

## 0 Vivre libre ou mourir

Le héros du jour, c'est Alexandre Théophile Vandermonde. Il est né en 1735, mort le premier janvier 1796, mais on ne sait pas grand chose de plus sur sa vie. Je n'ai même pas de portrait à vous montrer. On a bien deux descriptions contemporaines, mais vous allez voir, elles sont plutôt douteuses.

La première tient en trois phrases dans une lettre de l'astronome suédois Lexell, qui avait visité Paris et l'Académie royale des sciences en 1780.

### histoires d'algèbre

#### Vivre libre ou mourir

le déterminant de Vandermonde



hist-math.fr

Bernard YCART

## 1 Lettre à Johann-Albrecht Euler (7 janvier 1781)

« M. Vandermonde passe pour être un homme de talent, quoiqu'il n'en ait pas la mine. Sa manière de s'exprimer n'est pas trop claire. Il est petit et son front ne passerait jamais pour le front d'un mathématicien. »

J'ignore ce que doit être le front d'un mathématicien, mais Lexell lui semblait le savoir. L'autre témoignage sur Vandermonde est encore plus suspect.

### Lettre à Johann-Albrecht Euler (7 janvier 1781)

Anders Johann Lexell (1740–1784)

M-r. Vandermonde passe pour être un homme de talent, quoiqu'il n'en a pas la mine. Sa manière de s'exprimer n'est pas trop claire. Il est petit et son front ne passerait jamais pour le front d'un Mathématicien.

## 2 Manon Roland (1754–1793)

Il figure dans les mémoires que Madame Roland a écrit en prison avant son exécution. Comme on s'y attend, elle charge autant qu'elle peut tous ceux qu'elle a pu connaître et qu'elle place, à tort ou à raison, du côté de la Terreur.

Voici le passage qui concerne Vandermonde.

### Manon Roland (1754–1793)



### 3 Comme la science figure mal

« Par quelle saillie d'imagination, la mienne rappelle-t-elle ici Vandermonde? Je n'ai jamais rencontré des yeux aussi faux, et qui accusassent plus juste la nature de l'esprit du personnage. On dirait que celui-ci a le sien coupé net en deux parts; avec l'une, on peut commencer tous les raisonnements; mais il est impossible d'en suivre aucun avec l'autre, et de tirer de l'ensemble un bon résultat. Comme la science figure mal dans une tête ainsi organisée! »

### 4 Nous voulons l'ordre par la raison

« Aussi Vandermonde, académicien d'ailleurs, ami de Pache et de Monge, se vantait de servir de conseil à ce dernier, et d'être appelé sa femme. Il me disait un jour, en parlant des cordeliers (de la secte desquels il avouait être), par opposition aux personnes qui les traitaient d'enragés: « Nous voulons l'ordre par la raison, et vous êtes du parti de ceux qui le veulent par la force. » Après cette définition, je n'ai plus rien à dire des travers d'esprit d'un tel homme. »

Qu'est-ce qui est vrai là-dedans? Que Vandermonde, par amitié pour Monge ou par convictions personnelles, ait professé des opinions plutôt à gauche pendant la Révolution, est exact. On ignore s'il a été, comme l'affirme Madame Roland, membre du club extrémiste des Cordeliers.

N'ayez pas peur, je ne vais pas me lancer dans l'histoire de la Révolution française en cinq minutes. Je vais juste saisir l'occasion pour vous montrer quelques gouaches de Lesueur. Leur fraîcheur et leur simplicité donnent parfois une meilleure idée de l'ambiance révolutionnaire qu'une longue analyse.

### 5 Démolition de la Bastille

Bon allons-y; 1789, la prise de la Bastille: vous y êtes? Vandermonde a cinquante-quatre ans. C'est un académicien reconnu. Oh pas forcément pour les mathématiques, qui sont bien loin de ses préoccupations. Pas plus que pour la musique. Violoniste lui-même, il a écrit en 1780 un traité d'harmonie, un peu critiqué, puis rapidement oublié.

Il est surtout devenu, en 1783 le conservateur de la collection de machines de Vaucanson. Comme il est aussi commissaire de l'Administration du commerce, il est appelé à expertiser les machines nouvelles dans les ateliers de Paris.

