0 Les troupeaux d'Hélios

Pour une fois, nous allons commencer par une légende. Pas n'importe quelle légende : une véritable odyssée. Non, mieux que ça, *la* véritable Odyssée.

histoires d'algèbre

Les troupeaux d'Hélios

équations de Pell-Fermat

hist-math.fr Bernard YCART

1 Ulysse et Circé

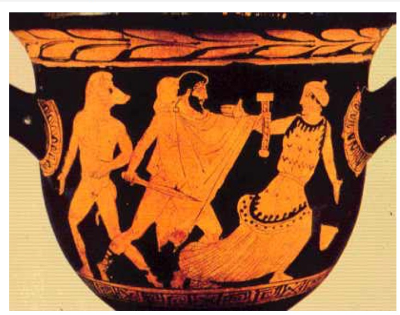
À partir du livre dix, Circé est pour beaucoup dans les malheurs d'Ulysse. Pire qu'une magicienne, c'est une « polypharmacienne » d'après le texte grec. C'est-à-dire qu'elle est capable de concocter toutes sortes de mixtures maléfiques. Avec ses potions, c'est un jeu d'enfant pour elle que de transformer les compagnons d'Ulysse en pourceaux.

Ulysse et Circé
Homère, l'Odyssée (ca 700 av. J.-C.)

2 Ulysse et Circé

Alors bien sûr ça ne fait pas plaisir à Ulysse, mettez-vous à sa place. Et comme Hermès lui a donné un antidote, il montre à Circé de quel bois il se chauffe.

Ulysse et Circé
Homère, l'Odyssée (ca 700 av. J.-C.)



3 Ulysse et Circé

Ulysse et Circé
Homère, l'Odyssée (ca 700 av. J.-C.)

Mais Circé a d'autres capacités que la polypharmacie, et la dispute se termine comme on s'y attend tous, c'est-à-dire à l'horizontale.

Et pour sceller la réconciliation, Circé qui a en plus des pouvoirs de divination, prévient Ulysse de ce qui l'attend avant de rentrer à Ithaque.

4 Ulysse et les sirènes

Ulysse et les sirènes
Homère, l'Odyssée (ca 700 av. J.-C.)

D'abord il devra résister aux sirènes. . . des sirènes justement. Il bouchera les oreilles des rameurs pour être le seul à entendre lesdites sirènes, et se fera attacher au mât, pour mieux y résister.

5 de Charybde en Scylla

de Charybde en Scylla
Homère, l'Odyssée (ca 700 av. J.-C.)

Ensuite Ulysse devra affronter deux terribles monstres : Charybde qui avalerait d'un coup son navire et toute l'eau qu'il a autour, et Scylla, à qui il ne pourra pas faire moins que de sacrifier quelques uns de ses compagnons. Faut ce qu'il faut.

6 Les troupeaux d'Hélios

Puis, dit Circé, vous atteindrez l'île de Thrinacrie. Là paissent sept troupeaux de chacun cinquante génisses, et sept autres troupeaux de chacun cinquante brebis consacrés au dieu du jour, Hélios.

Si songeant à ton retour, tu respectes ces troupeaux, tu pourras, après avoir bien souffert, revoir ta patrie ; mais, si, au contraire, tu attaques ces animaux, je te prédis la perte de ton navire et la mort de tous tes compagnons. Ulysse, si tu échappes au trépas, tu rentreras malheureux dans Ithaque, après avoir longtemps erré sur la mer et perdu tous tes guerriers.

Les troupeaux d'Hélios
Homère, l'Odyssée (ca 700 av. J.-C.)

7 Vol des troupeaux du soleil (1555)

Et devinez ce qui s'est passé ? Les compagnons d'Ulysse n'ont pas su résister à la tentation d'un barbecue.

Vol des troupeaux du soleil (1555)
Pellegrino Tibaldi (1527–1596)

8 Hélios, Dieu du Soleil

Hélios, qui de son char voit tout ce qui se passe, pousse des hauts cris, se plaint aussitôt à Zeus, qui est bien obligé de sévir. Ben oui quand même, si on ne fait plus respecter un interdit divin, ça tourne à l'anarchie.

Hélios, Dieu du Soleil

9 Les compagnons périssent dans la tempête (1922)

Et quand Zeus se fâche, il ne plaisante pas de la tempête. Comme Circé l'avait prédit, Ulysse est le seul à en réchapper.

