

## 0 La république des lettres

Qui est le plus grand mathématicien de l'histoire ? Euclide ? Archimède ? Newton ? Gauss ? La question n'a pas trop de sens pour moi. Je ne me vois pas demander si Rembrandt était un meilleur peintre que Picasso.

Par contre je peux vous dire celui que je préfère, très subjectivement : c'est Euler. Oh vous l'aviez sûrement compris : je vous parle suffisamment souvent de ses tours de magie, de sa liberté, de sa joie de créer, de ses intuitions fulgurantes.

histoires d'algèbre

### La république des lettres

*Euler n'aurait pas dû*



hist-math.fr

Bernard YCART

## 1 Leonhard Euler (1707–1783)

Eh bien cette fois-ci, je vais vous raconter une des rares occasions où il a eu tort. Non, il n'a pas commis une erreur mathématique, il s'est juste laissé piéger dans un guépier politique pour lequel il n'était pas suffisamment armé ; et il n'en est pas sorti indemne.

Leonhard Euler (1707–1783)

Emmanuel Handmann (1753)



## 2 Pierre Louis Moreau de Maupertuis (1698–1759)

Le personnage principal de l'affaire est Maupertuis.

Dans les années 1730, la grande interrogation était la forme de la Terre. Newton avait prédit qu'elle devait être aplatie aux pôles, les données des Cassini semblaient dire le contraire. Deux expéditions avaient été envoyées, l'une en Laponie sous la direction de Maupertuis, l'autre au Pérou, celle de La Condamine. Bon mais ça, je vous l'ai déjà raconté, ne me faites pas répéter.

Bref : Maupertuis, en 1737 avait ramené de Laponie, euh... deux Laponnes, ainsi que le résultat attendu : la Terre était bien aplatie aux pôles, comme Newton l'avait prédit.

C'est Maupertuis qui avait recueilli tous les lauriers. Vous le voyez poser ici avec une toque en fourrure, la main sur un globe terrestre exagérément aplati.

Pierre Louis Moreau de Maupertuis (1698–1759)



### 3 Anders Celsius (1701–1744)

Pourtant Maupertuis avait été aidé dans cette expédition. On cite souvent Clairaut, mais il y avait aussi Celsius ; oui oui, celui des degrés. Il avait été envoyé par le gouvernement suédois.

Anders Celsius (1701–1744)



### 4 François-Marie Arouet, dit Voltaire (1694–1778)

À son retour en France, Maupertuis est le champion du camp des newtoniens contre les cartésiens, et Voltaire ne se prive pas de l'applaudir. Il se fend même de quelques couplets bien grandiloquents à sa gloire, et surtout, il le recommande à Frédéric II.

François-Marie Arouet, dit Voltaire (1694–1778)



### 5 Frédéric II de Prusse (1712–1786)

Dès son accession au trône en 1740, Frédéric II avait cherché à attirer à Berlin tout ce que l'Europe comptait de savants. Son admiration pour Voltaire et la culture française faisait de Maupertuis le candidat idéal pour la présidence de l'Académie de Berlin.

À partir de 1746, il y a dans cette académie, trois dirigeants : Maupertuis, Euler, et Frédéric II lui-même. Euler est l'autorité scientifique, et toutes les décisions doivent être approuvées par le roi. Le rôle de Maupertuis est surtout diplomatique : il ne devait pas être facile de faire accepter aux Prussiens la politique d'ouverture du roi, et sa francophilie extrême. Maupertuis avait pris son rôle au sérieux, et avait fait les efforts d'intégration nécessaires ; au point d'épouser une aristocrate prussienne, Eleonore von Borcke.

Quant aux sciences, Maupertuis avait ajouté au triomphe de l'expédition de Laponie, une découverte immortelle : le principe de moindre action.

Frédéric II de Prusse (1712–1786)

Antoine Pesne (1745)



## 6 Essai de cosmologie (1751)

« J'ai découvert un principe métaphysique sur lequel toutes les lois du mouvement et du repos sont fondées. J'ai fait voir la conformité de ce principe avec la puissance et la sagesse du créateur et de l'ordonnateur des choses. »

Rien de moins ! Rendez-vous compte, une démonstration mathématique de l'existence de Dieu. De quoi s'agit-il exactement ? Je re-cite Maupertuis.

