

0 Dialogue de sourds

Le sujet du jour, c'est la réduction des matrices ou des endomorphismes, c'est-à-dire les valeurs propres et vecteurs propres.

Nous les voyons comme faisant partie de la théorie des matrices et donc de l'algèbre linéaire, mais c'est uniquement à cause de la formation que nous avons reçue, qui elle-même est la conséquence d'une réécriture récente de cette partie des mathématiques.

Les premiers à avoir calculé des valeurs propres auraient été bien surpris qu'on leur parle de matrices ou d'espace vectoriel, qui n'existaient pas de leur temps. Cela ne les a pas empêché d'introduire, comme astuce de calcul ou pour rendre compte d'une réalité physique, des coefficients que nous reconnaissons maintenant comme des valeurs propres de matrices.

histoires d'algèbre

Dialogue de sourds

valeurs propres et vecteurs propres



hist-math.fr

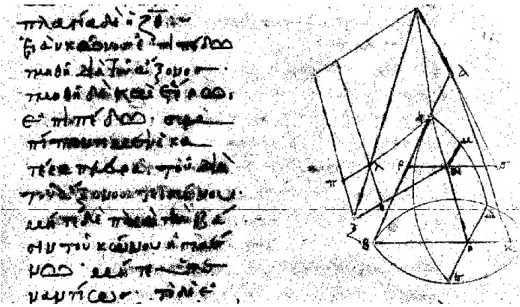
Bernard Ycart

1 Les coniques d'Apollonius (ca 200 av. J.C.)

Vous vous rendez compte, cela fait plus de deux millénaires que l'on manipule des ellipses, des hyperboles et des paraboles. Après Euclide et Archimède, Apollonius est sans doute l'auteur grec qui a été le plus étudié, traduit et commenté.

Les coniques d'Apollonius (ca 200 av. J.C.)

Manuscrit du Vatican (ca. 1200)

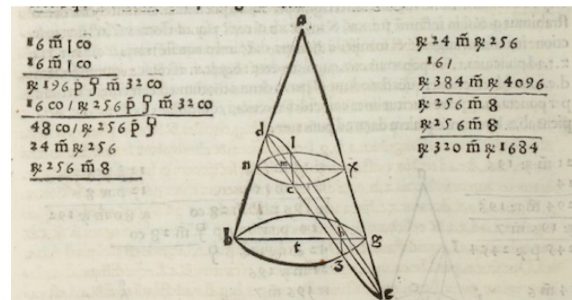


2 Les coniques d'Apollonius (ca 200 av. J.C.)

On n'a pas attendu l'algèbre linéaire pour remarquer que dans une ellipse ou une hyperbole, deux axes orthogonaux jouent un rôle particulier. Pour une ellipse, on les appelle le grand axe et le petit axe.

Les coniques d'Apollonius (ca 200 av. J.C.)

première édition imprimée (1537)



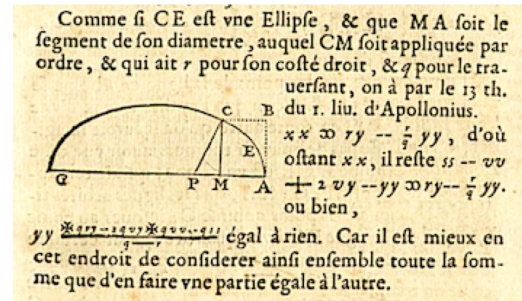
3 La géométrie (1637)

Dès l'invention des coordonnées, Descartes, et aussi Fermat après lui, se sont rendu compte que si on choisissait pour origine le centre de l'ellipse, et pour axes de coordonnées le grand axe et le petit axe, alors l'équation de l'ellipse prenait sa forme la plus simple possible.

Mais évidemment, il n'était pas question de parler de forme quadratique, encore moins de valeurs propres ou d'axes principaux.

La géométrie (1637)

René Descartes (1596-1650)



4 Expédition de Laponie (1736-1737)

Le passage à la dimension trois au dix-huitième siècle était d'autant plus naturel que la grande question d'alors était la forme de la Terre, dont Newton avait prédit qu'elle était un ellipsoïde aplati au pôle.

Le triomphe de Maupertuis avait été de ramener de Laponie la vérification expérimentale. La Terre était bien aplatie au pôle.

Expédition de Laponie (1736-1737)

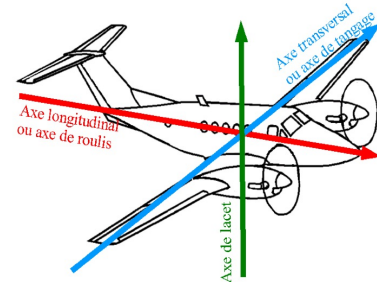
Pierre Louis Moreau de Maupertuis (1698-1759)



5 Axes principaux d'inertie

Passer d'un ellipsoïde à un corps quelconque n'était pas évident. C'est Euler qui le premier a reconnu qu'on pouvait trouver pour n'importe quel corps solide trois axes de rotation privilégiés : les axes principaux d'inertie. Étonnamment, le domaine d'application d'Euler n'était pas l'aéronautique, ...