Les compagnons périssent dans la tempête (1922)
Jan Styka (1858–1925)

10 L'île de Thrinacrie

Bien : tous avez tout suivi, vous savez donc que les troupeaux d'Hélios sont gardés dans l'île de Thrinacrie, qui étymologiquement a trois sommets, c'est-à-dire qu'elle est triangulaire. Or quelle île de la méditerrannée est presque triangulaire ? La Sicile ! Et quel est le mathématicien sicilien le plus célèbre de tous les temps ?

Euh, qui a répondu Andrew Wiles ?

L'île de Thrinacrie

11 Le meurtre d'Archimède (1815)

C'est Archimède bien sûr. Ah non ! Vous n'allez pas me faire raconter la mort d'Archimède une fois de plus. Tenez, si vous voulez on va dire qu'il est mort d'une cirrhose du foie.

Archimède est donc à Syracuse, et on peut supposer une certaine rivalité avec les mathématiciens d'Alexandrie en Égypte, parmi lesquels Érathostène et Apollonius. Dans la préface au traité de la spirale, Archimède se montre un peu énervé, mais on ne sait pas bien à qui il pense.

Le meurtre d'Archimède (1815)
Domenico Udine Nani (1784–1850)

12 Traité de la spirale, préface

« Car il se trouve qu'il y a deux de ces problèmes dans une lettre à Conon, qui ne sont pas séparés mais ajoutés à la fin, de sorte que ceux qui prétendent trouver tous les problèmes, sans publier aucune démonstration, seront confondus, car ils promettront de trouver des solutions à des problèmes impossibles. »

Voilà donc Archimède surpris en flagrant délit de perfidie, en train de poser des problèmes qu'il sait impossible, pour confondre ses rivaux trop présomptueux. Donc vous ne serez pas étonnés que le problème des bœufs qui va suivre, lui soit attribué. On devrait plutôt dire « problème des bovins », parce qu'il n'y a pas de bœufs, mais des taureaux et des vaches.

Traité de la spirale, préface
Archimède (ca 287–212 av. J.-C.)

Car il se trouve qu'il y a deux de ces problèmes dans une lettre à Conon, qui ne sont pas séparés mais ajoutés à la fin, de sorte que ceux qui prétendent trouver tous les problèmes, sans publier aucune démonstration, seront confondus, car ils promettront de trouver des solutions à des problèmes impossibles.

13 Le problème des bœufs

« Mesure-moi, ami, si tu as la sagesse en partage, avec une application soutenue, le nombre des bœufs d'Hélios qui jadis paissaient dans les plaines de l'île Thrinacrienne, la Sicile, répartis en quatre troupeaux de couleurs variées, l'un blanc de lait, le second d'un noir brillant, le troisième brun, et le quatrième tavelé. Dans chaque troupeau, il y avait un nombre considérable de taureaux dans les proportions que voici : imagine, ami, les blancs en nombre égal à la moitié, augmentée du tiers, des taureaux noirs et augmentée de tous les bruns. »

Je ne vais pas vous lire tout l'énoncé, d'autant qu'après les équations entre les nombres de taureaux, viennent les équations entre les nombres de vaches.

Le problème des bœufs
Archimède (ca 287–212 av. J.-C.)

14 inconnues et équations

Il y en a sept en tout. Les voici sous forme moderne, entre les huit inconnues : nombre de taureaux et de vaches pour chacune des quatre couleurs.

inconnues et équations
Archimède, Problème des bœufs

	blancs	noirs	bruns	tavelés
taureaux	w	x	y	z
vaches	w'	x'	y'	z'

$$
\begin{aligned}
w &= (1/2+1/3)x+z\\
x &= (1/4+1/5)y+z\\
y &= (1/6+1/7)w+z\\
w' &= (1/3+1/4)(x+x')\\
x' &= (1/4+1/5)(y+y')\\
y' &= (1/5+1/6)(z+z')\\
z' &= (1/6+1/7)(w+w')
\end{aligned}
$$

15 Solutions entières

Allons bon, sept équations, huit inconnues, il y a une infinité de solutions. Les solutions entières sont les suivantes, en fonction d'un paramètre entier k.