« Dans toutes les distributions de mouvements qui se font dans la nature, la quantité d'action (qui est la somme des produits des masses par les espaces qu'elles parcourent, et par les vitesses avec lesquelles elles les parcourent) est toujours la plus petite qu'il fût possible. »

Et d'annoncer fièrement : « ce principe est absolument nouveau, ou du moins l'était avant que je l'eusse proposé pour en déduire toutes les lois de la dioptrique. »

Ah oui, et quelles lois je vous prie ? Eh bien en particulier celles de la réfraction.

## 7 Réfraction

L'angle que font les rayons lumineux en passant d'un milieu transparent à un autre a été observé de tous temps. Il est mentionné par tous les traités d'optique, en commençant par ceux d'Euclide et de Ptolémée.

Essai de cosmologie (1751)

Pierre Louis Moreau de Maupertuis (1698-1759)

**j'ai découvert un principe métaphysique sur lequel toutes les lois du mouvement & du repos sont fondées. J'ai fait voir la conformité de ce principe avec la puissance & la sagesse du créateur & de l'ordonnateur des choses.**

Réfraction



## 8 Opticae thesaurus Alhazeni arabis (1572)

Cette illustration de la réfraction est tirée de la première édition du magistral traité d'optique d'al-Haytham, écrit vers l'an mil, traduit en latin vers 1270, et imprimé en 1572.

On y trouve la loi de la réfraction, c'est-à-dire le fait que le rapport des sinus des deux angles restent constants. C'est ce qui s'appelle en France la loi de Descartes, et partout ailleurs en Occident, la loi de Snell. Tout ce qu'a fait Descartes, c'est de tenter une explication à ce rapport constant, déjà trouvé par ibn Sahl avant al-Haytham, et re-découvert par Snell.

L'explication de Descartes était fautive d'ailleurs, ce que ne manque pas de relever Fermat. En 1657 il écrit ceci :

Opticae thesaurus Alhazeni arabis (1572)

Al-Haytham (ca 965-1040)



## 9 Lettres à Cureau de la Chambre

« Il faut passer plus outre et trouver la raison de la réfraction dans notre principe commun, qui est que la nature agit toujours par les voies les plus courtes et les plus aisées. »

Cinq ans plus tard, la dispute avec les cartésiens s'est un peu assagie, mais Fermat veut négocier en position de force. Il fait donc le calcul et l'annonce à Cureau de la Chambre.

« Pour sortir de cet embarras et tâcher de trouver la véritable raison de la réfraction, je vous indiquai dans ma lettre que, si nous voulions employer dans cette recherche ce principe si commun et si établi, que *la nature agit toujours par les voies les plus courtes*, nous pourrions y trouver facilement notre compte. »

Et effectivement, Fermat met à contribution sa méthode de maximis et minimis, et parvient à démontrer la loi des sinus, en montrant qu'elle minimise le temps de parcours, si on suppose les vitesses différentes.

Un siècle plus tard, Maupertuis est parfaitement conscient de l'ancienneté du principe d'optimisation.

## 10 rebattre l'ancien axiome

Cependant, ceux qui ne sont pas assez instruits dans ces matières ont cru que je ne faisais ici que rebattre l'ancien axiome, qui porte que la nature agit toujours par les voies les plus simples. Mais cet axiome, qui n'en est un qu'autant que l'existence de Dieu est déjà prouvée, est si vague que personne n'a encore su dire en quoi il consiste.

## 11 Johann Samuel König (1712–1757)

Parmi ceux qui pensent que Maupertuis ne fait que rebattre l'ancien axiome, il y a König. Maupertuis et König se connaissent depuis longtemps. Ils ont été tous deux élèves de Jean Bernoulli. Maupertuis a recommandé König à Émilie du Châtelet pour des leçons sur la philosophie de Leibniz. C'est toujours lui qui a fait venir König à l'Académie de Berlin.

Quelques mois avant que Maupertuis ne fasse sa découverte immortelle du principe de moindre action, König écrivait une petite lettre de quelques pages au Journal Helvétique.

### Lettres à Cureau de la Chambre

Pierre de Fermat (ca 1606–1665)

Août 1657

Il faut passer plus outre et trouver la raison de la réfraction dans notre principe commun, qui est que la nature agit toujours par les voies les plus courtes et les plus aisées.