#### Comme la science figure mal

Manon Roland, Appel à l'impartiale postérité (1793)

Par quelle saillie d'imagination la mienne rappelle-t-elle ici Vandermonde? je n'ai jamais rencontré des yeux aussi faux, et qui accusassent plus juste la nature de l'esprit du personnage. On dirait que celui-ci a le sien coupé net en deux parts; avec l'une, on peut commencer tous les raisonnemens; mais il est impossible d'en suivre aucun avec l'autre, et de tirer de l'ensemble un bon résultat. Comme la science figure mal dans une tête ainsi organisée! Aussi Vandermonde, académicien d'ailleurs, ami de

#### Nous voulons l'ordre par la raison

Manon Roland, Appel à l'impartiale postérité (1793)

ganisée! Aussi Vandermonde, académicien d'ailleurs, ami de Pache et de Monge, se vantait de servir de conseil à ce dernier, et d'être appelé sa femme. Il me disait un jour, en parlant des cordeliers (de la secte desquels il avouait être), par opposition aux personnes qui les traitaient d'enragés: « Nous voulons l'ordre par la raison, et vous êtes du parti de ceux qui le veulent par la force. » Après cette définition, je n'ai plus rien à dire des travers d'esprit d'un tel homme. Mais puisque j'ai parlé d'un académi-

#### Démolition de la Bastille

Jean-Baptiste Lesueur (1749-1826)

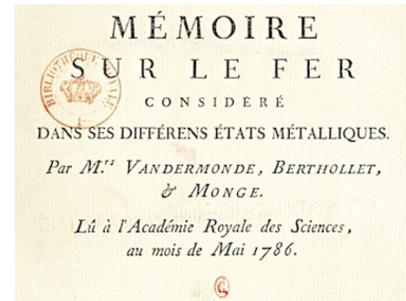


## 6 Mémoire sur le fer (1786)

Et puis, il a participé à ce mémoire sur le fer de 1786. Berthollet est chimiste. Il travaille depuis quelques années à refaire les expériences de Priestley et Lavoisier sur l'oxygène. Monge est mathématicien, mais lui aussi a fait des expériences sur l'oxygène. Vandermonde a participé, probablement par amitié pour Monge.

### Mémoire sur le fer (1786)

Par M<sup>rs</sup> Vandermonde, Berthollet et Monge



## 7 Marat porté en triomphe

En cinq ans, la Révolution passe des États généraux convoqués par le Roi, à la monarchie constitutionnelle, puis à la République et à la Terreur. Au moins dans la capitale, l'exaltation révolutionnaire est entretenue par des agitateurs extrémistes, comme Marat, ou Hébert.

### Marat porté en triomphe

Jean-Baptiste Lesueur (1749-1826)



## 8 Vivre libre ou mourir

Mais pour beaucoup, cette exaltation est sincère. « La liberté ou la mort », « Vivre libre ou mourir », sont les slogans répétés dans les manifestations.

### Vivre libre ou mourir

Jean-Baptiste Lesueur (1749-1826)



## 9 Club patriotique de femmes

On forme des clubs, y compris de femmes, qui commentent passionnément les décisions de l'Assemblée Législative, puis de la Convention Nationale.

### Club patriotique de femmes

Jean-Baptiste Lesueur (1749-1826)



## 10 Départ d'un citoyen volontaire

La patrie est en danger, alors on s'enrôle dans l'enthousiasme... et les libations.

Départ d'un citoyen volontaire

Jean-Baptiste Lesueur (1749-1826)



## 11 Citoyens chantant l'hymne des Marseillais

On crie et on chante beaucoup; surtout ce nouvel hymne de Rouget de Lisle, que les volontaires venus de Marseille ont popularisé dans leur marche.

Citoyens chantant l'hymne des Marseillais

Jean-Baptiste Lesueur (1749-1826)



## 12 Atelier de fabrication de fusils

Chacun fait de son mieux pour participer. Des ateliers de fabrication de poudre et de fusils s'ouvrent un peu partout.

Atelier de fabrication de fusils

Jean-Baptiste Lesueur (1749-1826)



## 13 Spéculation sur les assignats

Comme dans tous les temps troublés, les profiteurs s'enrichissent; sur les biens confisqués, et aussi en spéculant sur la nouvelle monnaie de papier: les assignats.

Spéculation sur les assignats

Jean-Baptiste Lesueur (1749-1826)



## 14 Tribunal de prison au 2 et 3 septembre

Pour beaucoup, et pas seulement dans l'ancienne noblesse, c'est un temps où l'arbitraire et les mouvements de foule décident parfois de la vie ou de la mort.

La crainte est partout. Et personne ne songerait, pas plus à l'Académie des sciences que dans d'autres milieux, à se soustraire aux réquisitions patriotiques.

### Tribunal de prison au 2 et 3 septembre

Jean-Baptiste Lesueur (1749-1826)



## 15 Avis sur la fabrication de l'acier (1793)

Alors Vandermonde, Monge et Berthollet reprennent leur mémoire de 1786, et en fournissent une version directement applicable, sous la forme de cet avis aux ouvriers en fer sur la fabrication de l'acier, publié par ordre du Comité de salut public.

L'introduction vous donnera une bonne idée de l'ambiance de l'époque.