Même en prenant $k = 1$ cela fait tout de même plus de 50 millions de bestiaux, soit environ 2000 têtes pour chaque kilomètre carré de Sicile. Jusque-là, cela reste jouable. Mais ce n'est pas terminé. D'ailleurs Archimède ne considère pas cette première partie du problème comme un exploit.

Solutions entières

Archimède, Problème des bœufs

$$\begin{aligned} w &= 10366482\,k \\ x &= 7460514\,k \\ y &= 7358060\,k \\ z &= 4149387\,k \\ w' &= 7206360\,k \\ x' &= 4893246\,k \\ y' &= 3515820\,k \\ z' &= 5439213\,k \end{aligned}$$

16 rangé parmi les savants

« Ami si tu peux me dire exactement combien il y avait de bœufs d'Hélios, en précisant le nombre des taureaux robustes, et, à part, celui des vaches pour chaque couleur, tu ne seras, certes pas appelé ignorant ni inculte en matière de nombres, mais tu ne seras pas pour autant rangé parmi les savants. Mais examine encore toutes les manières dont les bœufs d'Hélios ont été groupés. »

rangé parmi les savants

Archimède, Problème des bœufs

Ami si tu peux me dire exactement combien il y avait de bœufs d'Hélios, en précisant le nombre des taureaux robustes, et, à part, celui des vaches pour chaque couleur, tu ne seras, certes pas appelé ignorant ni inculte en matière de nombres, mais tu ne seras pas pour autant rangé parmi les savants. Mais examine encore toutes les manières dont les bœufs d'Hélios ont été groupés.

17 un amas carré

« Chaque fois que les taureaux blancs venaient joindre leur multitude aux noirs, ils se rangeaient fermement en un groupe ayant la même mesure en profondeur et en largeur, et les vastes plaines de la Thrinacrie étaient remplies de cet amas carré. »

Donc $w + x$ doit être le carré d'un entier.

un amas carré

Archimède, Problème des bœufs

Chaque fois que les taureaux blancs venaient joindre leur multitude aux noirs, ils se rangeaient fermement en un groupe ayant la même mesure en profondeur et en largeur, et les vastes plaines de la Thrinacrie étaient remplies de cet amas carré.

$$w + x = a^2\,.$$

18 une figure triangulaire

« D'autre part, les bruns et les tavelés, réunis, se rangeaient de leur côté de façon à former un groupe qui, commençant par un, allait s'élargissant jusqu'à parfaire une figure triangulaire, sans que les taureaux d'autres couleurs fussent présents ni absents. »

Donc $y + z$ doit être un nombre triangulaire, de la forme $b(b + 1)/2$.

une figure triangulaire

Archimède, Problème des bœufs

D'autre part, les bruns et les tavelés, réunis, se rangeaient de leur côté de façon à former un groupe qui, commençant par un, allait s'élargissant jusqu'à parfaire une figure triangulaire, sans que les taureaux d'autres couleurs fussent présents ni absents.

$$y + z = b(b + 1)/2\,.$$

19 La perfection dans cette science

« Quand tu auras trouvé, ami, et embrassé dans ton esprit la solution de toutes ces questions, en indiquant toutes les mesures de ces multitudes, rentre chez toi, te glorifiant de ta victoire, et sache qu'on te juge arrivé à la perfection dans cette science. »

Eh bien oui, il y a de quoi ! Jugez plutôt. Si on écrit les deux nouvelles conditions, après un ou deux changements de variables, on arrive au problème suivant :

La perfection dans cette science
Archimède, Problème des bœufs

Quand tu auras trouvé, ami, et embrassé dans ton esprit la solution de toutes ces questions, en indiquant toutes les mesures de ces multitudes, rentre chez toi, te glorifiant de ta victoire, et sache qu'on te juge arrivé à la perfection dans cette science.

20 résolution

Trouver u et v tels que : u^2 moins quarante quatre milliards et quelques, fois v^2 égale 1.

On ne regarde que la plus petite solution en u et v, puis on revient aux inconnues initiales. On s'aperçoit alors que le nombre total de bestiaux est un nombre à 206 545 chiffres, soit un nombre à 206 535 chiffres pour le nombre de têtes au mètre carré de Sicile.

Euh, tout bien considéré, il n'est pas exclu qu'Archimède se soit un peu moqué du monde.