Axes principaux d'inertie



6 Construction et manœuvre des vaisseaux (1776)

C'était la marine. La construction navale l'a préoccupé pendant l'essentiel de sa carrière ; depuis le sujet de son premier concours à l'Académie des sciences de Paris en 1727, jusqu'au livre dont cette figure est extraite, cinquante ans plus tard : « Théorie complète de la construction et de la manœuvre des vaisseaux ».

Comme c'était Euler, sa réflexion sur les navires a produit une théorie complète du mouvement des corps solides, avec une formalisation de ce mouvement sous forme d'une translation et d'une rotation instantanées, l'écriture de l'inertie par rapport à un axe quelconque comme une forme quadratique, et finalement la décomposition spectrale du tenseur d'inertie le long de ses axes principaux.

Oui mais ceci est la vision moderne, donc complètement anachronique. Pour Euler, il n'était pas question ni de tenseur ni de matrice d'inertie, encore moins d'une décomposition spectrale.

7 Traité de dynamique (1743)

Une dizaine d'années avant qu'Euler ne publie sa découverte des axes principaux d'inertie, d'Alembert avait écrit son « Traité de dynamique », qui a fait date dans l'histoire de la mécanique.

Newton dans les Principia naturalis avait superbement expliqué le mouvement d'une planète autour du soleil, par l'attraction universelle. Mais il s'était aussi montré conscient de la difficulté qu'il y avait à résoudre ses équations pour trois corps ou plus, interagissant deux à deux.

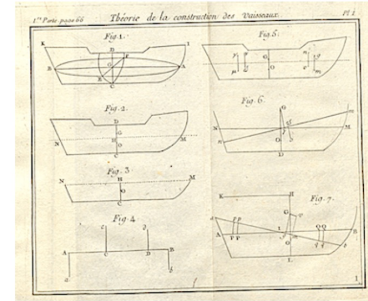
Du haut de ses vingt-six ans, d'Alembert annonce comme vous le voyez « un principe général pour trouver le Mouvement de plusieurs corps qui agissent les uns sur les autres d'une manière quelconque ». Le principe général en question consiste à faire un développement limité, pour négliger froidement les termes d'ordre supérieur à un, et se ramener à ce que nous appelons un système linéaire à coefficients constants.

Et là, comme en passant, d'Alembert donne une astuce promise à un bel avenir.

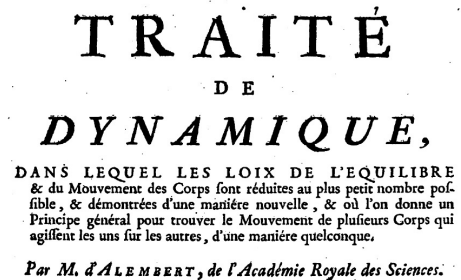
8 pour intégrer ces équations,...

Vous le voyez, d'Alembert multiplie la première de ses deux équations linéaires par α , la seconde par ν pour les ajouter ensemble ; α et ν sont deux nombres indéterminés. Il fait en sorte, dit-il, que $(2\alpha - 2\nu)x + (-\alpha + 2\nu)y$ soit un multiple de $\alpha x + \nu y$. En clair, d'Alembert effectue un changement de variable qui diagonalise son système linéaire, pour se ramener à deux équations indépendantes. Bien sûr, l'astuce de d'Alembert revient à calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice du système, mais il n'est pas question de l'exprimer ainsi.

Construction et manœuvre des vaisseaux (1776) Leonhard Euler (1707-1783)



Traité de dynamique (1743) Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783)



pour intégrer ces équations, ... d'Alembert, Traité de dynamique (1743)

$$(P) - ddx = (2x - y) \cdot \frac{2dx^2}{T^2}, \& (Q) - ddy = (2y - 2x) \cdot \frac{2dy^2}{T^2}$$

pour intégrer ces Equations, je multiplie la première par α , & la seconde par ν (α & ν étant deux nombres indéterminés) & ensuite je les ajoute ensemble, ce qui donne

$$(R) - \alpha ddx - \nu ddy = [(2\alpha - 2\nu) \cdot x + (-\alpha + 2\nu) \cdot y] \cdot \frac{2dx^2}{T^2}$$

Je fais ensuite, que $(2\alpha - 2\nu) \cdot x + (-\alpha + 2\nu) \cdot y$ foit un multiple de $\alpha x + \nu y$, ce qui donne $\frac{2\alpha - 2\nu}{\alpha} = \frac{2\nu - \alpha}{\nu}$,

& $\alpha = \pm \nu\sqrt{2}$. Donc

9 Giuseppe Luigi Lagrange (1736–1813)

L'astuce de d'Alembert avait été remarquée, en particulier par Lagrange. Il écrit en 1766 un mémoire contenant sa « solution de différents problèmes de calcul intégral ». Les applications sont variées : mécanique des fluides, cordes vibrantes, et bien sûr mouvement des planètes. Dans chacun des cas, la résolution consiste à se ramener par approximation à un système différentiel linéaire, puis à le diagonaliser en calculant ses vecteurs propres.

