0 Le rouge et le noir

Je vais vous parler du tout début de l'algèbre linéaire, c'est-à-dire des systèmes d'équations du premier degré. Au début de notre ère, les Chinois ont pris une longueur d'avance sur tout le monde. Mais ils n'étaient pas les premiers à écrire des systèmes d'équations. Encore bien avant eux, il y avait eu les Mésopotamiens.

histoires d'algèbre

Le rouge et le noir

équations linéaires en Chine

hist-math.fr Bernard YCART

1 VAT 8389 (ca 1900 av. J.-C.)

Voici VAT 8389. Il s'est écoulé plus de temps entre l'écriture de cette tablette et le début de notre ère, qu'entre la naissance de Jésus-Christ et celle de Gauss. Chacun des dix problèmes qu'elle expose est un système linéaire de deux équations à deux inconnues.

VAT 8389 (ca 1900 av. J.-C.)
Vorderasiatisches Museum, Berlin

2 Problème 1, traduction J. Høyrup

Voici l'énoncé du premier problème, dans la traduction de Jens Høyrup. Il s'agit de deux champs de céréales qui rapportent des sommes différentes par unité de surface. Le premier rapporte quatre tandis que le second rapporte trois. La troisième affirmation donne la différence entre les deux revenus. La quatrième donne la surface totale des deux parcelles.

Une première difficulté est que les unités de mesure ne sont pas homogènes. Dans les deux premières affirmations l'unité de mesure de grains est le Gur, alors que la différence des deux redevances est donnée en Sila, qui vaut un cinquième de Gur. De même l'unité de surface pour les rendements est le Bur, et la surface totale est donnée comme un demi Sar, ce qui fait un Bur.

Si on homogénéise les unités, on obtient la modélisation suivante.

Problème 1, traduction J. Høyrup
VAT 8389 (ca 1900 av. J.-C.)

1. De 1 BÙR, 4 GUR de grain j'ai perçu.
2. De 1, autre, BÙR, 3 GUR de grain j'ai perçu.
3. Le grain excède le grain de 8°20'
4. Mes parcelles j'ai empilées, 30'.
5. Mes parcelles quoi ?

3 Problème 1, interprétation

x est la surface de la première parcelle en Bur, $4x$ sa redevance, y est la surface de la seconde parcelle, toujours en Bur, et $3y$ sa redevance. La différence des deux redevances vaut $4x - 3y$ égale $5/3$ de Gur, tandis que l'empilement des deux parcelles a pour surface totale $x + y$ égale à un Bur.

À partir de cela, il est facile d'obtenir la solution, qui est $x = 2/3$, $y = 1/3$. Enfin… facile pour nous ! Mais c'était loin d'être aussi simple pour les Babyloniens, qui ne disposaient pas de l'algèbre symbolique, même pas de la vision abstraite sous forme de nombres. Ils raisonnaient en termes géométriques de lignes et de surfaces qu'ils empilaient pour l'addition ou bien qu'ils arrachaient pour la soustraction.

Une fois posé le problème, le scribe se lance dans un raisonnement compliqué, et plutôt difficile à suivre. Son idée est la suivante : il commence par supposer que les deux surfaces sont égales. Il obtient alors une différence de revenus, qui n'est pas celle de l'énoncé. Il cherche alors quelle est la surface qu'il faut arracher à la seconde parcelle pour l'empiler sur la première.

Peu importent les détails, ce qui compte c'est le principe de raisonnement. Il consiste à poser à priori une solution, puis à examiner de combien cette solution est fausse, pour corriger le tir ensuite. Cela s'appelle la « règle de fausse position », et elle a été utilisée pour résoudre des équations depuis les Mésopotamiens et les Égyptiens, jusqu'à la Renaissance européenne.

Problème 1, interprétation
VAT 8389 (ca 1900 av. J.-C.)

1. De 1 BÙR, 4 GUR de grain j'ai perçu.
   x surface d'une parcelle, $4x$ sa redevance.
2. De 1, autre, BÙR, 3 GUR de grain j'ai perçu.
   y surface de l'autre parcelle, $3y$ sa redevance.
3. Le grain excède le grain de 8°20'.
   $4x - 3y = 5/3$.
4. Mes parcelles j'ai empilées, 30'.
   $x + y = 1$.
5. Mes parcelles quoi ?
   Trouver x et y.

4 La règle de simple fausse position

La règle de simple fausse position est une sorte de règle de trois. Mettons que vous ayez une équation du premier degré à une inconnue à résoudre : $ax = b$. Vous posez une valeur, choisie de sorte que les calculs soient simples. Appelez-la x_0 : c'est une « fausse position » parce que ax_0 ne vaut pas b mais b_0. Il ne vous reste plus à ajuster le tir par une règle de trois.