Mais en était-il bien conscient ? Eh bien probablement, oui. Nous allons voir pourquoi.

résolution
Archimède, Problème des bœufs

Trouver u et v tels que :

$$u^2 - 44\ 050\ 507\ 116\ v^2 = 1\ .$$

21 équations de Pell-Fermat

Je vous présente l'équation de Pell-Fermat. Étant donné un entier D, trouver deux entiers u et v tels que $u^2 - Dv^2 = 1$. Pas de quoi fouetter un chat me direz-vous, mais il se trouve que cette équation est une des plus anciennes et des plus importantes dans l'histoire de l'arithmétique. Si D est un entier qui n'est pas un carré parfait, elle a une infinité de solutions. Pourquoi cette équation est-elle naturelle et importante ? Vous en voyez la raison au-dessous : si u et v sont solution, alors u sur v est une approximation rationnelle de racine de D, et cette valeur est même la plus proche possible pour un dénominateur donné, au sens où u/v au carré ne diffère de D que par un sur v^2.

équations de Pell-Fermat

$$u^2 - Dv^2 = 1\ .$$

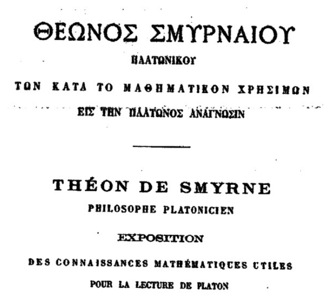
$$\frac{u}{v} = \sqrt{D + \frac{1}{v^2}}$$

22 Connaissances mathématiques pour la lecture de Platon

Bon, comme je vous parle ailleurs du scandale des irrationnelles et des approximations de racines carrées, on va faire court. Les Indiens connaissaient une approximation de racine de deux à 10^{-6} près, longtemps avant Pythagore. Les Mésopotamiens aussi d'ailleurs. Les Pythagoriciens ont peut-être retrouvé le même algorithme, mais la première trace qu'on en a, figure dans les Métriques de Héron d'Alexandrie : c'est ce que nous appelons « méthode de Héron ». On peut la voir comme un calcul de solutions de l'équation de Pell-Fermat.

Dans ce manuel écrit par un néoplatonicien, Théon de Smyrne, quatre bons siècles après Platon, donc six siècles après Pythagore. Théon ne prétend pas inventer de nouveaux théorèmes. Il expose simplement les mathématiques que l'on doit connaître pour lire Platon. Parmi ces mathématiques, on trouve un algorithme itératif pour la construction de deux suites récurrentes. Il les désigne par « côtés » et « diagonales ». Comme c'est un peu difficile à lire chez Théon de Smyrne, voici les deux récurrences sous forme moderne, sur deux suites notées c_n pour le n-ième côté, et d_n pour la n-ième diagonale.

Connaissances mathématiques pour la lecture de Platon
Théon de Smyrne (ca. 70–135)


ΘΕΩΝΟΣ ΣΜΥΡΝΑΙΟΥ
ΠΛΑΤΩΝΙΚΟΥ
ΤΩΝ ΚΑΤΑ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΝ ΧΡΗΣΙΜΩΝ
ΕΙΣ ΤΗΝ ΠΛΑΤΩΝΟΣ ΑΝΑΓΝΩΣΙΝ

THÉON DE SMYRNE
PHILOSOPHE PLATONICIEN
EXPOSITION
DES CONNAISSANCES MATHÉMATIQUES UTILES
POUR LA LECTURE DE PLATON

23 Connaissances mathématiques pour la lecture de Platon

Le $n+1$-ième côté est la somme du n-ième côté et de la n-ième diagonale, et la $n+1$-ième diagonale est la somme du n-ième et du $n+1$-ième côtés. Vous voyez le tableau des sept premières itérations en-dessous. Vous me démontrerez par récurrence pour la prochaine fois que d_n au carré moins deux c_n au carré vaut plus ou moins 1 selon la parité de n. Donc la suite d_n sur c_n converge vers racine de deux par valeurs alternativement supérieures et inférieures.

Cet algorithme donne une infinité de solutions à l'équation de Pell-Fermat pour $D = 2$. On a des traces d'un algorithme analogue pour $D = 3$ chez Héron d'Alexandrie. Concernant Archimède, vu la virtuosité des calculs auxquels il se livre, il est raisonnable de lui prêter la capacité de résoudre des équations de Pell-Fermat pour des valeurs plus grandes que 2 ou 3. Il est donc tout à fait vraisemblable qu'il se soit rendu compte que son problème des bovins était intraitable, bien qu'il ait une infinité de solutions.

