil est le premier à traiter le problème de manière totalement rigoureuse. Quand il écrit son Kitab al-Tair, c'est-à-dire le « livre des oiseaux », il a un peu de mal à cacher son agacement.



### 18 ils échangent des erreurs et des conjectures

« Je connais un type de problème que les puissants et les humbles, les savants et les ignorants trouvent tous captivant, nouveau et attirant. Mais quand ils en discutent les solutions entre eux, ils échangent des erreurs et des conjectures, car ils n'y voient aucun principe ni système. »

ils échangent des erreurs et des conjectures Abū Kāmil, Kitāb al-ṭair (ca. 870)



### 19 2676 réponses valides

« Beaucoup, autant parmi les puissants que les humbles m'interrogent sur ces questions, et je leur ai donné la réponse, quand il y en avait une; mais souvent il y en avait deux, trois, quatre ou plus, et souvent il n'y en avait aucune. Une fois, un problème se présenta et je le résolus, trouvant de nombreuses solutions; je le traitai à fond, et il avait 2676 réponses valides. Je m'émerveillai de cela, mais je m'aperçus quand j'en parlai, qu'on me prenait pour un simple d'esprit ou un incompétent, et les étrangers me regardaient d'un air soupçonneux. »

2676 réponses valides Abū Kāmil, Kitāb al-ṭair (ca. 870)



#### 20 la vérité deviendra évidente

« C'est pourquoi je décidai d'écrire un livre, pour être mieux compris. Ceci dissipera les calomnies et les conjectures. Je justifierai mes assertions et la vérité deviendra évidente. »

Le premier problème que traite Abu-Kamil a une solution unique. C'est le suivant.

« On te donne 100 drachmes pour acheter 100 volailles de trois types. Un canard coûte 5 drachmes, 20 moineaux coûtent 1 drachme, et une poule coûte 1 drachme. »

la vérité deviendra évidente Abū Kāmil, Kitāb al-tair (ca. 870)



#### 21 la clé de l'arithmétique (Mifta al-Hisab)

Cinq siècles plus tard, c'est presque le même énoncé que al-Kashi donne dans sa « Clé de l'Arithmétique ».

« Un canard vaut quatre pièces, cinq moineaux une pièce et un coq coûte une pièce. Quelqu'un achète 100 oiseaux pour un total de 100 pièces. Combien d'oiseaux de chaque espèce peut-il acheter? »

la clé de l'arithmétique (Mifta al-Hisab) Jamshud al-Kāshī (1380–1429)



## 22 abrégé d'algèbre

Entre temps, un certain Ibn Badr, avait innové sur le type de produit vendu. Il était de Séville en Espagne, donc très loin de Samarcande où vivait al-Kashi.

« On vend trois sortes de céréales : du blé, de l'orge, et du millet. Une mesure de blé se vend pour quatre unités, une mesure d'orge pour deux unités et une mesure de millet pour une demi unité. On vend cent mesures pour cent unités. Combien de mesures de blé, d'orge, et de millet a-t-on vendu? »

Remarquez que la formulation permet d'éventuelles solutions fractionnaires, et non plus seulement entières.

abrégé d'algèbre Muhammad Ibn Badr (XIII<sup>e</sup> siècle



### 23 Alcuin (735–804)

Après les Chinois, les Indiens, les Arabes, nous voici rendus en Europe, avec Alcuin : c'est le personnage du milieu sur cette image. C'était un savant anglais que Charlemagne avait attiré à sa cour ; il y était chargé de la culture et de l'éducation. Il a écrit un petit recueil de 56 exercices amusants ; l'ancêtre des récréations mathématiques.

Son titre : les « Propositions pour affuter les jeunes » (de acuendo juvenes). Les problèmes de volailles y comptent pas moins de sept énoncés. C'est d'autant plus remarquable que Alcuin écrivait vers l'an 800, c'est-à-dire environ un siècle avant Abu-Kamil. On ignore d'où il a pu tirer ses énoncés. L'un d'eux pourtant semble donner une indication.

Alcuin (735-804)



### 24 Propositio XXXVIIII: de quodam emptore in oriente

« Un acheteur en Orient.

Un certain homme souhaitait acheter 100 animaux pour 100 sous en Orient. Il ordonna à son domestique de payer cinq sous pour un chameau, un sou pour un âne, et un sou pour vingt moutons. Que dise qui le souhaite, combien de chameaux, d'ânes et de moutons furent obtenus pour 100 sous lors de cet achat. »

Parmi les six autres énoncés du même recueil, trois concernent un maître avec un certain nombre de serviteurs et autant de mesures de blé à distribuer.