La règle de simple fausse position

$$ax = b$$
$$x = x_0$$
$$ax_0 = b_0$$
$$x = x_0 \frac{b}{b_0}\,.$$

5 La règle de double fausse position

La double fausse position est une sorte d'interpolation linéaire. Vous posez x_1, disons que le calcul vous donne une erreur par défaut de e_1. Vous posez ensuite x_2, disons que vous obtenez une erreur par excès e_2. Eh bien vous allez retourner la moyenne de x_1 et x_2, affectée des poids e_2 et e_1.

La seconde erreur affecte la première position et réciproquement. Le signe dépend du sens des erreurs. Il est positif si elles sont de sens opposé, négatif sinon. Voici un exemple.

La règle de double fausse position

position x_1 : erreur e_1
position x_2 : erreur e_2

$$x = \frac{x_1 e_2 \pm x_2 e_1}{e_1 \pm e_2}\,.$$

6 General trattato di numeri et misure (1556)

General trattato di numeri et misure (1556)
Nicolo Tartaglia (1499–1557)

Il est tiré du traité général des nombres et de la mesure, de Tartaglia. Est-il besoin de rappeler que Tartaglia avait trouvé la solution les équations du troisième degré. Il savait donc résoudre des questions beaucoup plus compliquées.

La traduction est d'un certain Guillaume Gosselin, originaire de Caen en Normandie. Elle date de 1613, soit dix ans après la mort de Viète. Voici le problème.

7 Traité général des nombres et mesures (1613)

Quatre pommes et un denier, valent 7 deniers moins une pomme, combien vaut la pomme ?

Nous appellerions x le prix d'une pomme, et nous écririons $4x + 1 = 7 - x$. Puis nous ferions passer $-x$ dans le membre de gauche, plus 1 dans le membre de droite, $5x = 6$, d'où le résultat. Mais non, manipuler des quantités abstraites, faire passer d'un membre à l'autre en changeant de signe, n'était pas encore passé dans les mœurs. On procède plutôt par essai et erreur.

« Faignons qu'elle vaille un denier, ainsi quatre pommes et un denier feront 5 deniers, mais 7 deniers moins une pomme feront 6 deniers, il faudrait donc que 5 deniers fussent égaux à 6 deniers, mais il manque 1 denier, nous écrirons 1 denier, qui est la position avec son erreur, qui est aussi 1 denier, avec le signe moins… »

L'exemple est accompagné d'une figure, que voici.

Traité général des nombres et mesures (1613)
Nicolo Tartaglia, traduction Guillaume Gosselin

Quatre pommes et vn denier, vallent 7 deniers moins vne pomme, combien vaut la pomme ?

$$4x + 1 = 7 - x$$

Faignons qu'elle valle vn denier, & ainsi quatre pommes & vn denier feront 5 deniers, mais 7 deniers moins vne pomme feront 6 deniers, il faudroit dõques que 5 deniers fussent égaux à 6 deniers, mais il s'en faut 1 denier, nous escrirons 1 denier, qui est la position auec son erreur, qui est aussi 1 denier, auec le signe de moins…

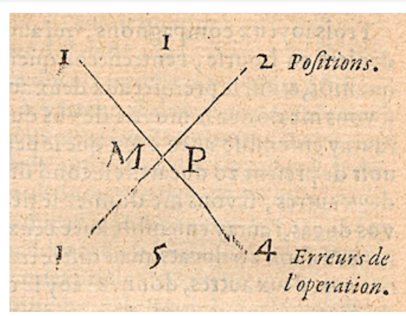
8 Traité général des nombres et mesures (1613)

La première position est écrite en haut à gauche, la première erreur en bas à gauche, et la lettre M pour moins rappelle que c'était une erreur par défaut. Ensuite le texte dit :

« puis nous ferons notre seconde position, et ferons que la pomme vaille 2 deniers, et ainsi 4 pommes et 1 denier feront 9 deniers, mais 7 deniers moins une pomme ne feront que 5 deniers, lesquels 9 deniers surpassent 5 deniers de 4 deniers. Nous écrirons 2, qui est notre position, et son erreur, qui est 4, avec le signe de plus, en cette façon. »

La position 2 et l'erreur 4 sont à droite de la croix. Ensuite, on explique longuement qu'il faut faire le produit en croix : un que multiplie 4, plus 2 que multiplie 1, le tout divisé par la somme des deux erreurs, 5.