Connaissances mathématiques pour la lecture de Platon
Théon de Smyrne (ca. 70–135)

$$\begin{cases} c_{n+1} &= c_n + d_n \\ d_{n+1} &= c_n + c_{n+1} \end{cases}$$

n	c_n	d_n	$2c_n^2$	d_n^2
1	1	1	2	1
2	2	3	8	9
3	5	7	50	49
4	12	17	288	289
5	29	41	1682	1681
6	70	99	9800	9801
7	169	239	57122	57121

$$d_n^2 = 2c_n^2 + (-1)^n .$$

24 Brahmagupta (ca. 598–665)

Le premier à résoudre les équations de Pell-Fermat dans le cas général, tout au moins le premier dont ont ait gardé trace, c'est Brahmagupta.

Son œuvre principale date de 628 et s'appelle le Brahmasphutasiddhanta, ce qui veut dire la doctrine de Brahma correctement établie. C'est un manuel d'astronomie, qui contient seulement deux chapitres de méthodologie mathématique. La section sept du chapitre dix-huit s'intitule « Carré affecté d'un coefficient ». Elle commence par une règle, qui permet de fabriquer à volonté des solutions, pourvu qu'on en ait déjà trouvé une.

La voici en écriture moderne.

Brahmagupta (ca. 598–665)

25 Brāhmasphuṭasiddhānta (628)

Brāhmasphuṭasiddhānta (628)

Brahmagupta (ca. 598–665)

Si

$$u_1^2 - Dv_1^2 = 1 ,$$

et

$$u_2^2 - Dv_2^2 = 1 ,$$

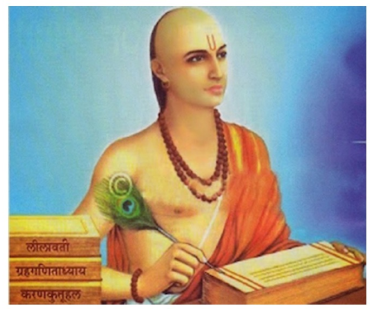
alors :

$$(u_1u_2 + Dv_1v_2)^2 - D(u_1v_2 + v_1u_2)^2 = 1 .$$

Soient (u_1, v_1) et (u_2, v_2) deux solutions, non nécessairement distinctes. La nouvelle solution est $u_1u_2 + Dv_1v_2$ comme plus grand terme, $u_1v_2 + v_1u_2$ comme plus petit terme. La nouvelle solution est différente des deux à partir desquelles elle est fabriquée. On peut en déduire que l'équation a une infinité de solutions dès qu'elle en a une. Mais en a-t-elle toujours une ? Brahmagupta n'est pas très clair là-dessus, mais ses exemples montrent des niveaux de calcul tout à fait respectables, puisqu'il donne en exercice les cas $D = 92$, et $D = 83$.

26 Bhāskarāchārya (1114–1185)

Bhāskarāchārya (1114–1185)



Cinq siècles plus tard Bhaskara va beaucoup plus loin, dans sa Bija-Ganita, qui est un manuel d'algèbre. Il va donner un algorithme de recherche sytématique des solutions. Même s'il ne l'explicite pas comme un théorème d'existence, son algorithme permet effectivement de trouver une solution pour toute valeur de D qui n'est pas un carré parfait.

Donc au douzième siècle, les Indiens savaient déjà résoudre les équations de Pell-Fermat. Non mais attendez un peu. Ni Pell ni Fermat n'étaient Indiens que je sache. Et tous les deux sont nés plus de cinq siècles après Bhaskara. Alors que viennent-ils donc faire dans cette histoire ?

27 Pierre de Fermat (1607–1665)

Pierre de Fermat (1607–1665)

Pour Fermat, ce n'est pas compliqué. Cela vient d'un des défis qu'il a lancés en France d'abord, puis aux mathématiciens anglais ensuite. Celui-ci date de 1657.

28 Lettre de Fermat à Frénicle, février 1657

« Je vous demande une règle générale pour, étant donné un nombre non quarré, trouver des nombres carrés qui, multipliés par le dit nombre donné, en ajoutant l'unité, fassent des nombres carrés. »

Fermat propose $D = 61$ et $D = 109$ comme valeurs tests : elles ne sont pas des plus faciles. Puis il conclut en se montrant égal à lui-même.