« Pendant que nos frères prodiguent leur sang contre les ennemis de la liberté, pendant que nous sommes en seconde ligne derrière eux, amis, il faut que notre énergie tire de notre sol toutes les ressources dont nous avons besoin, et que nous apprenions à l'Europe que la France trouve dans son sein tout ce qui est nécessaire à son courage. »

### Avis sur la fabrication de l'acier (1793)

Vandermonde, Monge, Berthollet

A V I S  
AUX OUVRIERS EN FER,  
SUR LA FABRICATION  
DE L'ACIER, 8826  
Publié par ordre du Comité de salut public.

**P**ENDANT que nos frères prodiguent leur sang contre les ennemis de la liberté, pendant que nous sommes en seconde ligne derrière eux, amis, il faut que notre énergie tire de notre sol toutes les ressources dont nous avons besoin, et que nous apprenions à l'Europe que la France trouve dans son sein tout ce qui est nécessaire à son courage.

## 16 Avis sur la fabrication de l'acier (1793)

« L'acier nous manque, l'acier qui doit servir à fabriquer les armes dont chaque citoyen doit se servir pour terminer enfin la lutte de la liberté contre l'esclavage.

Jusqu'à présent, des relations amicales avec nos voisins, et surtout les entraves qui faisaient languir notre industrie, nous ont fait négliger la fabrication de l'acier. L'Angleterre et l'Allemagne en fournissaient à la plus grande partie de nos besoins; mais les despotes de l'Angleterre et de l'Allemagne ont rompu tout commerce avec nous. Eh bien! faisons notre acier.

Nous allons vous présenter quelques notions qui doivent vous guider dans une entreprise généreuse pour ce moment, utile à notre industrie pour l'avenir. »

### Avis sur la fabrication de l'acier (1793)

Vandermonde, Monge, Berthollet

L'acier nous manque, l'acier qui doit servir à fabriquer les armes dont chaque citoyen doit se servir pour terminer enfin la lutte de la liberté contre l'esclavage.

Jusqu'à présent, des relations amicales avec nos voisins, et sur-tout les entraves qui faisaient languir notre industrie, nous ont fait négliger la fabrication de l'acier. L'Angleterre et l'Allemagne en fournissaient à la plus grande partie de nos besoins; mais les despotes de l'Angleterre et de l'Allemagne ont rompu tout commerce avec nous. Eh bien! faisons notre acier.

Nous allons vous présenter quelques notions qui doivent vous guider dans une entreprise généreuse pour ce moment, utile à notre industrie pour l'avenir.

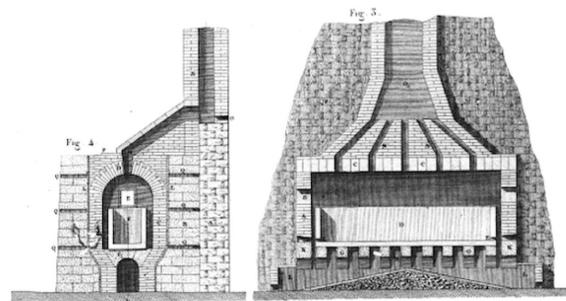
## 17 Avis sur la fabrication de l'acier (1793)

Et effectivement un mode d'emploi est donné, accompagné des plans pour fabriquer les fourneaux qui transformeront le fer en acier.

Pourquoi faut-il de l'acier ? Pour fabriquer des armes, bien sûr.

### Avis sur la fabrication de l'acier (1793)

Vandermonde, Monge, Berthollet



## 18 Procédés de la fabrication des armes blanches (1793)

Et à l'automne 1793, Vandermonde est envoyé dans une usine du Bas-Rhin, pour étudier les procédés de fabrication des baïonnettes, des sabres et des baguettes à fusil.

### Procédés de la fabrication des armes blanches (1793)

Vandermonde, Rauch

*Commencé par ordre du comité de salut public, le 3 Vendémiaire, et terminé le 16 Brumaire, l'an second de la République française, une et indivisible, au Klingenthal, près Obernheim, département du Bas-Rhin.*



VANDERMONDE.

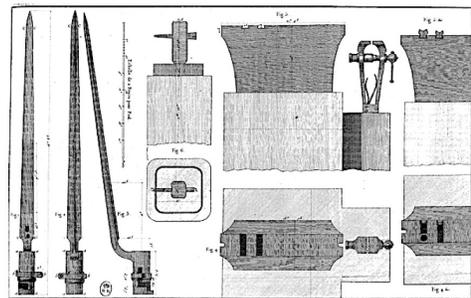
RAUCH, adjoint pour la partie des dessins.

## 19 Procédés de la fabrication des armes blanches (1793)

Il est accompagné d'un dessinateur, qui fournit les illustrations nécessaires.

### Procédés de la fabrication des armes blanches (1793)

Vandermonde, Rauch



## 20 Arrestation de Robespierre (27 juillet 1794)

Arrive le 9 thermidor de l'an deux, la chute de Robespierre et la fin de la Terreur. Alors une autre vague de répression, touche tous ceux que l'on qualifie de Terroristes.