Janvier 1662

Pour sortir de cet embarras et tâcher de trouver la véritable raison de la réfraction, je vous indiquai dans ma lettre que, si nous voulions employer dans cette recherche ce principe si commun et si établi, que *la nature agit toujours par les voies les plus courtes*, nous pourrions y trouver facilement notre compte.

### rebattre l'ancien axiome

Maupertuis, Essai de cosmologie (1751)

Cependant, ceux qui ne sont pas assez instruits dans ces matières ont cru que je ne faisais ici que rebattre l'ancien axiome, qui porte que la nature agit toujours par les voies les plus simples. Mais cet axiome, qui n'en est un qu'autant que l'existence de Dieu est déjà prouvée, est si vague que [personne n'a encore su dire en quoi il consiste](#).

### Johann Samuel König (1712–1757)



## 12 Sur la construction des Alvéoles des Abeilles (1739)

Sur la construction des Alvéoles des Abeilles (1739)

Johann Samuel König (1712-1757)

Sur la construction des Alvéoles des Abeilles. Il y raconte qu'il était allé, en compagnie de Voltaire et d'Émilie du Châtelet, voir les expériences de ruches artificielles de Réaumur. Impressionné par la régularité de la construction, il s'était posé le problème de la forme du fond des alvéoles.



## 13 Sur la construction des Alvéoles des Abeilles (1739)

Sur la construction des Alvéoles des Abeilles (1739)

Johann Samuel König (1712-1757)

Pourquoi ces trois parallélogrammes et quel angle font-ils entre eux? La réponse de König est un calcul d'optimum. Voici ce qu'il en dit.



## 14 la voie la meilleure, la plus courte ou la plus avantageuse

On ne risque jamais de tomber dans l'erreur, lorsqu'on assure, que la nature a pris la voie, qu'on peut montrer être la meilleure, la plus courte ou la plus avantageuse. Mr. DE LEIBNITZ s'était déjà servi de ce principe, pour déterminer le chemin d'un rayon, qui passe d'un milieu dans un autre, de différente densité; [...]

Alors quand Maupertuis annonce dix ans plus tard qu'il a démontré l'existence de Dieu avec un principe connu de tous temps et utilisé aux mêmes fins par Leibniz, König rigole, et il se permet même de le faire ouvertement.

Parce que, selon lui, Leibniz ne s'était pas contenté d'invoquer, comme tous les autres, le fait que la nature agit toujours par les voies les plus simples, mais il était allé plus loin en donnant une définition mathématique de la quantité d'action, exactement celle de Maupertuis.

Maupertuis le prend très mal. Il en fait une affaire d'état et demande à l'Académie de Berlin de trancher : le principe de moindre action est-il oui ou non une découverte majeure, et lui-même Maupertuis en est-il l'auteur ?

la voie la meilleure, la plus courte ou la plus avantageuse

König, Sur la construction des Alvéoles des Abeilles (1740)

On ne risque jamais de tomber dans l'erreur, lorsqu'on assure, que la Nature a pris la voie, qu'on peut montrer être la meilleure, la plus courte ou la plus avantageuse. Mr. DE LEIBNITZ s'étoit déjà servi de ce principe, pour déterminer le chemin d'un Raion, qui passe d'un milieu dans un autre, de différente densité; [...]

## 15 Assemblée de l'Académie Royale de Berlin

L'Académie se réunit le 13 Avril 1752 pour trancher la question. C'est Euler qui officie et il n'a aucune peine à convaincre les autres académiciens de ce dont il est lui-même certain.

D'une part il a déjà fait des calculs d'optimisation à partir du principe d'économie naturelle. Il est donc parfaitement placé pour reconnaître que la formulation de Maupertuis est plus précise.

D'autre part, le fragment de lettre de Leibniz qui prouverait son antériorité sur le principe de moindre action ne peut pas être authentifié, et König est incapable de fournir l'original de la lettre. Pour Euler, il est donc probable que ce document est un faux.

Assemblée de l'Académie Royale de Berlin

Jeuudi 13 avril 1752

### PROTODOLLE de l'Assemblée de l'ACADÉMIE du Jeudi 13. Avril 1752.

#### P R É S E N S.

Mr. de Keitb. }  
Mr. de Redern. } CURATEURS.  
Mr. de Marschall. }  
Mr. de Cagnony. } HONORAIRES.  
Mr. Eller. }  
Mr. Heinius. } DIRECTEURS.  
Mr. Euler. }  
Mr. Formey, SECRÉT. PERPET.