« Si vous ne m'envoyez pas la solution générale, envoyez-moi la particulière de ces deux nombres que j'ai choisis des plus petits, pour ne pas vous donner trop de peine.
Après que j'aurai reçu votre réponse, je vous proposerai quelque autre chose. Il paraît, sans le dire, que ma proposition n'est que pour trouver des nombres entiers, qui satisfassent à la question, car, en cas de fractions, le moindre arithméticien en viendrait à bout. »

Lettre de Fermat à Frénicle, février 1657
Pierre de Fermat (1607–1665)

Je vous demande une règle générale pour, étant donné un nombre non quarré, trouver des nombres quarrés qui, multipliés par le dit nombre donné, en ajoutant l'unité, fassent des nombres quarrés.

[...] Si vous ne m'envoyez pas la solution générale, envoyez-moi la particulière de ces deux nombres que j'ai choisis des plus petits, pour ne vous donner pas trop de peine. Après que j'aurai reçu votre réponse, je vous proposerai quelque autre chose. Il paroit, sans le dire, que ma proposition n'est que pour trouver des nombres entiers, qui satisfassent à la question, car, en cas de fractions, le moindre arithméticien en viendroit à bout.

29 Lord Brouncker (1620–1684)

Ce défi, envoyé en latin en Angleterre le mois suivant est relevé par deux Anglais : Lord Brouncker, et le plus connu, John Wallis. Trente ans plus tard, Wallis consacre un chapitre entier de son traité d'algèbre à ce même problème, et il évoque avec un certain agacement l'attitude de Fermat.

William Brouncker (1620–1684)

30 A treatise of Algebra both historical and practical (1685)

« Quelles étaient les méthodes de messieurs Fermat et Frénicle pour ce faire, je ne saurais le dire : car bien qu'ils nous aient envoyé de nombreux défis (que nous avons traités), ils n'ont jamais eu l'amabilité (malgré leurs promesses) de nous faire savoir comment eux-mêmes traitaient les problèmes qu'ils nous proposaient.

Je pense que nous pouvons affirmer sans risque (au vu de leur façon de traiter ces défis) que s'ils avaient eu de meilleures méthodes que les nôtres, ils se seraient glorifiés de nous avoir surpassés. Mais quand ils virent que nous avions, sans leur aide, trouvé nos propres méthodes aussi bonnes ou meilleures que les leurs, il jugèrent à propos de cacher les leurs. »

De fait, Wallis est le premier à avoir publié une solution de l'équation de Pell-Fermat, trouvée conjointement avec Lord Brouncker. Reste à comprendre ce que vient faire Pell dans cette histoire.

A treatise of Algebra both historical and practical (1685)
John Wallis (1616–1703)

What were the Methods of *M. Fermat* or *M. Frenicle* herein, I cannot tell : For though they sent us many challenges, (which were performed by us,) yet they would never be so kind, (though sometimes they seemed to promise it,) as to let us know how themselves performed any of those Problems which they proposed to us ; [...] But I think we may well be confident (from their manner of managing these contests,) that if they had better Methods than those of ours, they would have glorified in out-doing us therein. But when they saw that we had without their help, found Methods of our own, as good or better than theirs, they thought it fit to conceal their own.

31 Leonhard Euler (1707-1783)

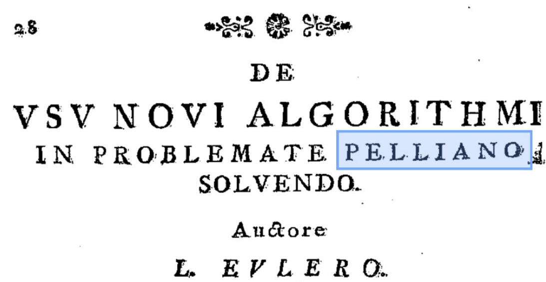
Leonhard Euler (1707-1783)

Vous apprendrez ici ou là que ce serait une bêtise d'Euler : il aurait lu en travers l'algèbre de Wallis, et en aurait conclu à tort que Pell avait résolu l'équation avant les autres.

Ah bon, une bêtise d'Euler ? Je ne sais pas vous mais moi, avant de dire qu'Euler s'est trompé, j'ai tendance à vérifier, et plutôt deux fois qu'une.