Ailleurs, ce sont cent porcs que l'on achète pour cent deniers, et on distingue les verrats, les truies et les porcelets. Dans la proposition 38, on achète encore 100 animaux pour cent sous, mais ce sont des chevaux, des vaches et des moutons.

Enfin dans la proposition 47, un évêque distribue 12 pains à 12 clercs, de manière que les prêtres en aient deux, les diacres un demi et les lecteurs un quart.

### 25 Liber Abaci (1202)

Chez Fibonacci quatre siècles plus tard, la filiation arabe ne fait aucun doute et elle est assumée. Fibonacci énonce donc, comme Abu-Kamil, des problèmes d'oiseaux.

« Un certain homme achète trente oiseaux qui sont des perdrix, des pigeons et des moineaux, pour 30 deniers. Il achète une perdrix pour 3 deniers, un pigeon pour 2 deniers, et deux moineaux pour 1 denier. »

Dans le problème suivant, ce ne sont plus que 12 oiseaux pour 12 deniers, le prix des oiseaux a lui aussi baissé. Ensuite, il rajoute des colombes pour compliquer le problème.

À la suite de Fibonacci, les auteurs d'arithmétiques commerciales de la Renaissance reprennent la question : à la fin du quinzième, Nicolas Chuquet en France et Luca Pacioli, puis Tartaglia au seizième siècle. Il faut attendre le début du dixseptième siècle pour une vision plus mathématique.

## 26 Regola della quantita (1618)

Le premier est un Italien de Bologne : Pietro Antonio Cataldi, dans un tout petit opuscule intitulé Règle de la quantité, ou chose de chose. Depuis Pacioli, le mot italien Cosa, ou chose en Français, désignait la notion d'inconnue, notre x dans une équation si vous voulez.

Cataldi reprend les problèmes classiques, en particulier ceux de Pacioli. Il commence par trois sortes d'oiseaux, des faisans, des perdrix et des grives, à 100 pour 100 lires. Il traite quelques autres cas à trois inconnues, puis il passe à un problème à quatre inconnues : toujours 100 animaux pour 100 écus, avec des moutons, des chèvres, des porcs et des ânes.

Propositio XXXVIIII: de quodam emptore in oriente Alcuin, Propositiones ad acuendos juvenes (ca 794)

Quidam homo voluit de C solidis animalia promiscua emere C in oriente; qui jussit famulo suo, ut camelum V solidis acciperet; asinum solido I. XX oves in solido compararet. Dicat, qui vult, quot cameli, vel asini, sive oves in negotio C solidum fuerunt?

Liber Abaci (1202) Leonardo Pisano (Fibonacci) (ca 1170–1250)



Regola della quantita (1618) Pietro Antonio Cataldi (1548–1628)



La nouveauté est le souci d'énumérer toutes les solutions, et de justifier qu'il les a toutes trouvées. Dans le cas des trois sortes d'oiseaux que vous voyez ici, il n'y a que 5 solutions.

Mais pour les ânes, les chèvres, les moutons et les porcs, les solutions sont beaucoup plus nombreuses et Cataldi les détaille sur plusieurs pages.

Faisans, grives et perdrix Cataldi, Regola della quantita (1618)

Tordi	Perdici
15	18
30	61
45	U) TO 43 . 0
60	24
75	7 11 5 11
	15 30 45 60

#### 28 Claude-Gaspard Bachet de Méziriac (1581–1638)

Claude-Gaspard Bachet de Méziriac (1581-1638)

Le suivant sur la liste est Bachet de Méziriac. Il a compris comment calculer les coefficients dans une identité de Bézout, ce qui est l'outil de base pour résoudre un problème indéterminé du premier degré.



#### Problèmes plaisans et délectables (1624) 29

Mais il trompe son monde en présentant son livre d'arithmétique comme des « problèmes plaisants et délectables », donc des récréations mathématiques, même si la dénomination n'existe pas encore.

Son énoncé n'est pas vraiment original, on le trouve déjà chez plusieurs de ses prédécesseurs. Le voici.

Problèmes plaisans et délectables (1624)

#### PROBLEMES PLAISANS DELECTABLES, QVI

se font par les nombres.

Partie recueillis de diners Ambeurs, partie innentez de nouueau auec leur demonstration. Par CLAVDE GASPAR BACHET, Sicut de Meziriac.

Suonde Edition, reusus, corriede, & augmentée de plusieurs propositions, & de plusieurs Problemes, par le mesme Autheur.

Tres-veile pour toutes forces de personnes curienses, qui se sernent de l'Arithmetique, & Mathematique.