## 16 Assemblée de l'Académie Royale de Berlin

Euler en appelle aux lois tacites de cette fameuse République des Lettres, celle dont tout un chacun est citoyen, dès qu'il écrit pour les Lumières, celle où seule la vérité dicte le droit.

Et là, Euler commet une grosse erreur tactique. Parce qu'en 1752, la République des Lettres a un roi : Voltaire. Il a acquis une telle célébrité qu'il peut faire et défaire les réputations littéraires ou scientifiques. Il peut se permettre de condamner sans juger, de juger sans comprendre, de comprendre sans avoir lu. Et il ne s'en prive pas. Il va mettre en œuvre toute sa capacité de nuisance aux dépens de Maupertuis, et aussi d'Euler, qui a pris sa défense en toute bonne foi.

Assemblée de l'Académie Royale de Berlin

Jeuudi 13 avril 1752

Ici il ne faut pas passer sous silence, que M. Kanig, afin de prouver que cette découverte de M. de Leibniz lui étoit connu depuis longtems, en appelle dans la même Lettre à sa Harangue inaugurale, où il dit qu'il a désigné cette découverte, en la montrant, pour ainsi dire, du doigt. Quoique cette assertion eût besoin d'être pareillement prouvée, & qu'il falût également quelque autorité pour la rendre digne de créance dans la République des Lettres; on ne trouve au fonds, dans l'endroit de la Harangue que M. Kanig allégué, autre chose, sinon que M. de Leibniz, las des censures de Juges

## 17 Diatribe du docteur Akakia (1753)

Voltaire est passé maître dans l'utilisation d'une arme meurtrière, le ridicule. Peu importe que la mauvaise foi qu'il reproche à ses adversaires, soit moins évidente que la sienne, tout ce qui compte c'est de faire rire à leurs dépens. Et comme les libraires sont sûrs de faire un tabac avec tout ce qui sort de sa plume, les sarcasmes de Voltaire sont largement diffusés.

Comme cette diatribe du docteur Akakia par exemple. Akakia veut dire « sans-malice ». Avec un « rapport des professeurs de Rome au sujet d'un prétendu président ». Maupertuis est principalement visé; mais Euler en prend lui aussi pour son grade.

Je vais vous donner un exemple, tiré d'un soi-disant traité de paix entre Maupertuis et König, daté du premier juin 1753, et bien sûr entièrement imaginé par Voltaire. Voici comment il commence.

Diatribe du docteur Akakia (1753)

Voltaire (1694-1778)

DIATRIBE  
DU  
Docteur AKAKIA,  
Médecin du Pape,  
D E C R E T  
DE  
L'INQUISITION;  
R A P P O R T  
DES  
PROFESSEURS DE ROME  
Au sujet d'un  
PRÉTENDU PRÉSIDENT.  
\*\*\*\*\*  
R O M E  
M D C C L I I I

## 18 Traité de paix (1753)

« Toute l'Europe ayant été en alarmes dans la dangereuse querelle sur une formule d'Algèbre, les deux parties principalement intéressées dans cette guerre, voulant prévenir une effusion d'encre insupportable à la longue à tous les lecteurs, sont enfin convenues d'une paix philosophique en la manière qui suit. »

... et en la manière qui suit, c'est Maupertuis qui fait les frais du traité, dans une suite d'articles qui reprennent tous ses travaux pour les ridiculiser. Quant à Euler :

## 19 Traité de paix (1753)

« Notre lieutenant-général Léonhard Euler déclare par notre bouche ce qui suit.

Primo, qu'il confesse ingénument n'avoir jamais appris la philosophie, et qu'il se repend sincèrement de s'être laissé persuader par nous qu'on pouvait la savoir sans l'avoir étudiée. Que désormais il se contentera de la gloire d'être de tous les mathématiciens de l'Europe, celui qui dans un temps donné peut jeter sur le papier le plus long calcul. »

Et ça continue comme ça pendant plusieurs pages. Évidemment, Voltaire qui reproche à Euler de ne rien savoir en philosophie, se garde bien d'avouer qu'il juge d'une question de mathématiques dont il ne comprend pas le premier mot.