Traité général des nombres et mesures (1613)
Nicolo Tartaglia, traduction Guillaume Gosselin



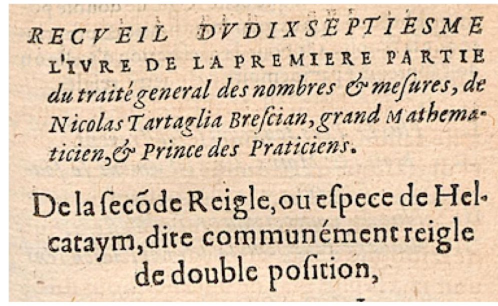
9 Traité général des nombres et mesures (1613)

Dans la traduction de Gosselin, le chapitre sur la fausse position double, ne compte pas moins de quarante sept pages, avec de nombreux exemples et des justifications plus ou moins alambiquées.

Regardez le titre du chapitre : de la seconde Règle, ou espèce de Helcataym, dite communément règle de double position. Ce mot « Helcataym » évoque une origine arabe. La plupart des manuels du seizième siècle reprennent la « Suma Arithmetica » de Luca Pacioli, elle même directement inspirée du Liber Abaci de Fibonacci. On y trouve tout un chapitre sur la double fausse position et ses applications. Les diagrammes en croix y figurent déjà. Voici le début du chapitre.

Traité général des nombres et mesures (1613)

Nicolo Tartaglia, traduction Guillaume Gosselin



RECVEIL DV DIXSEPTIESME LIVRE DE LA PREMIERE PARTIE du traité general des nombres & mesures, de Nicolas Tartaglia Brescian, grand Mathematicien, & Prince des Praticiens.

De la secōde Reigle, ou espece de Helcataym, dite communément reigle de double position,

10 ḥisāb al-khaṭā'ain

Le titre dit : « Ici commmence le chapitre treize sur les règles Elchataym et comment grâce à elles presque toutes les questions de calcul sont résolues. »

La première phrase est : « Le Elchataieym arabe, que l'on interprète en latin comme la règle des deux fausses positions, permet de trouver la solution à presque toutes les questions. »

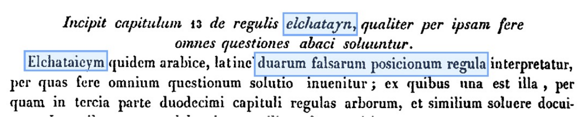
L'expression arabe « hisab al-khataain » correspond à « Calcul des deux faussetés » ou « des deux erreurs ». La translittération de « al-khataain » a varié, y compris chez Fibonacci, qui utilise quatre formes différentes. Il se montre d'ailleurs un peu trop enthousiaste. Puisque c'est en fait une interpolation linéaire que l'on calcule, elle ne peut être exacte que sur les problèmes affines. Sur les problèmes de degré supérieur, elle fournit au mieux une approximation.

La méthode est attestée chez les Arabes à partir du neuvième siècle, certains l'attribuent aux Indiens. Le produit en croix est parfois présenté comme un centre de gravité, et la méthode s'appelle alors « opération avec les plateaux de la balance ». Elle porte aussi le nom de « augmentation et diminution », ce qui ressemble beaucoup à la dénomination chinoise, comme nous le verrons. Il est possible que la méthode ait été transmise aux Indiens par les Chinois, puis aux Arabes par les Indiens. Mais on n'en a pas la preuve. Il se pourrait aussi que la même méthode ait été redécouverte plusieurs fois. Dans tous les cas, il convient de s'interroger sur son succès et sa longévité, à comparer avec la difficulté qu'il y a eu à imposer le calcul littéral qui nous paraît pourtant beaucoup plus simple, et beaucoup plus général.

Voici un problème classique des mathématiques chinoises. Deux candidats à une même promotion doivent être départagés, et on demande l'arbitrage du sage Yang Sun.

ḥisāb al-khaṭā'ain

Fibonacci, Liber abaci (1202)



Incipit capitulum 13 de regulis elchatayn, qualiter per ipsam fere omnes questiones abaci soluuntur.

Elchataieym quidem arabice, latine duarum falsarum posicionum regula interpretatur, per quas fere omnium questionum solutio inuenitur; ex quibus una est illa, per quam in tercia parte duodecimi capituli regulas arborum, et similium soluere docui-

11 L'arbitrage de Yang Sun (ca. 855)

Yang Sun réfléchit et dit, « un des mérites principaux des employés subalternes est de calculer rapidement. Que les deux candidats écoutent ma question. Le premier qui donnera la bonne réponse obtiendra la promotion. Le problème est le suivant : Quelqu'un marchant dans la forêt, entendit des voleurs discutant du partage de rouleaux de tissus qu'ils avaient volés. Ils disaient que si chacun avait 6 rouleaux, il en resterait 5, mais si chacun avait 7 rouleaux, il en manquerait 8. Combien de voleurs y avait-il, et quel était le nombre total de rouleaux de tissus ? »

Vous pensez que si n est le nombre de voleurs, alors le nombre de rouleaux est $6n+5$ par la première affirmation, $7n-8$ par la seconde. Vous en déduisez immédiatement qu'il y avait 13 voleurs, puis qu'ils se partageaient 83 rouleaux. Ce n'est pas cela que Yang Sun attendait. Le problème posé est classique dans les mathématiques chinoises. Il remonte aux « Neuf Chapitres sur les procédures mathématiques », ou les « Neuf Chapitres » tout court.