Six mois plus tard, ouvre l'École Normale de l'an III. Ne faites pas semblant de ne pas connaître : je vous en ai déjà parlé. Berthollet, Monge et Vandermonde font partie des professeurs. Berthollet pour la chimie, Monge pour sa géométrie descriptive, et Vandermonde... pour l'économie politique.

Les trois se sont signalés par les services rendus sous la Terreur au Comité de salut public, et tentent de faire profil bas. Vandermonde, lors de son premier cours, parle de lui à la troisième personne et en appelle au soutien de ses étudiants.

### Arrestation de Robespierre (27 juillet 1794)

Jean-Pierre-Antoine Tassaert (1765-1835)



## 21 Séance de l'École Normale (19 février 1795)

« Déjà des malveillants cherchent à soulever l'opinion contre celui qui a été choisi pour fournir des textes à votre discussion. Citoyens, son embarras est extrême : la faiblesse de son organe, l'inhabitude de parler en public, la confusion des notes qu'il n'avait recueillies que pour lui, et qu'il n'a pas le temps de ranger dans un ordre systématique, tout l'intimide.

S'il faut encore qu'il soit victime de la calomnie, si vous ne le couvrez pas de votre bienveillance, il vous deviendra tout-à-fait inutile : car il faut une entière liberté d'esprit pour traiter les questions délicates de l'économie politique. »

Il va pourtant les traiter ces questions délicates, de manière résolument moderne, se plaçant dans le camp du libéralisme économique et défendant en particulier l'expérience des assignats.

### Séance de l'École Normale (19 février 1795)

Alexandre-Théophile Vandermonde (1735-1796)

Déjà des malveillants cherchent à soulever l'opinion contre celui qui a été choisi pour fournir des textes à votre discussion. Citoyens, son embarras est extrême : la faiblesse de son organe, l'inhabitude de parler en public, la confusion des notes qu'il n'avait recueillies que pour lui, et qu'il n'a pas le temps de ranger dans un ordre systématique, tout l'intimide.

S'il faut encore qu'il soit victime de la calomnie, si vous ne le couvrez pas de votre bienveillance, il vous deviendra tout-à-fait inutile : car il faut une entière liberté d'esprit pour traiter les questions délicates de l'économie politique.

## 22 Sur les fabriques et le commerce de Lyon (1795)

Ceci est sa dernière production officielle : un rapport sur les fabriques et le commerce de Lyon, par le Citoyen Vandermonde, Professeur d'Économie Politique à l'École Normale.

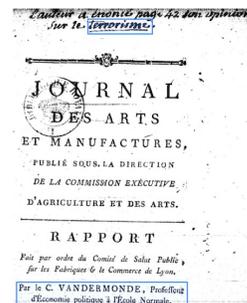
Vandermonde est malade, il souffre de phtisie, c'est-à-dire de tuberculose. Il est dans les derniers mois de sa vie. Regardez la phrase manuscrite en haut. Elle est probablement écrite de sa propre main. « L'auteur a énoncé page 42 son opinion sur le terrorisme ». Effectivement, il fait tout ce qu'il peut dans le texte pour se démarquer des excès révolutionnaires, comme il est de bon ton au moment où il écrit.

Et les mathématiques dans tout ça ? Vandermonde n'y pense probablement plus du tout. Au début des années 1770, elles lui ont servi de tremplin pour être nommé à l'Académie royale des sciences. Il était courant à l'époque pour les jeunes gens ambitieux, de commencer par envoyer un ou deux mémoires de mathématiques, qui s'ils étaient acceptés, conduisaient à une place d'adjoint, suivie ensuite éventuellement de promotions aux grades d'associé puis de pensionnaire.

Vandermonde n'a écrit que quatre mémoires de mathématiques dans sa carrière, tous lus à l'Académie entre 1770 et 1772. C'était relativement courant à l'époque. Après tout, Buffon, Réaumur, Bougainville, ont commencé par les mathématiques pour faire tout autre chose ensuite. Ce qui est original dans le cas de Vandermonde, c'est que chacun de ses quatre mémoires suffisait à faire passer son nom à la postérité. Les voici par ordre chronologique.

### Sur les fabriques et le commerce de Lyon (1795)

Alexandre-Théophile Vandermonde (1735-1796)



## 23 Mémoire sur la résolution des équations (1770)

Ce premier mémoire, lu en novembre 1770, est considéré comme le plus important dans l'histoire des mathématiques. Vandermonde y relie les racines d'une équation polynomiale aux fonctions symétriques de ces racines. Ce faisant, il reconnaît l'importance des combinaisons de fonctions symétriques dans la résolubilité des équations par radicaux. C'est ce qui mènera, au début du siècle suivant, à la démonstration de l'impossibilité pour l'équation du cinquième degré, puis à la théorie des groupes.