Mais au fond pourquoi fait-il cela ? Pourquoi s'en prendre aussi violemment à Maupertuis et Euler ?

## 20 Die Tafelrunde (détail)

Essentiellement pour des raisons basement courtoises. Le séjour de Voltaire à Berlin ne se passe pas aussi bien qu'il l'avait espéré. Certes, il se montre brillant dans la conversation, comme il sait si bien le faire. Ce détail d'un tableau montre Frédéric II à droite, très intéressé par la conversation de Voltaire à gauche.

Mais Maupertuis, en tant que président de l'Académie, jouit d'une position nettement supérieure à la cour, et Voltaire est tout simplement jaloux.

Frédéric II, longtemps sous le charme du talent de Voltaire, a fini par s'agacer de son arrogance et de son avidité. Il se montre totalement solidaire de Maupertuis et d'Euler, au point d'écrire lui-même et de faire publier une longue lettre de soutien. La diatribe du docteur Akakia est la goutte d'eau qui fait déborder le vase. Frédéric II fait saisir les exemplaires déjà imprimés. Ils sont brûlés par la main du bourreau et Frédéric II fait symboliquement envoyer des cendres à Maupertuis. Voltaire quitte Berlin définitivement.

Traité de paix (1753)  
Voltaire (1694-1778)

TRAITÉ DE PAIX  
CONCLU ENTRE  
MR. LE PRÉSIDENT  
DE MAUPERTUIS,  
ET  
MR. LE PROFESSEUR  
K O E N I G.  
Le premier Juin 1753.

Traité de paix (1753)  
Voltaire (1694-1778)

notre Lieutenant-Général *Léonhard Euler* déclare par notre bouche ce qui suit.

I. Qu'il confesse ingénument de n'avoir jamais appris la Philosophie, & qu'il se repend sincèrement de s'être laissé persuader par nous qu'on pouvoit la savoir sans l'avoir étudiée. Que désormais il se contentera de la gloire d'être de tous les Mathématiciens de l'Europe, celui qui dans un tems donné peut jeter sur le papier le plus long calcul.

Die Tafelrunde (détail)  
Adolf von Menzel (1815-1905)



## 21 Lettre à Voltaire, 26 mai 1753

Alors qui a gagné? À la cour de Berlin, c'est Maupertuis, puisqu'il a conservé la confiance de Frédéric II, et que Voltaire l'a perdue. Mais dans la république des lettres, le pouvoir de Voltaire est plus que jamais redouté. Cette dame, Charlotte Sophie von Bentinck, est parmi les rares à oser lui dire la vérité. Elle lui écrit :

« Vous me dites que Maupertuis est couvert de ridicule et d'opprobre aux yeux de l'Europe littéraire, et vous-même ne le croyez pas. »

Scientifiquement, c'est König qui avait raison : Leibniz avait défini la quantité d'action avant Maupertuis, la lettre dont König avait une copie a bien été authentifiée. Mais ni Leibniz, ni d'ailleurs Maupertuis et Euler, n'avaient défini complètement le principe de moindre action. Il faudra attendre la Mécanique Analytique de Lagrange en 1788 pour une définition correcte.

Lettre à Voltaire, 26 mai 1753  
Charlotte Sophie von Bentinck (1715-1800)



## 22 Introductio Analysin Infinitorum (1748)

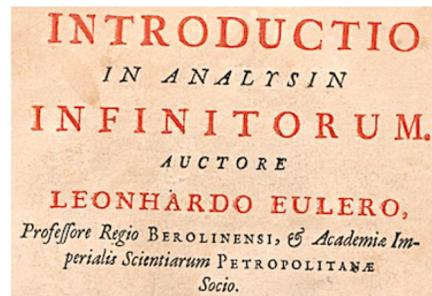
Bon mais vous m'écoutez gentiment depuis un bon moment, et vous êtes en droit de vous demander pourquoi je vous ai annoncé une histoire d'algèbre.

C'est qu'à l'époque où se déroulait la bataille autour de Maupertuis, Euler venait de publier ce livre : Introduction à l'Analyse des Infinis ; une date dans l'histoire des mathématiques. Oui, mais l'analyse des infinis, nous ne voyons pas le rapport avec l'algèbre. Bien sûr, mais c'est parce que nous comprenons les mots dans leur sens actuel.