Voici par exemple comment il exprime la stabilité d'un point fixe dans un système différentiel. En vocabulaire moderne, il commence par se ramener au système d'ordre 1 dont la matrice est le jacobien, puis il calcule son polynôme caractéristique et écrit l'équation $P = 0$. Il dit alors :

Giuseppe Luigi Lagrange (1736–1813)
Solution de différents problèmes de calcul intégral (1766)



10 l'état d'équilibre d'un système quelconque

« Si toutes les racines de cette équation sont réelles négatives et *inéga*les, l'état d'équilibre sera *stable* en général, quel que soit le dérangement initial du système. »

Ce sont bien des conditions de stabilité d'un point fixe en fonction des valeurs propres du jacobien. Mais pourquoi donc introduit-il cette restriction des racines inégales ?

Lagrange est quelqu'un de prudent. Déjà d'Alembert avait remarqué que son astuce posait problème quand l'équation caractéristique avait des racines multiples : la diagonalisation pouvait ne pas fonctionner. Il s'en était tiré en invoquant des perturbations infiniment petites de l'équation qui rendraient toutes les racines distinctes.

Mais pour Lagrange, cela ne suffit pas. Il préfère n'affirmer que ce qu'il sait vrai. En l'occurrence, sa prudence excessive est à l'origine d'une erreur qui va durer pratiquement un siècle. Lagrange donne l'impression de confondre quelque peu condition nécessaire et condition suffisante.

l'état d'équilibre d'un système quelconque
Lagrange, Solution de différents problèmes de calcul intégral (1766)

Si toutes les racines de cette équation sont réelles négatives et *inéga*les, l'état d'équilibre sera *stable* en général, quel que soit le dérangement initial du système.

11 toutes réelles négatives & inégales

Il *faudra*, dit-il, que les racines de l'équation $P = 0$ soient toutes réelles négatives et *inéga*les, auquel cas, etc.

Et comme le monde est bien fait, il ne peut pas en être autrement. Il dit plus loin :

« Au reste quoiqu'il soit difficile, peut-être impossible, de déterminer en général les racines de l'équation $P = 0$, on peut cependant s'assurer, par la nature même du problème, que ces racines sont nécessairement toutes réelles inégales et négatives ; car sans cela, les valeurs des variables pourraient croître à l'infini, ce qui serait absurde. »

Cette démonstration par la physique sera reprise par les successeurs de Lagrange, à commencer par Laplace.

toutes réelles négatives & inégales
Lagrange, Solution de différents problèmes de calcul intégral (1766)

contiendroient les produits $y^2, y'y''$ &c. Ainsi il faudra pour que la solution soit bonne *mécaniquement* 1.° que les valeurs initiales Y', Y'', Y''' &c. V', V'', V''' &c. soient infiniment petites. 2.° que les expressions de y', y'', y''' &c. ne contiennent aucun terme qui augmente à l'infini avec le tems t ; par conséquent il faudra que les racines de l'équation $P = 0$ soient toutes réelles négatives & inégales, auquel cas la valeur de y' ne contiendra que des *sinus* & des *cosinus* (*Art. préc.*), ou au moins que les termes qui renfermeroient l'arc t disparaissent d'eux mêmes.

12 Pierre-Simon Laplace (1749–1827)

La mécanique céleste est le sujet de prédilection de Laplace, pendant la plus grande partie de sa vie. Il écrit ses premières « Recherches sur le calcul intégral et sur le système du monde », à seulement 23 ans, et il connaît parfaitement l'enjeu de ces recherches : rien de moins que l'équilibre du système solaire en entier, et non plus limité à l'équilibre Terre-Lune, ou Saturne-Jupiter comme chez Lagrange.

Il revient sur le sujet en 1789.

13 que des racines réelles et inégales

« Par conséquent, il importe de s'assurer que les valeurs de f ne peuvent être ni égales ni imaginaires. Cette recherche paraît supposer la connaissance des masses des planètes qui entrent dans les coefficients de l'équation en f ; mais il est très remarquable que, quelles que soient ces masses, pourvu qu'elles se meuvent toutes dans le même sens, l'équation en f ne peut avoir que des racines réelles et inégales. »

Donc le système solaire est stable! Nous voilà soulagés, mais le problème reste entier : comment être sûr qu'un système donné sera diagonalisable?

14 Augustin Louis Cauchy (1789–1857)

Voici Cauchy dans les années 1820. Il est le premier à unifier différentes notions qui jusque là étaient dispersées. C'est à lui que l'on doit le premier énoncé général du théorème spectral. Étant donnée une matrice symétrique, alors non seulement ses valeurs propres sont réelles, mais encore elle est diagonalisable.

15 Mémoire sur l'équation qui a pour racines... (1826)

Le théorème est énoncé pour la première fois dans ce mémoire lu le 20 novembre 1826 : « Sur l'équation qui a pour racines les moments d'inertie principaux d'un corps solide, et sur diverses équations du même genre. »

En fait Cauchy énonce deux théorèmes. Voici le premier.