Lagrange, a publié peu après à Berlin un mémoire important sur le même sujet. Quelques années plus tard, il écrit à Condorcet : « Monsieur de Vandermonde me paraît un très grand analyste, et j'ai été très enchanté de son travail sur les équations ».

## 24 Mémoire sur l'élimination (1771)

Le second mémoire, lu deux mois après le précédent, introduit la théorie des déterminants. C'est de ce mémoire que vient la dénomination de « déterminant de Vandermonde », même s'il n'y figure pas vraiment. Je vous raconterai pourquoi dans un moment.

## 25 Remarque sur les problèmes de situation (1771)

Le troisième mémoire porte sur des mathématiques curieuses, celles qui ont démarré avec Leibniz, puis Euler, en partant du jeu de solitaire, et des déplacements de cavalier aux échecs. Vandermonde, lui, se pose en plus un problème concret : comment noter l'ordre dans lequel sont entrelacés les fils quand on fait une tresse, un réseau ou des nœuds. À cause de ces remarques, Vandermonde est considéré aujourd'hui comme le fondateur de la théorie des nœuds.

### Mémoire sur la résolution des équations (1770)

Alexandre-Théophile Vandermonde (1735–1796)

#### M É M O I R E S U R L A R É S O L U T I O N D E S É Q U A T I O N S.\*

Par M. V A N D E R M O N D E.

**E**NTRE les Ouvrages faits depuis quelques années sur la résolution générale des Équations, les plus remarquables sont le Mémoire de M. Euler dans le *Tome IX des nouveaux Commentaires de Pétersbourg*, & celui de M. Bézout, dans le volume de cette Académie pour l'année 1765. Il suffit de consulter ces deux excellens Mémoires pour prendre une idée des progrès des analystes en cette matière, & des difficultés de tout genre qui restent à furmonter. Il m'a paru qu'une partie des difficultés

### Mémoire sur l'élimination (1771)

Alexandre-Théophile Vandermonde (1735–1796)

#### M É M O I R E S U R L'É L I M I N A T I O N.\*

Par M. V A N D E R M O N D E.

**L**E terme de toutes les Recherches générales sur l'Élimination des inconnues dans les équations algébriques, ou sur l'art de ramener les équations qui renferment plusieurs inconnues, à des équations qui n'en renferment qu'une, seroit d'obtenir une formule d'élimination générale & unique, sous la forme la plus concise & la plus commode, & où le nombre d'équations & leurs degrés fussent désignés par des lettres indéterminées. Nous sommes sans doute très-éloignés

### Remarque sur les problèmes de situation (1771)

Alexandre-Théophile Vandermonde (1735–1796)

#### R E M A R Q U E S S U R L E S P R O B L È M E S D E S I T U A T I O N.

Par M. V A N D E R M O N D E.

<sup>4</sup> Mai 1771. **Q**UELLES que soient les circonvolutions d'un ou de plusieurs fils dans l'espace, on peut toujours en avoir une expression par le calcul des grandeurs; mais cette expression ne seroit d'aucun usage dans les Arts. L'ouvrier qui fait une tresse, un réseau, des nœuds, ne les conçoit pas par les rapports de grandeur, mais par ceux de situation: ce qu'il y voit, c'est l'ordre dans lequel sont entrelacés les fils. Il seroit donc utile d'avoir un système de calcul plus conforme à la marche de l'esprit de l'ouvrier, une notation qui ne représentât que l'idée qu'il se forme de son ouvrage, & qui pût suffire pour en retracer un semblable dans tous les temps.

## 26 Mémoire sur des irrationnelles de différens ordres (1772)

Vient enfin ce dernier mémoire sur les irrationnelles, où Vandermonde étudie des généralisations des factorielles. On y trouve en particulier la formule de récurrence sur les coefficients combinatoires, qui s'appelle toujours formule de Vandermonde.

### Mémoire sur des irrationnelles de différens ordres (1772)

Alexandre-Théophile Vandermonde (1735–1796)

**M É M O I R E**  
SUR DES  
**IRRATIONNELLES DE DIFFÉRENS ORDRES**  
AVEC  
UNE APPLICATION AU CERCLE.  
Par M. VANDERMONDE.

LORSQU'APRÈS être convenu de prendre  $p^n$  pour symbole du produit de  $n$  facteurs  $p \cdot p \cdot p \cdot p \dots$  on est venu à supposer le nombre  $n$  fractionnaire, on a dû reconnoître aussitôt les usages multipliés de cette expression irrationnelle, & la nécessité de l'introduire dans le calcul. Il étoit clair que, dans ce cas,  $p^n$  ne devoit pas d'être le terme correspondant à l'indice  $n$  dans une suite géométrique; qu'il étoit toujours la somme des suites en  $n$  &  $p$  qu'on avoit trouvées dans

## 27 Mémoire sur l'élimination (1771)

Mais revenons-en aux déterminants. Au début de son mémoire, Vandermonde décrit ses notations pour un système général d'équations. Comme vous le voyez, chaque coefficient est noté par des nombres superposés, dont l'un note le numéro de l'équation, l'autre le numéro de l'inconnue.