32 novi algorithmi in problemate Pelliano solvendo (1768)

novi algorithmi in problemate Pelliano solvendo (1768)
Leonhard Euler (1707-1783)



28

DE

VSV NOVI ALGORITHMI
IN PROBLEMATE PELLIANO
SOLVENDO.

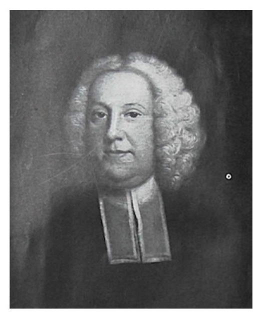
Auctore

L. EVLERO.

L'erreur est censée venir de cet article, qui accessoirement est un des premiers à employer le mot algorithme dans son sens actuel. Or dans cet article, Euler ne se limite pas aux équations de Pell-Fermat, mais il traite d'équations quadratiques un peu plus générales. Qu'est-ce qui a bien pu le pousser à attribuer ces équations à Pell ?

33 John Pell (1611-1685)

John Pell (1611-1685)



John Pell n'a pas laissé une grande trace dans l'histoire des mathématiques, et c'est un peu de sa faute. Il n'a quasiment rien publié directement sous son nom. Par contre, lors d'un séjour diplomatique en Suisse, il avait eu un élève, Johann Friedrich Rahn.

34 Johann Friedrich Rahn (1622-1676)

Johann Friedrich Rahn (1622-1676)

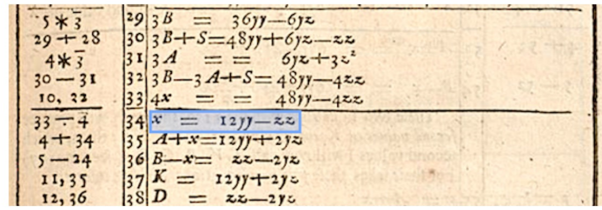
Suite aux leçons de Pell, ce Rahn avait publié en 1659 un livre d'algèbre en allemand, dans lequel il ne fait pas mystère de ce qu'il doit à Pell. Neuf ans plus tard, le livre est traduit en anglais, et soigneusement révisé par Pell. Dans les deux versions, on trouve une méthodologie de résolution propre à Pell. Elle est illustrée en particulier par le problème suivant : trouver deux triangles isocèles à côtés entiers qui ont même périmètre et même surface. C'est un problème quadratique à quatre inconnues. À l'origine, il vient d'un autre défi français, dû à Descartes cette fois-ci.

35 An introduction to algebra

Les développements sont présentés sous forme de tableaux d'équations, toutes numérotées dans la seconde colonne. Regardez l'équation trente quatre dans l'encadré bleu. C'est une équation de Pell-Fermat.

Je n'imagine pas que Euler ait pu ignorer le livre de Rahn, publié en Suisse par un compatriote, et ce que ce livre devait à Pell. Euler a très bien pu considérer qu'avec les triangles isocèles, Pell avait résolu un problème général qui englobait d'autres problèmes plus particuliers, comme le défi de Fermat. Cela suffirait à mon avis à expliquer pourquoi il a attribué à Pell la résolution de l'équation de Pell-Fermat.

An introduction to algebra
Johann Friedrich Rahn, John Pell

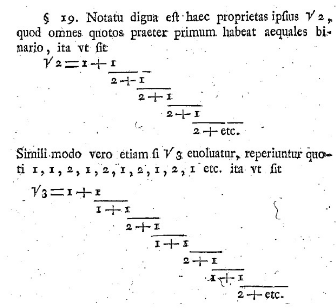


$5 * 3$	29	$3B = 36yy - 6yz$
$29 + 28$	30	$3B + S = 48yy + 6yz - zz$
$4 * 3$	31	$3A == 6yz + 3z^2$
$30 - 31$	32	$3B - 3A + S = 48yy - 4zz$
10, 22	33	$4x == 48yy - 4zz$
$33 \div 4$	34	$\boxed{x = 12yy - zz}$
$4 + 34$	35	$A + x = 12yy + 2yz$
$5 - 24$	36	$B - x = zz - 2yz$
11, 35	37	$K = 12yy + 2yz$
12, 36	38	$D = zz - 2yz$

36 De fractionibus continuis (1737)

Reste que c'est bien Euler qui le premier a compris que l'algorithme de résolution des équations de Pell fabriquait une approximation par fraction continue de la racine carrée du paramètre.