Pierre-Simon Laplace (1749–1827)

Recherches sur le calcul intégral et sur le système du monde (1772)



que des racines réelles et inégales

Laplace, Mémoire sur les variations séculaires des orbites des planètes (1789)

Par conséquent, il importe de s'assurer que les valeurs de f ne peuvent être ni égales ni imaginaires. Cette recherche paraît supposer la connaissance des masses des planètes qui entrent dans les coefficients de l'équation en f ; mais il est très remarquable que, quelles que soient ces masses, pourvu qu'elles se meuvent toutes dans le même sens, l'équation en f ne peut avoir que des racines réelles et inégales.

Augustin Louis Cauchy (1789–1857)

Jules Boilly (1821)



Mémoire sur l'équation qui a pour racines... (1826)

Augustin Louis Cauchy (1789–1857)

MÉMOIRE

SUR

L'équation qui a pour racines les moments d'inertie principaux d'un corps solide, et sur diverses équations du même genre.

PAR M. A. L. CAUCHY.

Lu à l'Académie royale des Sciences, le 20 novembre 1826.

16 une équation dont toutes les racines sont réelles

« Si l'on nomme s la somme des carrés de n variables indépendantes x, y, z, u, \dots , et r une fonction homogène du second degré, composée avec ces mêmes variables, et si l'on cherche les valeurs *maximum* ou *minimum* du rapport r sur s , la détermination de ces valeurs dépendra d'une équation du n -ième degré dont toutes les racines sont réelles. »

Une fonction homogène du second degré, c'est un polynôme de degré 2 en les variables, une forme quadratique si vous voulez. Cauchy donne la forme variationnelle du résultat, et il la relie au problème des axes principaux d'inertie d'Euler. Que les axes principaux existent pour toute matrice symétrique, quelle que soit la dimension, Cauchy le dit comme suit.

17 une fonction qui renferme seulement les carrés

« Étant donnée une fonction homogène du second degré de plusieurs variables, on peut toujours leur substituer d'autres variables, liées aux premières par des équations linéaires tellement choisies que la somme des carrés des premières soit équivalente à la somme des carrés des secondes, et que la fonction donnée de x, y, z, \dots se transforme en une fonction de ξ, η, ζ, \dots , homogène et du second degré, mais qui renferme seulement les carrés de ces dernières variables. »

Traduisez : il existe une application linéaire préservant la norme, c'est-à-dire une transformation orthogonale, qui diagonalise la forme quadratique.

18 Sur l'équation à l'aide de laquelle... (1829)

Cauchy est parfaitement conscient de la généralité de son résultat. Trois ans plus tard il le recycle dans ses exercices mathématiques. Il reprend exactement les mêmes énoncés, mais l'application invoquée est la détermination du mouvement des planètes, le problème de Lagrange et Laplace. Cette fois-ci, il donne tout de même une démonstration.

19 Urbain Le Verrier (1811–1877)

Stable ou pas, la question du système solaire reste en suspens, tant que personne ne fait effectivement le calcul des valeurs propres. Oui, mais des planètes il y en a sept, et il faut tout de même un certain courage pour diagonaliser un système de sept équations à sept inconnues.

Du courage, Urbain Le Verrier n'en manque pas. Dans son premier mémoire à l'Académie des sciences, il attaque le problème de front.

une équation dont toutes les racines sont réelles

Cauchy, Mémoire sur l'équation qui a pour racines... (1826)

Si l'on nomme s la somme des carrés de n variables indépendantes x, y, z, u, \dots , et r une fonction homogène du second degré, composée avec ces mêmes variables, et si l'on cherche les valeurs *maximum* ou *minimum* du rapport $\frac{r}{s}$, la détermination de ces valeurs dépendra d'une équation du n ^{me} degré dont **toutes les racines sont réelles**.

une fonction qui renferme seulement les carrés

Cauchy, Mémoire sur l'équation qui a pour racines... (1826)

3^e Théorème. Étant donnée une fonction homogène du second degré de plusieurs variables x, y, z, \dots on peut toujours leur substituer d'autres variables ξ, η, ζ, \dots liées à x, y, z, \dots par des équations linéaires tellement choisies que la somme des carrés de x, y, z, \dots soit équivalente à la somme des carrés de ξ, η, ζ, \dots , et que la fonction donnée de x, y, z, \dots se transforme en une fonction de ξ, η, ζ, \dots , homogène et du second degré, mais qui renferme seulement les carrés de ces dernières variables.

Sur l'équation à l'aide de laquelle... (1829)

Augustin Louis Cauchy (1789–1857)

SUR L'ÉQUATION
A L'AIDE DE LAQUELLE ON DÉTERMINE LES INÉGALITÉS SÉCULAIRES
DES MOUVEMENTS DES PLANÈTES.