### Mémoire sur l'élimination (1771)

Alexandre-Théophile Vandermonde (1735–1796)

Je suppose que l'on représente par 1, 1, 1, &c. 2, 2, 2, &c. 3, 3, 3, &c. &c. autant de différentes quantités générales, dont l'une quelconque soit  $a^{\alpha}$ , une autre quelconque soit  $\beta^{\beta}$ , &c. & que le produit des deux soit désigné à l'ordinaire par  $a^{\alpha} \cdot \beta^{\beta}$ .

Des deux nombres ordinaux  $\alpha$  &  $a$ , le premier, par exemple, désignera de quelle équation est pris le coefficient  $a^{\alpha}$ , & le second désignera le rang que tient ce coefficient dans l'équation, comme on le verra ci-après.

## 28 Mémoire sur l'élimination (1771)

Pas question de noter les déterminants sous forme de tableaux carrés comme nous. La notation est purement symbolique, et la définition est inductive. C'est le développement par rapport à une colonne tel que nous le connaissons.

### Mémoire sur l'élimination (1771)

Alexandre-Théophile Vandermonde (1735–1796)

$$\frac{a^{\alpha} \beta^{\beta}}{a^{\alpha} b^{\beta}} = \frac{a^{\alpha} \beta^{\beta}}{a^{\alpha} b^{\beta}} - \frac{a^{\alpha} \beta^{\beta}}{b^{\alpha} a^{\beta}}$$

$$\frac{a^{\alpha} \beta^{\beta} \gamma^{\gamma}}{a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma}} = \frac{a^{\alpha} \beta^{\beta} \gamma^{\gamma}}{a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma}} + \frac{a^{\alpha} \beta^{\beta} \gamma^{\gamma}}{b^{\alpha} c^{\beta} a^{\gamma}} + \frac{a^{\alpha} \beta^{\beta} \gamma^{\gamma}}{c^{\alpha} a^{\beta} b^{\gamma}}$$

$$\frac{a^{\alpha} \beta^{\beta} \gamma^{\gamma} \delta^{\delta}}{a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} d^{\delta}} = \frac{a^{\alpha} \beta^{\beta} \gamma^{\gamma} \delta^{\delta}}{a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} d^{\delta}} - \frac{a^{\alpha} \beta^{\beta} \gamma^{\gamma} \delta^{\delta}}{b^{\alpha} c^{\beta} d^{\gamma} a^{\delta}} + \frac{a^{\alpha} \beta^{\beta} \gamma^{\gamma} \delta^{\delta}}{c^{\alpha} d^{\beta} a^{\gamma} b^{\delta}} - \frac{a^{\alpha} \beta^{\beta} \gamma^{\gamma} \delta^{\delta}}{d^{\alpha} a^{\beta} b^{\gamma} c^{\delta}}$$

$$\frac{a^{\alpha} \beta^{\beta} \gamma^{\gamma} \delta^{\delta} \epsilon^{\epsilon}}{a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} d^{\delta} e^{\epsilon}} = \frac{a^{\alpha} \beta^{\beta} \gamma^{\gamma} \delta^{\delta} \epsilon^{\epsilon}}{a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} d^{\delta} e^{\epsilon}} + \frac{a^{\alpha} \beta^{\beta} \gamma^{\gamma} \delta^{\delta} \epsilon^{\epsilon}}{b^{\alpha} c^{\beta} d^{\gamma} e^{\delta} a^{\epsilon}} + \frac{a^{\alpha} \beta^{\beta} \gamma^{\gamma} \delta^{\delta} \epsilon^{\epsilon}}{c^{\alpha} d^{\beta} e^{\gamma} a^{\delta} b^{\epsilon}} + \frac{a^{\alpha} \beta^{\beta} \gamma^{\gamma} \delta^{\delta} \epsilon^{\epsilon}}{d^{\alpha} e^{\beta} a^{\gamma} b^{\delta} c^{\epsilon}} + \frac{a^{\alpha} \beta^{\beta} \gamma^{\gamma} \delta^{\delta} \epsilon^{\epsilon}}{e^{\alpha} a^{\beta} b^{\gamma} c^{\delta} d^{\epsilon}}$$

$$\frac{a^{\alpha} \beta^{\beta} \gamma^{\gamma} \delta^{\delta} \epsilon^{\epsilon} \zeta^{\zeta}}{a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} d^{\delta} e^{\epsilon} f^{\zeta}} = \frac{a^{\alpha} \beta^{\beta} \gamma^{\gamma} \delta^{\delta} \epsilon^{\epsilon} \zeta^{\zeta}}{a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} d^{\delta} e^{\epsilon} f^{\zeta}} - \frac{a^{\alpha} \beta^{\beta} \gamma^{\gamma} \delta^{\delta} \epsilon^{\epsilon} \zeta^{\zeta}}{b^{\alpha} c^{\beta} d^{\gamma} e^{\delta} f^{\epsilon} a^{\zeta}} + \dots \&c.$$

## 29 Mémoire sur l'élimination (1771)

Vandermonde énonce les principales propriétés des déterminants, puis comme en passant, en arrive à une remarque cruciale.