L'arbitrage de Yang Sun (ca. 855)

Yang Sun réfléchit et dit, « un des mérites principaux des employés subalternes est de calculer rapidement. Que les deux candidats écoutent ma question. Le premier qui donnera la bonne réponse obtiendra la promotion. Le problème est le suivant : Quelqu'un marchant dans la forêt, entendit des voleurs discutant du partage de rouleaux de tissus qu'ils avaient volés. Ils disaient que si chacun avait 6 rouleaux, il en resterait 5, mais si chacun avait 7 rouleaux, il en manquerait 8. Combien de voleurs y avait-il, et quel était le nombre total de rouleaux de tissus ? »

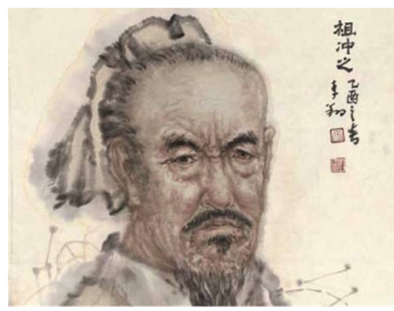
12 Les Neuf Chapitres (263)

La première trace que l'on en ait est le commentaire de Liu Hui daté de 263 après Jésus-Christ. Sur Liu Hui lui-même on ne sait pas grand chose. Ce portrait est imaginaire. Dans sa préface, Liu Hui ne laisse aucun doute sur l'ancienneté de l'ouvrage. Voici ce qu'il dit.

« C'est seulement quand le duc de Zhou établit les rites que l'on sait que les neuf parties des mathématiques existaient (c'est-à-dire au onzième siècle avant notre ère) ; c'est le développement de ces neuf parties des mathématiques qui donna *Les Neuf chapitres.* »

Les Neuf Chapitres (263)

Liu Hui (ca. 220–280)



13 Qin Shi Huang (ca. 259–210 av. J.-C.)

« Autrefois, le cruel Qin Shi Huang brûla les livres. Les procédures du Classique furent dispersées et endommagées. Après cette période, le marquis de Bei Ping, Zhang Cang, et le Secrétaire adjoint du Palais au Chambellan du Trésor National, Geng Shouchang, de la (dynastie) Han acquirent tous deux une réputation universelle pour leur excellence en mathématiques. Sur la base de fragments de vieux textes qui avaient survécu, Zhang Cang et d'autres effectuèrent respectivement un travail d'élagages et de complétions. C'est pourquoi, quand on examine ses sections, par endroits elles diffèrent des anciennes, et ce qui y est discuté l'est pour beaucoup en termes modernes. »

Qin Shi Huang est le premier empereur de l'histoire de la Chine : c'est lui qui a fait construire l'armée de terre cuite pour son mausolée. C'est lui aussi qui a ordonné la destruction des livres, parmi lesquels les Neuf Chapitres. D'après Liu Hui, le livre aurait été reconstitué entre le premier siècle avant notre ère et le premier siècle après. Il affirme de plus qu'il l'a étudié étant enfant.

Qin Shi Huang (ca. 259–210 av. J.-C.)

Liu Hui, Commentaire aux Neuf Chapitres (263)

14 Les Neuf Chapitres

Voici les titres de ces fameux Neuf Chapitres, avec un résumé de leur contenu. Ce serait un contre-sens d'y chercher des mathématiques à la grecque. C'est plutôt une description de méthodes algorithmiques, appliquées à de nombreux cas pratiques. Cela n'empêche pas Liu Hui de donner des justifications rigoureuses à ces algorithmes. Mais pas sous forme de propositions suivies de démonstrations.

Les deux chapitres qui nous intéressent dans cette histoire sont le septième et le huitième. Le septième « Excédent et déficit », porte entièrement sur la règle de fausse position ; le huitième sur la résolution des systèmes linéaires. Il se trouve qu'une bonne partie des problèmes donnés dans le chapitre sept peuvent être vus comme des systèmes de deux équations à deux inconnues. En voici des exemples.