Soit
(1)
$$s = f(x, y, z, \dots)$$

une fonction réelle homogène et du second degré. Soient de plus
(2)
$$\varphi(x, y, z, \dots), \quad \chi(x, y, z, \dots), \quad \psi(x, y, z, \dots), \quad \text{etc.},$$

les dérivées partielles de $f(x, y, z, \dots)$ prises par rapport aux variables x, y, z, \dots

Urbain Le Verrier (1811–1877)

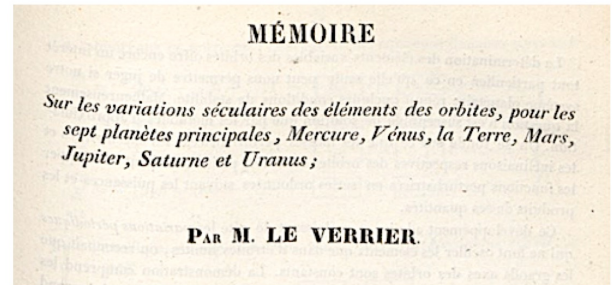


20 Sur les variations séculaires... (1839)

Mémoire sur les variations séculaires des éléments des orbites, pour les sept planètes principales, Mercure, Vénus, la Terre, Mars, Jupiter, Saturne et Uranus.

Sur les variations séculaires... (1839)

Urbain Le Verrier (1811–1877)



21 Le Verrier découvrant la planète Neptune

Comment ? il ne compte pas Neptune ? Eh bien non justement : il ne l'a pas encore « vue au bout de sa plume » comme a dit Arago.

Quand on voit l'article de 1839, on s'étonne un peu moins des 1300 pages de calculs serrés qui ont conduit à la découverte de Neptune sept ans plus tard.

Quant aux raisons pour lesquelles ce magnifique projet de fresque commémorant l'exploit, n'a jamais vu le jour, ne faites pas les étonnés, je vous ai déjà parlé de la gestion humaine de Le Verrier à la direction de l'observatoire. Non ? Ah bon, peut-être pas encore.

Le Verrier découvrant la planète Neptune

Dupain, Projet de fresque pour l'Observatoire (1889)



22 Sur les variations séculaires... (1839)

Revenons à l'article de 1839.

Ceci est le système de sept équations à sept inconnues dont il cherche les valeurs propres. Comme je ne doute pas que vous y atteliez aussitôt, je vous ai marqué les termes diagonaux en bleu, histoire de faciliter le travail.

Oui, c'était un bel effort de la part de Le Verrier. Le problème est qu'il était parfaitement vain. On ne saura que plus tard que l'approximation à l'ordre un de d'Alembert, Lagrange et Laplace, n'était absolument pas justifiée, et il faudra attendre Poincaré, à la fin du siècle, pour comprendre un peu mieux, non pas la stabilité du système solaire, mais juste pourquoi le problème est si compliqué.

Sur les variations séculaires... (1839)

Urbain Le Verrier (1811–1877)

$$\begin{cases}
 (g-5,509\ 882)N + 1,870\ 086N'' + 0,422\ 908N''' + 0,008\ 814N'''' = 0, \\
 0,287\ 865N + (g-11,811654)N'' + 5,711\ 090N''' + 0,058\ 717N'''' = 0, \\
 0,049\ 099N + 4,308\ 033N'' + (g+12,070\ 682)N''' + 0,229\ 326N'''' = 0, \\
 0,006\ 235N + 0,269\ 851N'' + 1,397\ 369N''' = (g-17,596\ 207)N'''' = 0, \\
 0,000\ 02231N + 0,000\ 799\ 48N'' + 0,002\ 182\ 27N''' + 0,001\ 124\ 62N'''' = 0, \\
 0,000\ 001\ 45N + 0,000\ 4522N'' + 0,000\ 135\ 88N''' + 0,000\ 065\ 65N'''' = 0, \\
 0,000\ 000\ 06N + 0,000\ 001\ 94N'' + 0,000\ 005\ 79N''' + 0,000\ 002\ 23N'''' = 0,
 \end{cases}$$

23 Karl Weierstrass (1815–1897)

Et la théorie de la diagonalisation ? Les choses en étaient restées à peu près au même point depuis les articles de Cauchy.

En 1858, Weierstrass reprend la question de la diagonalisation dans le cas général.

Le problème, dit-il, n'est pas encore résolu dans les circonstances exceptionnelles où les racines de l'équation ne sont pas différentes l'une de l'autre, la difficulté qui se présente alors aurait déjà dû être éclaircie et je propose de l'examiner attentivement plus en détail.

Comme vous le voyez dans le titre, il parle de fonctions homogènes du second degré, mais toujours pas de matrices. Pourtant en 1858, Sylvester a déjà baptisé l'objet, et Cayley publie son article, considéré comme fondateur de la théorie.

Karl Weierstrass (1815–1897)

Über ein die homogenen Functionen zweiten Grades betreffendes Theorem (1858)



24 Leopold Kronecker (1823–1891)

Une dizaine d'années, et quelques articles plus tard, par Weierstrass lui-même, et aussi par Leopold Kronecker, la théorie de la réduction des formes bilinéaires est complète.

Tout au moins à Berlin ; parce qu'à Paris, quelqu'un ne l'entend pas de cette oreille.