Pour Euler, une fonction est essentiellement une expression algébrique, la généralisation d'un polynôme. C'est une certaine manière de combiner des variables et des constantes en une formule. Par exemple des radicaux, une fraction rationnelle, et surtout une série entière. Comme un polynôme infini si vous voulez. Et le « redoutable formuliste », qu'est Euler selon Voltaire, s'en donne à cœur joie.

Pour vous faire partager mon admiration pour la virtuosité d'Euler, j'ai choisi une de ses réussites les plus célèbres : le rapport entre les fonctions trigonométriques et l'exponentielle complexe. Vous allez voir, ce ne sont que des manipulations algébriques.

Introductio in Analysin Infinitorum (1748)  
Leonhard Euler (1797-1783)



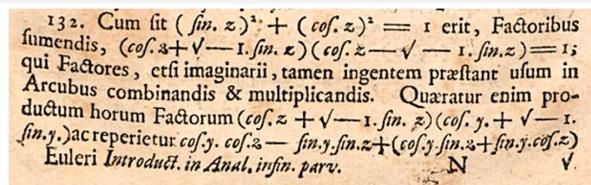
## 23 $(\sin .z)^2 + (\cos .z)^2 = 1$

Après avoir établi quelques formules trigonométriques de base, Euler reprend la plus simple d'entre elles : sinus carré  $z$  plus cosinus carré  $z$  égale 1. Il factorise pour obtenir cosinus  $z$  plus  $i$  sinus  $z$  fois cosinus  $z$  moins  $i$  sinus  $z$  égale un.

Tout aussi simplement, il arrive à cosinus  $z$  plus  $i$  sinus  $z$  facteur de cosinus  $y$  plus  $i$  sinus  $y$  égale cosinus  $y + z$  plus  $i$  sinus  $y + z$ .

$$(\sin .z)^2 + (\cos .z)^2 = 1$$

Euler, Introductio in Analysin Infinitorum (1748)



$$\begin{aligned} \cos^2 z + \sin^2 z &= 1 \\ (\cos z + i \sin z)(\cos z - i \sin z) &= 1 \end{aligned}$$

## 24 $\cos.nz$ et $\sin.nz$

À partir de là, une simple récurrence donne les expressions de cosinus  $nz$  et sinus  $nz$ , comme somme ou différence de deux binômes à la puissance  $n$ .

Et là, Euler nous sert un de ses tours de prestidigitation.

### COS. $nz$ et $\sin.nz$

Euler, Introductio in Analysis Infnitorum (1748)

$$\cos.nz = \frac{(\cos.z + \sqrt{-1}.\sin.z)^n + (\cos.z - \sqrt{-1}.\sin.z)^n}{2} \&c$$

$$\sin.nz = \frac{(\cos.z + \sqrt{-1}.\sin.z)^n - (\cos.z - \sqrt{-1}.\sin.z)^n}{2\sqrt{-1}}$$
 Evolutis ergo binomiis hñce erit per Series:
 
$$\cos.nz = (\cos.z)^n - \frac{n(n-1)}{1.2} (\cos.z)^{n-2} (\sin.z)^2 +$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} (\cos.z)^{n-4} (\sin.z)^4 -$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{1.2.3.4.5.6} (\cos.z)^{n-6}$$

$$(\sin.z)^6 + \&c., \&c$$

## 25 Sit Arcus $z$ infinite parvus

« Soit  $z$  un arc infiniment petit, alors sinus  $z$  égale  $z$  et cosinus  $z$  égale 1. Soit en même temps  $n$  un nombre infiniment grand, pour que l'arc  $nz$  soit d'une grandeur finie, par exemple égal à  $v$ . »

Et pouf, abracadabra, voici le développement en série de cosinus et sinus.