Les Neuf Chapitres

1. Fang Tian (Champ rectangulaire)
2. Su Mi (Petit mil et grains décortiqués)
3. Cui Fen (Parts pondérées en fonction des degrés)
4. Shao Guang (Petite largeur)
5. Shang Gong (Discuter des travaux)
6. Jun Shu (Paiement équitable de l'impôt)
7. Ying Bu Zu (Excédent et déficit)
8. Fang Cheng (Tableaux rectangulaires)
9. Gou Gu (Base et hauteur)

15 Achats en commun

Les six premiers sont des achats en commun, qui ressemblent au problème des voleurs et des rouleaux de tissus. Par exemple :

« Supposons que l'on ait un achat en commun de poulets, et que, si chacun paie 9, il y ait 11 d'excédent, si chacun paie 6, il y ait 16 de déficit. On demande combien valent respectivement la quantité de personnes et le prix des poulets. »

Achats en commun
Les Neuf Chapitres, Excédents et déficits

Supposons que l'on ait un achat en commun de poulets, et que, si chacun paie 9, il y ait 11 d'excédent, si chacun paie 6, il y ait 16 de déficit. On demande combien valent respectivement la quantité de personnes et le prix des poulets.

16 mélange de vin

Il y a ensuite des problèmes de mélanges, comme celui-ci.

« Supposons que 1 *dou* de vin de bonne qualité vaille 50 sapèques et que 1 *dou* de vin de mauvaise qualité vaille 10 sapèques. Et supposons qu'avec 30 sapèques, on obtienne 2 *dou* de vin. On demande combien on obtient respectivement de vin de bonne qualité et de vin de mauvaise qualité. »

Mélange de vin
Les Neuf Chapitres, Excédent et déficit

Supposons que 1 *dou* de vin de bonne qualité vaille 50 sapèques et que 1 *dou* de vin de mauvaise qualité vaille 10 sapèques. Et supposons qu'avec 30 sapèques, on obtienne 2 *dou* de vin. On demande combien on obtient respectivement de vin de bonne qualité et de vin de mauvaise qualité.

17 Mélange de vin

Le problème de mélange de vin a un écho dans les Arithmétiques de Diophante. Curieusement, c'est le seul problème chez Diophante, qui ne soit pas présenté sous forme abstraite.

« S'embarquant avec des compagnons qui l'ont chargé de se rendre utile, quelqu'un a mélangé des conges de vin, (un conge c'est à peu près 3 litres et quart) les uns à 8 drachmes, les autres à 5 drachmes. Pour le tout il a payé un nombre carré qui, augmenté du nombre d'unités qui te sera prescrit, fera que tu auras un autre carré ayant pour racine le nombre total des conges. Distingue donc combien il y en avait à 8 drachmes, et dis aussi, mon enfant, combien il y en avait à 5 drachmes. »

Mélange de vin
Diophante (ca 200-284), Arithmétiques, Livre 5, problème 33

S'embarquant avec des compagnons qui l'ont chargé de se rendre utile, quelqu'un a mélangé des conges de vin, les uns à 8 drachmes, les autres à 5 drachmes. Pour le tout il a payé un nombre carré qui, augmenté du nombre d'unités qui te sera prescrit, fera que tu auras un autre carré ayant pour racine le nombre total des conges. Distingue donc combien il y en avait à 8 drachmes, et dis aussi, mon enfant, combien il y en avait à 5 drachmes.

18 Échange de poids

Échange de poids

Les Neuf Chapitres, Excédent et déficit

Voici un problème d'échange de poids.

« Supposons que l'on ait 9 tiges d'or jaune et 11 tiges d'argent blanc qui, à la pesée ont des poids tout juste égaux. Si l'on échange entre elles une de leurs tiges, l'or devient plus léger de 13 *liang*. On demande combien pèsent respectivement une tige d'or et une tige d'argent. »

Supposons que l'on ait 9 tiges d'or jaune et 11 tiges d'argent blanc qui, à la pesée ont des poids tout juste égaux. Si l'on échange entre elles une de leurs tiges, l'or devient plus léger de 13 *liang*. On demande combien pèsent respectivement une tige d'or et une tige d'argent.