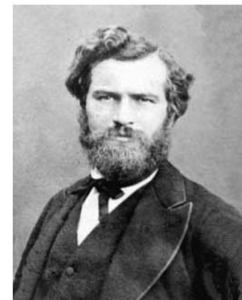
Leopold Kronecker (1823–1891)



25 Camille Jordan (1838–1922)

Ce quelqu'un, c'est Camille Jordan. Son « Traité des substitutions et des équations algébriques » a beaucoup contribué à faire connaître la théorie de Galois et on peut considérer qu'il a lancé la théorie des groupes, au moins en France.

Camille Jordan (1838–1922)



26 Traité des substitutions (1870)

Dans cet énorme ouvrage de 700 pages, environ 70 sont consacrées aux substitutions linéaires. On y trouve en particulier ce théorème. C'est ce que nous appelons la décomposition de Jordan pour une matrice.

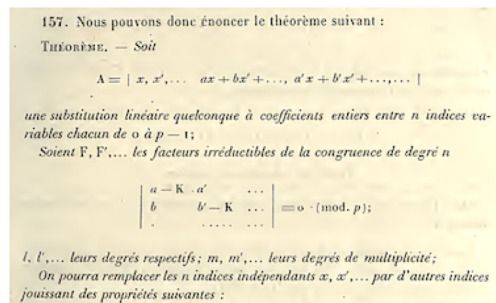
Remarquez deux choses. D'une part il s'agit d'entiers modulo p , c'est-à-dire que Jordan présente un résultat d'arithmétique, dans la lignée des *Disquisitiones Arithmeticae* de Gauss. D'autre part, il n'est toujours pas question de matrices.

Oui mais voilà, la décomposition de Jordan n'était pas véritablement nouvelle, puisqu'elle avait déjà été écrite par Weierstrass et Kronecker.

Alors, il n'était peut-être pas indispensable, quatre ans plus tard, d'en remettre une couche, sur un ton aussi polémique.

Traité des substitutions (1870)

Camille Jordan (1838-1922)



27 Mémoire sur les formes bilinéaires (1874)

« Le premier de ces problèmes n'a pas encore été abordé à notre connaissance ; le deuxième a déjà été traité (dans le cas où n est pair), par M. Kronecker, et le troisième par M. Weierstrass ; mais les solutions données par les éminents géomètres de Berlin sont incomplètes, en ce qu'ils ont laissé de côté certains cas exceptionnels, qui ne manquent pas d'intérêt. Leur analyse est en outre assez difficile à suivre, surtout celle de M. Weierstrass. »

Allons bon, mais quelle mouche a donc piqué Jordan ?

Mémoire sur les formes bilinéaires (1874)

Camille Jordan (1838-1922)

Le premier de ces problèmes n'a pas encore été abordé à notre connaissance ; le deuxième a déjà été traité (dans le cas où n est pair), par M. Kronecker (*Monatsbericht*, 15 octobre 1866), et le troisième par M. Weierstrass (*Ibid.*, 18 mai 1868) ; mais les solutions données par les éminents géomètres de Berlin sont incomplètes, en ce qu'ils ont laissé de côté certains cas exceptionnels, qui ne manquent pas d'intérêt. Leur analyse est en outre assez difficile à suivre, surtout celle de M. Weierstrass.

28 Capitulation de Sedan (2 septembre 1870)

L'explication évidente pourrait être que l'humiliation de la France à Sedan n'est pas complètement étrangère à la frustration que les Français éprouvent vis-à-vis de Berlin. Mais en l'occurrence, il ne semble pas que les arguments nationalistes soient entrés en ligne de compte. Jordan n'avait pas vraiment compris les articles de Weierstrass et Kronecker, et il avait du mal à le reconnaître.

Toujours est-il que les éminents géomètres de Berlin n'appréciaient pas l'attaque de Jordan. Si Weierstrass refuse d'entrer dans la polémique, Kronecker, lui, se fend d'une réponse bien sentie, en français, publiée dans les comptes-rendus de l'Académie des sciences de Paris.

Capitulation de Sedan (2 septembre 1870)



29 Sur les faisceaux de formes quadratiques (1874)

« [...] dans le mémoire de M. Jordan sur les formes bilinéaires, la solution du premier problème n'est pas véritablement nouvelle; la solution du deuxième est manquée, et celle du troisième n'est pas suffisamment établie. Ajoutons qu'en réalité ce troisième problème embrasse les deux autres comme cas particuliers, et que sa solution complète résulte du travail de M. Weierstrass de 1868, et se déduit aussi de mes additions à ce travail. Il y a donc, si je ne me trompe, de sérieux motifs pour contester à M. Jordan l'invention première de ces résultats, en tant qu'ils sont corrects. »

Voilà qui est envoyé. Évidemment Jordan se plaint amèrement, et le dialogue de sourds s'engage. Par communications privées et articles publics, il dure pratiquement toute l'année 1874. Et ce n'est pas vraiment une bonne nouvelle pour Jordan, parce que justement, début 1875 une place est vacante à l'Académie des sciences.

30 Charles Hermite (1822–1901)

Or pour être élu à cette place vacante, il faut obtenir l'aval de Hermite, qui pour tout un tas de raisons est devenu incontournable comme on dit de nos jours. Tenez, je ne vous donne qu'une de ces raisons. La place que convoite Jordan, vient d'être libérée par Joseph Bertrand, qui a été élu secrétaire perpétuel. Et Joseph Bertrand est le beau-frère de Hermite, c'est vous dire.