« Ceux qui ont connaissance des symboles abrégés que j'ai nommés types partiels de combinaison, dans mon Mémoire sur la résolution des équations, reconnoîtront ici la formation du type partiel dépendant du second degré, pour un nombre quelconque de lettres; ils verront sans peine qu'en prenant ici nos alpha, beta, gamma, delta, etc. par exemple, pour des exposants, tous les termes de même signe, dans le développement de l'une de nos abréviations, seront aussi le développement du type partiel dépendant du second degré, et formé d'un pareil nombre de lettres; ce que démontrent nos opérations précédentes. »

Il en déduit immédiatement qu'un déterminant ayant deux lignes ou deux colonnes égales est forcément nul. Pourquoi donc? Cela mérite un petit décodage.

### Mémoire sur l'élimination (1771)

Alexandre-Théophile Vandermonde (1735-1796)

« Ceux qui ont connoissance des symboles abrégés que j'ai nommés types partiels de combinaison, dans mon Mémoire sur la résolution des équations, reconnoîtront ici la formation du type partiel dépendant du second degré, pour un nombre quelconque de lettres; ils verront sans peine qu'en prenant ici nos  $\alpha, \beta, \gamma, \delta,$  &c. par exemple, pour des exposants, tous les termes de même ligne, dans le développement de l'une de nos abréviations, seront aussi le développement du type partiel dépendant du second degré, &c formé d'un pareil nombre de lettres; ce que démontrent nos opérations précédentes.

De ce que nous avons dit jusqu'ici, il suit que

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{vmatrix} = 0,$$

si deux lettres quelconques du même alphabet sont égales entr'elles;

## 30 Le déterminant de Vandermonde (1771)

Regardez le développement d'un déterminant d'ordre trois. Maintenant, faites ce que dit Vandermonde, c'est-à-dire faites passer les indices en exposants. Le développement devient un polynôme homogène de degré 6 en  $a, b, c$ .

Ce polynôme, Vandermonde le connaît bien : il l'a déjà rencontré parmi ses fonctions symétriques. Il sait parfaitement qu'il est égal au produit  $abc$  fois les trois différences  $(a - b)$ ,  $(b - c)$ ,  $(c - a)$ . Il ne fait aucun doute pour lui, que la propriété se généralise à un nombre quelconque de dimensions.

Il est donc possible d'inverser la remarque, et d'écrire directement un produit de différences, quitte à le développer ensuite si besoin. La preuve que Vandermonde avait parfaitement vu cette astuce, c'est la suite de sa remarque. Sous la forme d'un produit de différences, il est évident, comme il le dit, que le déterminant s'annule dès que deux des lettres sont égales.

Sans le facteur  $abc$ , c'est ce produit de différences que l'on appelle de nos jours « déterminant de Vandermonde ». Lebesgue, puis Dieudonné ont jugé que l'attribution était injustifiée. Personnellement, je la trouve d'autant plus méritée que l'astuce de Vandermonde, sous la plume de Cauchy, est devenue la première définition générale des déterminants.

### Le déterminant de Vandermonde (1771)

Alexandre-Théophile Vandermonde (1735-1796)

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - c_1 b_2 a_3 - a_1 c_2 b_3 - b_1 a_2 c_3$$

$$\begin{vmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ c^1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = a^1 b^2 c^3 + b^1 c^2 a^3 + c^1 a^2 b^3 - c^1 b^2 a^3 - a^1 c^2 b^3 - b^1 a^2 c^3 = abc(a-b)(b-c)(c-a)$$

## 31 Mémoire sur le nombre des valeurs... (1815)

Le travail de Cauchy ne porte pas que sur les déterminants mais plus généralement « sur le nombre des valeurs qu'une fonction peut acquérir lorsqu'on y permute de toutes les manières possibles les quantités qu'elle renferme. »

Les fonctions qui ne prennent qu'une seule valeur sont les fonctions symétriques. Juste après, viennent les fonctions qui ne prennent que deux valeurs opposées, c'est-à-dire les fonctions alternées.

Ce mémoire est le premier travail d'envergure de Cauchy, écrit à 23 ans. Il fait en tout une centaine de pages.