19 Échange de poids

Un autre problème d'échange de poids, repris dans de nombreux livres de récréations, est attribué à Euclide par l'Anthologie grecque :

Échange de poids

Euclide (ca 325–265 av. J.-C.), Anthologie grecque

« Une mule et une ânesse allaient de compagnie, portant du blé. L'ânesse gémissait sous le poids de sa charge. La mule l'entendant gémir : « Mère, lui dit-elle, pourquoi te lamentes-tu ainsi, comme une jeune fille ? Si tu me donnais un de tes sacs, ma charge serait double de la tienne ; et si tu en prenais un en échange, nous aurions chacun un poids égal. » Dis-moi le nombre des sacs, ô toi qui es passé maître en mathématiques. »

Une mule et une ânesse allaient de compagnie, portant du blé. L'ânesse gémissait sous le poids de sa charge. La mule l'entendant gémir : « Mère, lui dit-elle, pourquoi te lamentes-tu ainsi, comme une jeune fille ? Si tu me donnais un de tes sacs, ma charge serait double de la tienne ; et si tu en prenais un en échange, nous aurions chacun un poids égal. » Dis-moi le nombre des sacs, ô toi qui es passé maître en mathématiques.

Au fait, vous qui êtes passés maîtres en mathématiques, vous voulez savoir comment s'est terminé l'arbitrage de Yang Sun ?

20 L'arbitrage de Yang Sun (ca. 855)

L'arbitrage de Yang Sun (ca. 855)

« Le problème fut apporté par un autre employé subalterne, et Yang Sun demanda aux deux candidats de le résoudre avec des baguettes à calculer sur les marches en pierre de la salle. En peu de temps, l'un d'eux obtint la bonne réponse. On lui donna la promotion, et les officiels se dispersèrent, n'ayant aucune plainte à émettre sur cette décision. »

Le problème fut apporté par un autre employé subalterne, et Yang Sun demanda aux deux candidats de le résoudre avec des baguettes à calculer sur les marches en pierre de la salle. En peu de temps, l'un d'eux obtint la bonne réponse. On lui donna la promotion, et les officiels se dispersèrent, n'ayant aucune plainte à émettre sur cette décision.

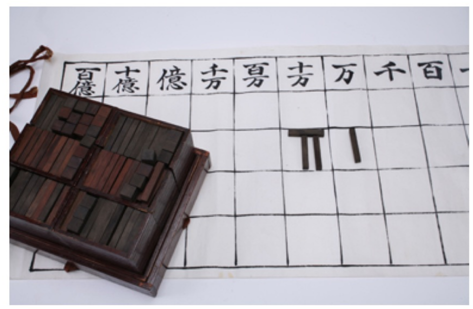
21 tableau de comptes

tableau de comptes

Oui, avant l'invention du boulier, les calculs pouvaient se faire par terre sur des dalles, ou bien sur une feuille de papier sur laquelle étaient tracés de gros carreaux.

22 tableau de comptes

tableau de comptes



Pour calculer, on utilisait des baguettes que l'on plaçait dans des cases. Ici une baguette seule représente un. On place les baguettes parallèles jusqu'à cinq, avec une baguette transversale à partir de cinq. Dans la case à gauche de un, c'est le chiffre sept qui figure.

23 baguettes à compter

baguettes à compter
époque Han

Les baguettes à compter que vous voyez ici sont à peu près contemporaines des Neuf Chapitres.

24 baguettes à compter

baguettes à compter

Est apparue alors une innovation qui au départ n'est qu'une astuce technique : les baguettes sont de deux couleurs différentes : il y a les rouges et il y a les noires.

25 baguettes à compter

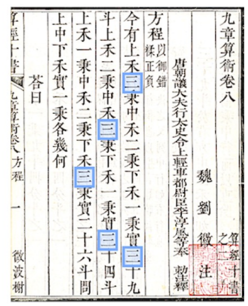
baguettes à compter

Les rouges servent à écrire des quantités positives, les noires des quantités négatives. Ça n'a l'air de rien, mais c'est une avancée majeure : la première apparition des nombres négatifs. Ils vont mettre des siècles à être acceptés et compris.

À propos de ce qu'il appelle la procédure du positif et du négatif, Liu Hui dit : « Si deux sortes de nombres représentés par des baguettes, ce que l'on acquiert et ce que l'on perd, sont opposées l'une à l'autre, il faut se servir de « positif » et « négatif » pour les nommer. Les nombres représentés par des baguettes rouges sont positifs, les nombres représentés par des baguettes noires sont négatifs. Sinon, on les différencie en recourant à l'opposition oblique/droit. »

26 Chapitre Huit, Fang Cheng

Chapitre Huit, Fang Cheng
Liu Hui, Les Neuf Chapitres (263)


九章算術卷八
魏 劉 徽 注
唐朝議大夫行太史令上輕車都尉臣李淳風等奉 勅注釋
方程 以御錯糅正負
今有上禾三秉中禾二秉下禾一秉實三十九斗上禾二秉中禾三秉下禾一秉實三十四斗上禾一秉中禾二秉下禾三秉實二十六斗問上中下禾實一秉各幾何
荅曰
九章算術卷八 方程 一 微波榭

L'innovation des deux couleurs apparaît dans le huitième des neuf chapitres, dont vous voyez ici le début. Pour vous en faciliter la lecture, j'ai encadré les occurrences du chiffre trois.