Oui mais voilà, Hermite aime bien Kronecker, . . . et puis Jordan exprime ses angoisses de manière un peu trop pressante.

31 Lettre de Jordan à Hermite (2 décembre 1874)

« Je n'ai pas pu encore obtenir un soutien d'aucun des membres de la section auxquels je me suis adressé, bien qu'ils déclarent tous qu'ils ne sont pas au courant de mes titres. Enfin j'apprends que l'on commence à dire ça et là que mes travaux sont inintelligibles, et n'ont sans doute pas la portée qu'on leur attribue. Vous m'avouerez qu'une semblable condamnation sans examen serait un procédé trop commode pour se débarrasser d'un candidat. Permettez-moi donc de faire appel à votre bienveillante équité. »

La réponse de Hermite est cinglante.

Sur les faisceaux de formes quadratiques (1874)

ALGÈBRE. — *Sur les faisceaux de formes quadratiques et bilinéaires;*
Note de M. KRONECKER.

« J'ai l'honneur d'offrir à l'Académie mes Mémoires sur les faisceaux de formes quadratiques et bilinéaires. Il résulte des développements contenus dans ces Mémoires, à la fin desquels cette conclusion se trouve d'ailleurs indiquée, que dans le Mémoire de M. Jordan sur les formes bilinéaires (*Journal de M. Liouville*, 2^e série, t. XIX, p. 35-54), la solution du premier problème n'est pas véritablement nouvelle; la solution du deuxième est manquée, et celle du troisième n'est pas suffisamment établie. Ajoutons qu'en réalité ce troisième problème embrasse les deux autres comme cas particuliers, et que sa solution complète résulte du travail de M. Weierstrass de 1868, et se déduit aussi de mes additions à ce travail. Il y a donc, si je ne me trompe, de sérieux motifs pour contester à M. Jordan l'invention première de ses résultats, en tant qu'ils sont corrects; mais ce n'est pas là

Charles Hermite (1822–1901)



Lettre de Jordan à Hermite (2 décembre 1874)

Je n'ai pas pu encore obtenir un soutien d'aucun des membres de la section auxquels je me suis adressé, bien qu'ils déclarent tous qu'ils ne sont pas au courant de mes titres. Enfin j'apprends que l'on commence à dire ça et là que mes travaux sont inintelligibles, et n'ont sans doute pas la portée qu'on leur attribue. Vous m'avouerez qu'une semblable condamnation sans examen serait un procédé trop commode pour se débarrasser d'un candidat. Permettez-moi donc de faire appel à votre bienveillante équité.

32 Réponse de Hermite à Jordan (décembre 1874)

« Monsieur,

L'étude de vos travaux est tellement difficile et tellement pénible que mes devoirs présents me la rendent impossible. Votre mise en demeure de l'entreprendre cependant, sur le champ, m'oblige à vous déclarer que si vous récidivez à me la faire parvenir par ceux de vos amis qui sont membres de l'Académie, j'y réponds en envoyant immédiatement ma démission de membre de l'Institut. »

Ouille, ça fait mal! Oh, ne vous inquiétez pas trop pour Jordan, six ans plus tard, Hermite se fend d'une belle lettre à Saint-Venant, son collègue à l'Académie pour la section de mécanique.

Réponse de Hermite à Jordan (décembre 1874)

Monsieur,

L'étude de vos travaux est **tellement difficile et tellement pénible** que mes devoirs présents me la rendent impossible. Votre mise en demeure de l'entreprendre cependant, sur le champ, m'oblige à vous déclarer que si vous récidivez à me la faire parvenir par ceux de vos amis qui sont membres de l'Académie, j'y réponds **en envoyant immédiatement ma démission** de membre de l'Institut.

33 Lettre de Hermite à Saint-Venant (30 mars 1881)

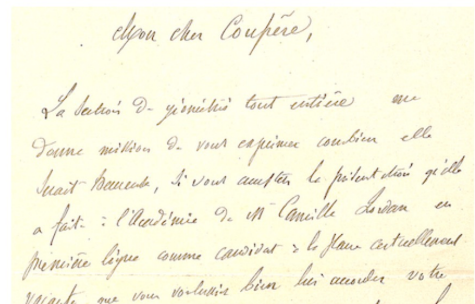
« Mon cher confrère,

La section de géométrie tout entière me donne mission de vous exprimer combien elle serait heureuse, si vous acceptiez la présentation qu'elle a faite à l'Académie de M. Camille Jordan en première ligne comme candidat à la place actuellement vacante, que vous voulussiez bien lui accorder votre suffrage. »

Eh bien voilà, c'était pas la peine de s'énerver! À partir de son élection à l'Académie en 1881, et plus encore après avoir pris la direction du journal de Liouville, Jordan occupe dans les mathématiques françaises une place prépondérante. Tout comme celle qu'occupe Kronecker en Allemagne : lui a pris la direction du journal de Crelle.