### Mémoire sur le nombre des valeurs... (1815)

Augustin Louis Cauchy (1789-1857)

#### MÉMOIRE

SUR LE

#### NOMBRE DES VALEURS QU'UNE FONCTION PEUT ACQUÉRIR,

LORSQU'ON Y PERMUTE DE TOUTES LES MANIÈRES POSSIBLES  
LES QUANTITÉS QU'ELLE RENFERME.

## 32 Des fonctions symétriques alternées

Les déterminants sont traités dans la deuxième partie. Elle commence par une définition, qui reprend très exactement l'observation de Vandermonde.

Cauchy rappelle qu'en multipliant le produit de  $n$  variables par leurs différences respectives, on obtient une fonction symétrique alternée particulière. Puis il dit :

### Des fonctions symétriques alternées

Cauchy, Mémoire sur les fonctions qui ne peuvent obtenir que deux valeurs (1815)

DEUXIÈME PARTIE.  
DES FONCTIONS SYMÉTRIQUES ALTERNÉES DESIGNÉES SOUS LE NOM  
DE DÉTERMINANTS.

PREMIÈRE SECTION.

Des déterminants en général et des systèmes symétriques.

§ I<sup>er</sup>. Soient  $a_1, a_2, \dots, a_n$  plusieurs quantités différentes en nombre égal à  $n$ . On a fait voir ci-dessus que, en multipliant le produit de ces quantités ou

$$a_1 a_2 a_3 \dots a_n$$

par le produit de leurs différences respectives, ou par

$$(a_1 - a_2)(a_1 - a_3) \dots (a_1 - a_n)(a_2 - a_3) \dots (a_2 - a_n) \dots (a_{n-1} - a_n),$$

on obtenait pour résultat la fonction symétrique alternée

$$S(= a_1 a_2 a_3 \dots a_n^2)$$

## 33 Mémoire sur le nombre des valeurs... (1815)

« Supposons maintenant que l'on développe ce dernier produit et que, dans chaque terme du développement, on remplace l'exposant de chaque lettre par un second indice égal à l'exposant dont il s'agit.

[...] Telle est la forme la plus générale des fonctions que je désignerai dans la suite sous le nom de *déterminants*. »

Cette définition n'est pas si malcommode qu'elle en a l'air, et Cauchy l'utilise pour démontrer les propriétés principales des déterminants. Elle a été abandonnée au profit de celle que vous connaissez, à partir de Jacobi.

### Mémoire sur le nombre des valeurs... (1815)

Augustin Louis Cauchy (1789–1857)

Supposons maintenant que l'on développe ce dernier produit et que, dans chaque terme du développement, on remplace l'exposant de chaque lettre par un second indice égal à l'exposant dont il s'agit.

[...] Telle est la forme la plus générale des fonctions que je désignerai dans la suite sous le nom de *déterminants*.

## 34 De functionibus alternantibus... (1841)

En 1841, Jacobi publie trois mémoires magistraux dans le journal de Crelle. Ces trois mémoires sont le véritable fondement de la théorie moderne des déterminants. Voici le début du troisième, qui porte sur les fonctions alternées et les produits de différence.

« Le célèbre Vandermonde, a élégamment observé jadis, qu'un déterminant proposé, si les indices sont transformés en exposants, se déduit du produit formé à partir des différences de tous les éléments. »

### De functionibus alternantibus... (1841)

Karl Gustav Jakob Jacobi (1804–1851)

DE FUNCTIONIBUS ALTERNANTIBUS EARUMQUE DIVISIONE  
PER PRODUCTUM E DIFFERENTIIS ELEMENTORUM  
CONFLATUM.

Eleganter olim observavit Cl. Vandermonde, proposito Determinante

$$\pm a_1^{a_1} a_2^{a_2} \dots a_n^{a_n},$$

si mutantur indices in exponentes, provenire Productum conflatum ex omnibus elementorum

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$$

differentiis,

$$P = (a_1 - a_2)(a_1 - a_3) \dots (a_1 - a_n) \\ (a_2 - a_3)(a_2 - a_4) \dots (a_2 - a_n) \\ \dots \\ (a_{n-1} - a_n).$$

## 35 références

Et voilà, comment une élégante observation passe aux oubliettes de l'histoire. Enfin... pas tout à fait, puisque vous venez de l'écouter !

### références

- G. Faccarello (1993) Du conservatoire à l'École normale : quelques notes sur A. T. Vandermonde (1735–1796), *Les Cahiers du CNAM*, 2, 17–58
- J. Hecht (1987) Un exemple de multidisciplinarité : Alexandre Vandermonde (1735–1796), *Population*, 26(4), 641–676
- T. Muir (1906) *The theory of determinants in the historical order of development*, Vol. I, London : Mac Millan
- B. L. van der Waerden (1985) *A history of Algebra from al-Khwārizmī to Emmy Noether*, Berlin : Springer
- B. Y. (2013) A case of mathematical eponymy : the Vandermonde determinant, *Revue d'histoire des mathématiques*, 19(1), 43–77