Cela ne suffit toujours pas ? Bon, tant pis, alors voici la traduction de Karine Chemla et Shuchun Guo.

27 Chapitre Huit, Fang Cheng

Chapitre Huit, Fang Cheng
Liu Hui, Les Neuf Chapitres (263)

Fang Cheng

pour traiter ce qui est mélangé ainsi que le positif et le négatif

Supposons que 3 *bing* de millet de qualité supérieure, 2 *bing* de millet de qualité moyenne, 1 *bing* de millet de qualité inférieure produisent 39 *dou* ;
que 2 *bing* de millet de qualité supérieure, 3 *bing* de millet de qualité moyenne, 1 *bing* de millet de qualité inférieure produisent 34 *dou* ;
que 1 *bing* de millet de qualité supérieure, 2 *bing* de millet de qualité moyenne, 3 *bing* de millet de qualité inférieure produisent 26 *dou*.
On demande combien produisent respectivement un *bing* de millet de qualité supérieure, de qualité moyenne, de qualité supérieure.

Fang Cheng signifie : « chercher les normes des choses en les assemblant côte à côte ». Le sous-titre est : « pour traiter ce qui est mélangé ainsi que le positif et le négatif ». Comme les autres chapitres, celui-ci commence par un problème concret. Il porte sur trois inconnues qui sont les productions de millet de qualités supérieure, moyenne, et inférieure. On donne trois équations entre ces trois inconnues, et on demande combien produisent respectivement un *bing* de millet de qualité supérieure, de qualité moyenne, de qualité inférieure.

28 Chapitre Huit, Fang Cheng

Si on note x, y, z les productions respectives du millet de qualité supérieure, moyenne, inférieure, le système s'écrit comme vous le voyez. Pour appliquer la méthode du pivot de Gauss, vous n'avez pas besoin des inconnues, vous pouvez aussi bien l'appliquer sur le tableau de nombres à droite.

Comme l'explique Liu Hui, les Chinois mettaient sur une même ligne ce qui relevait d'une même inconnue, ils formaient ensuite les colonnes qui correspondaient à chaque équation. La première équation correspond à la colonne de droite. L'écriture est celle que vous voyez en bas. Sur une table à compter, le problème devait donc ressembler à ce qui figure en bas à droite, avec des baguettes rouges puisque les quantités sont positives pour l'instant.

Admirez au passage l'astuce pédagogique : la ligne du haut correspond au millet de qualité supérieure, la suivante au millet de qualité moyenne, la ligne du bas au millet de qualité inférieure.

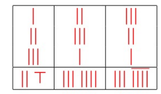
Chapitre Huit, Fang Cheng

Liu Hui, Les Neuf Chapitres (263)

$$\begin{cases} 3x + 2y + z &= 39 \\ 2x + 3y + z &= 34 \\ x + 2y + 3z &= 26 \end{cases}$$

3	2	1	39
2	3	1	34
1	2	3	26

1	2	3
2	3	2
3	1	1
26	34	39



29 Procédure Fang Cheng

Quant à la procédure de résolution, c'est exactement celle que vous connaissez. Liu Hui la résume superbement.

« Si, de la procédure, on retient essentiellement le point clef, c'est qu'il faut éliminer la tête des colonnes (c'est-à-dire faire apparaître des zéros). Pour ce qui est des autres positions, il n'y a pas à se demander quel est leur nombre et, par conséquent, qu'on les fasse parfois se soustraire l'une de l'autre et parfois se sommer l'une à l'autre, le principe est unique, qu'ils soient de même nom ou de noms différents.

La procédure d'homogénéisation et d'égalisation est capitale.

Multiplier pour les désagréger, simplifier pour les réunir, homogénéiser, égaliser pour les faire communiquer, ce sont les points clés de ces procédures de calcul. »

Procédure Fang Cheng

Liu Hui, Les Neuf Chapitres (263)

Si, de la procédure, on retient essentiellement le point clef, c'est qu'il faut éliminer la tête des colonnes. Pour ce qui est des autres positions, il n'y a pas à se demander quel est leur nombre et, par conséquent, qu'on les fasse parfois se soustraire l'une de l'autre et parfois se sommer l'une à l'autre, le principe est unique, qu'ils soient de même nom ou de noms différents.

La procédure d'homogénéisation et d'égalisation est capitale.

Multiplier pour les désagréger, simplifier pour les réunir, homogénéiser, égaliser pour les faire communiquer, ce sont les points clés de ces procédures de calcul.