#### 30 41 personnes en un banquet

« Il y a 41 personnes dans un banquet, tant hommes, que femmes et enfants, qui en tout dépensent 40 sous, mais chaque homme paye 4 sous, chaque femme 3 sous, chaque enfant 4 deniers, c'est-à-dire un tiers de sou. Je demande combien d'hommes, combien de femmes, combien d'enfants. »

Avant de se lancer dans la démonstration, il nous prévient charitablement.

« Toutefois, j'avertis le lecteur que s'il n'est pas expert en algèbre, il ne se travaille pas pour comprendre ce qui suit; car ce lui serait peine perdue. »

Toujours est-il que grâce à Cataldi puis à Bachet, le problème des cent volailles et plus généralement l'analyse indéterminée, vont quitter le domaine vaguement honteux des mathématiques récréatives, et acquérir droit de cité parmi les mathématiques sérieuses, celles qu'on enseigne dans les manuels.

Je pourrais comme d'habitude vous sortir le livre l'algèbre d'Euler, mais vous savez déjà tout le bien que j'en pense. Alors pour changer, c'est un autre professeur, lui aussi assez impressionnant, qui va clore cette histoire.

## 31 Nicholas Saunderson (1682–1739)

Il s'agit de Nicholas Saunderson. Rendu aveugle par la petite vérole à l'âge de un an, cela ne l'a pas empêché de mener une brillante carrière de mathématicien : chaire lucasienne à Cambridge, membre de la Royal Society, il était respecté des plus grands en son temps, en premier lieu de Newton lui-même.

Dans ses éléments d'algèbre, il explique sa méthode pour faire des mathématiques en utilisant son sens du toucher : c'est ce qu'il appelle son « arithmétique palpable ». Les « Éléments d'algèbre », parus après la mort de Saunderson, ont été traduits en français en 1756.

## 32 Elémens d'Algèbre (1756)

L'analyse indéterminée y a sa place, comme vous le voyez avec ce problème d'auberge qui ressemble au banquet de Bachet. Les deux encadrés bleus suffisent à se rendre compte que le traitement algébrique pourrait être écrit de nos jours.

41 personnes en un banquet Bachet de Méziriac, Problèmes plaisans et délectables (1624)

> Il y a 41. personnes en vn banquet tant hommes que semmes v enfans, qui en tout despendent 40. soubz, mais chasque homme paye 4. soubz chasque semme 3. soubz chasque enfant 4. deniers. Ie demande combien il y a d'hommes, combien de semmes, combien d'enfans.

Nicholas Saunderson (1682–1739)



Elémens d'Algèbre (1756) Nicholas Saunderson (1682–1739)

218. Vingt personnes, consistant en bommes, semmes, & enfans, payent vingt schellings pour un repas, les bommes donnant quatre schellings partête, les semmes six sous par tête, & les enfans trois sous par tête: combien y avoit il d'hommes, combien de semmes, & combien d'enfans?

SOLUTION.

Mettez x, y & z pour le nombre des hommes, des femmes & des enfans respectivement, & par consequent  $4x + \frac{y}{z} + \frac{z}{z}$  pour le nombre

#### 33 références

Tenez puisque nous en sommes aux banquets et aux oiseaux, voici une dernière fable d'Ésope pour la route.

« Un milan persécutait les pigeons d'un colombier : chaque instant il fondait sur eux et enlevait l'un des leurs. Aussi prièrent-ils un faucon de s'installer dans le colombier, pour les défendre contre leur ennemi. Mais ils ne tardèrent pas à se repentir de leur folie : le faucon faisait en un jour plus de victimes que le milan n'en avait fait en un an. »

Moralité : euh... aucune! pourquoi?

#### références

- J.-C. Martzloff (1988) Histoire des mathématiques chinoises, Paris : Masson
- F. Patte (2006) L'algèbre en Inde au XII<sup>e</sup> siècle, Comptes rendus des séances de l'Académie des Inscriptions et Belles-Lettres, 150(4), 1897–1915
- $\bullet$  R. Rashed (2012)  $Ab\bar{u}$   $K\bar{a}mil,$  Algèbre et analyse diophantienne, Berlin : De Gruyter
- H. Selin (2008) Encyclopaedia of the history of science, technology, and medicine in non-western cultures, Dordrecht: Kluwer
- J. Sésiano (1999) Une introduction à l'histoire de l'algèbre, résolution d'équations des Mésopotamiens à la Renaissance, Lausanne : Presses polytechniques et universitaires romandes
- $\bullet$ R. P. van Hée (1913) Les cent volailles ou l'analyse indéterminée en Chine, <br/> T'oung~Pao,~14,~203-210