De fractionibus continuis (1737)
Leonhard Euler (1707-1783)



§ 19. Notatu digna est haec proprietas ipsius $\sqrt{2}$, quod omnes quotos praeter primum habeat aequales binario, ita vt sit

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \text{etc.}}}}}$$

Simili modo vero etiam si $\sqrt{3}$ euoluatur, reperiuntur quoti 1, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1 etc. ita vt sit

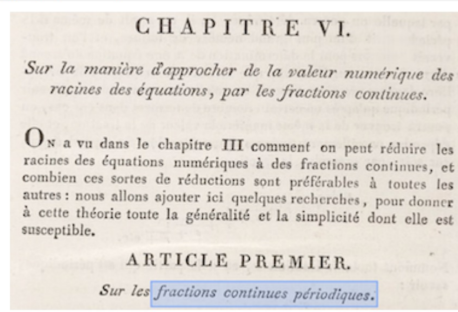
$$\sqrt{3} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \text{etc.}}}}}}}$$

37 Traité de la résolution numérique des équations (1808)

À la suite d'Euler, Lagrange fera des fractions continues une véritable théorie. Elle commence par les fractions continues périodiques, qui approchent les solutions des équations du second degré.

De nos jours, les fractions continues sont bien oubliées. Mais si vous doutez de l'importance qu'elles ont eue dans l'histoire de l'algèbre, regardez donc l'article suivant.

Traité de la résolution numérique des équations (1808)
Joseph-Louis Lagrange (1736-1813)



CHAPITRE VI.

Sur la manière d'approcher de la valeur numérique des racines des équations, par les fractions continues.

On a vu dans le chapitre III comment on peut réduire les racines des équations numériques à des fractions continues, et combien ces sortes de réductions sont préférables à toutes les autres : nous allons ajouter ici quelques recherches, pour donner à cette théorie toute la généralité et la simplicité dont elle est susceptible.

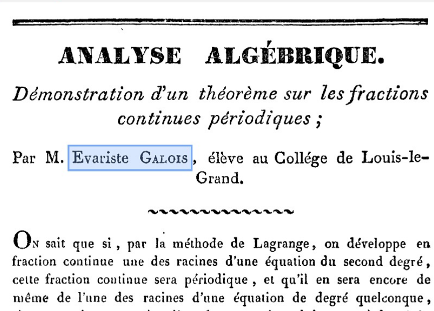
ARTICLE PREMIER.

Sur les fractions continues périodiques.

38 théorème sur les fractions continues périodiques (1828)

Démonstration d'un théorème sur les fractions continues. C'est le tout premier article d'Évariste Galois. Il avait dix-sept ans.

théorème sur les fractions continues périodiques (1828)
Évariste Galois (1811-1832)



ANALYSE ALGÉBRIQUE.

Démonstration d'un théorème sur les fractions continues périodiques ;

Par M. Evariste Galois, élève au Collége de Louis-le-Grand.

On sait que si, par la méthode de Lagrange, on développe en fraction continue une des racines d'une équation du second degré, cette fraction continue sera périodique, et qu'il en sera encore de même de l'une des racines d'une équation de degré quelconque,

39 références

Bon, puisque vous êtes dans l'ambiance, voici ce qu'Archimède n'avait pas osé préciser : la somme des nombres de taureaux blancs, et des nombres de taureaux noirs, les deux élevées à une puissance égale au nombre de vaches tavelées, est égale au nombre de taureaux bruns, toujours élevée à la même puissance. Ah, là vous faites moins les malins avec vos logiciels de calcul formel hein ?

références

- C. Brezinski (1962) *History of continued fractions and Padé approximants*, Berlin : Springer
- B. Datta, A. N. Singh (1962) *History of Hindu mathematics, a source book*, Bombay : Asia Publishing House
- M. J. Jacobson, H. C. Williams (2009) *Solving the Pell equation*, New York : Springer
- F. Patte (2000) L'algèbre en Inde au XII^e siècle, *Comptes rendus des séances de l'Académie des Inscriptions et Belles-Lettres*, 150(4), 1897–1915
- L. G. Vidiani (2007) Le problème des bœufs du Soleil, *CultureMATH - ENS Ulm*, http://culturemath.ens.fr/