30 Procédure Fang Cheng

Ce que Liu Hui entend par homogénéiser et égaliser pour faire communiquer, c'est multiplier de manière à ce que les coefficients les plus hauts s'égalisent, puis soustraire les colonnes pour annuler ces coefficients. Voici les premières étapes à partir du système initial. J'ai remplacé les baguettes par des chiffres : vous ne m'en voulez pas trop ?

Sur la dernière expression vous lisez dans la première colonne que la production du millet de qualité inférieure est de $11/4$ soit 2 et $3/4$, c'est bien la réponse annoncée par Liu Hui.

Procédure Fang Cheng

Liu Hui, Les Neuf Chapitres (263)

1	2	3
2	3	2
3	1	1
26	34	39

3	6	3
6	9	2
9	3	1
78	102	39

0	0	3
4	5	2
8	1	1
39	24	39

0	0	3
20	5	2
40	1	1
195	24	39

0	0	3
0	5	2
36	1	1
99	24	39

31 Seki (Kōwa) Takakazu (1642–1708)

Ce qui est étonnant voyez-vous, c'est que cette manière de résoudre les systèmes linéaires sur des tables à compter, inventée donc en Chine vers le début de notre ère, n'ait pas donné plus tôt naissance aux matrices et aux déterminants. Et encore, cela n'a pas eu lieu en Chine, mais au Japon.

Pendant très longtemps, l'éducation mathématique au Japon s'est basée sur les classiques chinois, et en particulier sur les Neuf Chapitres. Jusqu'à ce que, sous l'ère Edo, se développe une culture propre. Le grand nom des mathématiques japonaises de ce temps-là est Seki Takakazu, ou Seki Kowa.

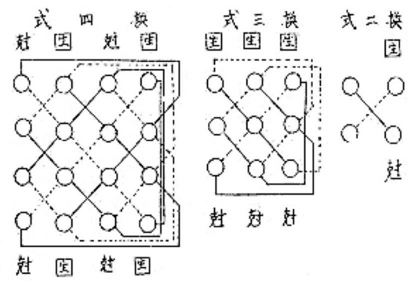
Seki (Kōwa) Takakazu (1642–1708)

32 Déterminants (1673)

Il est né quelques mois avant Newton, et il a décrit le développement des déterminants pratiquement en même temps que Leibniz.

Déterminants (1673)

Seki Takakazu (1642–1708)

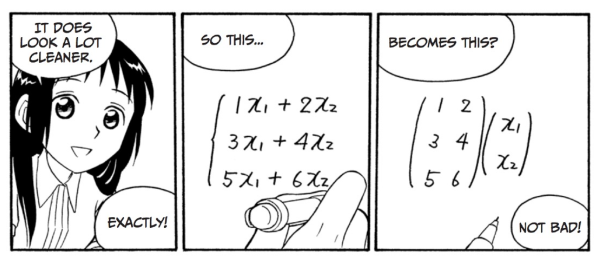


33 The Manga guide to Linear Algebra (2012)

Donc finalement écrire un manuel d'algèbre linéaire sous forme de manga, c'était plutôt approprié, vous ne trouvez pas ?

The Manga guide to Linear Algebra (2012)

S. Takahashi, I. Inoue



34 références

Comment ? Vous voulez savoir pourquoi l'algorithme s'appelle Pivot de Gauss alors qu'il a été inventé deux mille ans avant Gauss ? Ben c'est juste comme d'habitude, que voulez-vous que je vous dise ? D'ailleurs en japonais, il s'appelle hakidashihou, ce qui signifie en gros « méthode du coup de balai », sous-entendu pour se débarrasser des inconnues.

Bon, après tout, je suis un inconnu pour vous. Allez, je vais passer un coup de balai, je vous raconterai la suite plus tard.

références

- K. Chemla, S. Guo (2004) *Les Neuf Chapitres ; le classique mathématique de la Chine ancienne et ses commentaires*, Paris : Dunod
- K. Chemla (1992) Résonances entre démonstration et procédure. Remarques sur le commentaire de Liu Hui (IIIe siècle) aux Neuf Chapitres sur les Procédures Mathématiques (Ier siècle), *Extrême-Orient, Extrême-Occident*, 14, 91–129
- J. Gavin, A. Schärlig (2012) *Longtemps avant l'algèbre : la fausse position*, Lausanne : Presses Polytechniques et Universitaires Romandes
- J. F. Grcar (2011) How ordinary elimination became Gaussian elimination, *Historia Mathematica*, 38, 163–218
- J.-C. Martzloff (1988) *Histoire des mathématiques chinoises*, Paris : Masson