Donc tout est bien qui finit bien? Pour les protagonistes, c'est vrai. Mais les mathématiques en tant que discipline, ont-elle la même importance qu'avant? Pas forcément, si on en croit l'oncle maternel de Jordan, le frère de sa mère.

Lettre de Hermite à Saint-Venant (30 mars 1881)



Mon cher Confrère,
La section de géométrie tout entière me
donne mission de vous exprimer combien elle
serait heureuse, si vous acceptiez la présentation
qu'elle a faite à l'Académie de M. Camille Jordan en
première ligne comme candidat à la place actuellement
vacante que vous voudriez bien lui accorder votre

34 Camille Jordan (1858)

Il s'appelle Pierre Puvis de Chavannes. Il a peint ce magnifique portrait de Jordan à l'âge de 20 ans. Dans les années 1880, c'est un peintre reconnu, et les commandes officielles affluent.

Camille Jordan (1858)

Pierre Puvis de Chavannes (1824-1898)



35 Le bois sacré (1885)

Au moment où son neveu prend la direction du journal de Liouville, Puvis de Chavannes peint cette immense fresque dans le grand amphithéâtre de la Sorbonne. Il s'agit d'une allégorie. La Sorbonne assise au centre, est entourée par les arts, les lettres et les sciences.

Le bois sacré (1885)

Pierre Puvis de Chavannes (1824-1898)



36 Le bois sacré (sciences) (1885)

Les sciences sont à droite de la fresque. Dans les propres mots de l'auteur, « on y voit la Botanique avec sa gerbe de plantes ; la Géologie appuyée sur un fossile ; les deux Génies de la Physiologie tenant l'un un flacon, l'autre un scalpel ; la Physique entrouvrant ses voiles devant un essaim de jeunes gens qui se vouent à son culte en lui offrant comme prémices de leurs travaux la flamme de l'électricité ; à l'ombre d'un bosquet, la Géométrie, figurée par un groupe absorbé dans la recherche d'un problème. »

Appréciez la place marginale des mathématiques, qui non seulement se trouvent reléguées à l'extrême droite de la fresque, mais qui surtout sont figurées par de la géométrie à la Euclide. Comme s'il n'y avait en mathématiques rien de moderne, rien de spectaculaire, comparable à l'électricité pour la physique.

À propos, faites-moi penser à vous raconter pourquoi Nobel a oublié les mathématiques dans son testament. Vous dites ? C'est déjà fait ? Ah oui, c'est vrai.

Le bois sacré (sciences) (1885)

Pierre Puvis de Chavannes (1824-1898)



37 références

Je vous dois des excuses : Hermite qui pardonne à Jordan, et qui magnanime, décide de le placer en première ligne pour qu'il soit élu à l'Académie des sciences, c'est un peu du roman. Oh non, il n'y a rien de faux, Hermite a bien écrit le 30 mars 1881 à Saint-Venant pour lui recommander Jordan. Mais c'était contraint et forcé.

En 1881, il y avait trois candidats à la succession de Michel Chasles : Jordan, Darboux, et Mannheim. Le préféré de Hermite était Darboux, et il ne voulait absolument pas de Mannheim. Voici un extrait d'une lettre qu'il envoie à Mittag-Leffler, le 26 février.

« je crois Darboux supérieur à Jordan, et que la limite extrême des concessions, je l'ai atteinte en me résignant à l'ex-aequo, afin de ne pas augmenter les chances de Mannheim, qui remue ciel et terre, qui m'a fait écrire en sa faveur par M. Kronecker ! qui se fait recommander par le président du conseil, par Gambetta ! et ce qui dépasse tout ce qu'on peut imaginer, par Victor Hugo !! Oui mon cher ami, Victor Hugo dans un dîner, auquel M. Berthelot avait été invité, a mis son éloquence au service d'une cause qui n'est pas meilleure que la cause abominable de l'amnistie, et du radicalisme. »

Mais alors, si Darboux était le meilleur, pourquoi n'a-t-il pas été choisi ? Voici l'explication de Hermite, datée du 11 mars :

« Darboux a fait un mariage en-dessous de sa position, qui a été légitimé longtemps après la naissance de son fils aîné. De là dans l'opinion académique une défaveur dont il porte le poids, et qui lui fait préférer M. Camille Jordan. »

Pas très scientifique tout cela : vous ne trouvez pas ? Bon, c'est vrai, j'ai un peu honte de citer une correspondance privée, mais je sais que vous aimez bien les ragots, et puis personne ne va venir réclamer !

références

- F. Brechenmacher (2007) La controverse de 1874 entre Camille Jordan et Leopold Kronecker, *Revue d'histoire des mathématiques*, 13, 187–257
- F. Brechenmacher (2012) Un portrait kaléidoscopique du jeune Camille Jordan, <http://images.math.cnrs.fr>
- T. Hawkins (1975) Cauchy and the spectral theory of matrices, *Historia Mathematica*, 2, 1–29
- J. Laskar (2017) Des premiers travaux de Le Verrier à la découverte de Neptune, *Comptes Rendus Physique*, 18, 504–519
- L. A. Steen (1973) Highlights in the history of spectral theory, *The American Mathematical Monthly*, 80, 359–381