### Sit Arcus $z$ infinite parvus

Euler, Introductio in Analysis Infnitorum (1748)

134. Sit Arcus  $z$  infinite parvus, erit  $\sin.z = z$  &  $\cos.z = 1 - \frac{z^2}{2}$  C A P. VIII.  
 = 1: sit autem  $n$  numerus infinite magnus, ut sit Arcus  $nz = v$  V III.  
 finitæ magnitudinis, puta,  $nz = v$ ; ob  $\sin.z = z = \frac{v}{n}$  erit  

$$\cos.v = 1 - \frac{v^2}{1.2} + \frac{v^4}{1.2.3.4} - \frac{v^6}{1.2.3.4.5.6} + \&c., \&c$$

$$\sin.v = \frac{v}{1.2.3} - \frac{v^3}{1.2.3.4.5} + \frac{v^5}{1.2.3.4.5.6.7} - \&c. Da-$$

## 26 $(1 + \frac{z}{i})^i = e^z$

Là, vous vous attendriez à ce qu'il combine les deux développements en série qu'il vient d'obtenir, pour retrouver celui de exponentielle de  $iz$ . Mais non, Euler peut faire mieux. Il reprend les mêmes expressions de cosinus  $nz$  et sinus  $nz$ , sans leur appliquer la formule du binôme, et il y injecte à nouveau un  $n$  infiniment grand, et un  $z$  infiniment petit, de sorte que  $nz$  égale  $v$ . Et comme tout le monde le sait, si  $n$  est infini, un plus  $z$  sur  $n$  à la puissance  $n$ , cela vaut  $e$  puissance  $z$ . Et re-abracadabra, cosinus  $v$  est égal à  $e$  puissance  $v$  racine de moins un plus  $e$  puissance moins  $v$  racine de moins un, le tout sur deux. Pareil pour le sinus.

### $(1 + \frac{z}{i})^i = e^z$

Euler, Introductio in Analysis Infnitorum (1748)

$$\frac{(1 + \frac{v\sqrt{-1}}{i})^i + (1 - \frac{v\sqrt{-1}}{i})^i}{2}$$
; atque  $\sin.v =$   

$$\frac{(1 + \frac{v\sqrt{-1}}{i})^i - (1 - \frac{v\sqrt{-1}}{i})^i}{2\sqrt{-1}}$$
. In Capite autem  
 præcedente vidimus esse  $(1 + \frac{z}{i})^i = e^z$ , denotante  $e$  basin  
 Logarithmorum hyperbolicorum: scripto ergo pro  $z$  partim  
 $+v\sqrt{-1}$  partim  $-v\sqrt{-1}$  erit  $\cos.v =$   

$$\frac{e^{+v\sqrt{-1}} + e^{-v\sqrt{-1}}}{2}$$
 &  $\sin.v = \frac{e^{+v\sqrt{-1}} - e^{-v\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$

## 27 $e^{i\pi} + 1 = 0$

Il y a eu aux États-Unis un panel de mathématiciens pour voter sur la plus belle formule mathématique. L'identité d'Euler est arrivée en tête. Je ne trouve aucun sens à la déclarer la plus belle du monde, mais c'est vrai qu'elle est splendide : combiner  $e$ ,  $i$  et  $\pi$  pour trouver un résultat aussi simple que moins 1, aurait eu de quoi surprendre même Voltaire, s'il avait jugé à propos de s'intéresser à ce qu'il critiquait.

Pour moi, la beauté dans les formules d'Euler, ne réside pas dans le résultat final, mais dans l'élégance des tours de passe-passe qu'il multiplie pour y arriver. Reconnaissons-le, l'admiration se teinte d'un brin de nostalgie. Plus personne n'oserait de nos jours manipuler algébriquement des quantités infinies, avec aussi peu de précautions. Mais reprocher à Euler son manque de rigueur serait un complet anachronisme. La rigueur dans l'analyse, la notion de limite, les epsilon et les étas, tout cela n'apparaîtra qu'au siècle suivant.

## 28 références

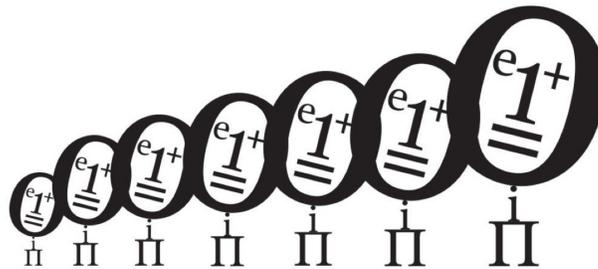
Allez, pour terminer, re-voici Voltaire dans ses œuvres. C'est Maupertuis qui est supposé s'adresser à Euler :

« Vous devant qui tous les algébristes fléchissent le genou ; vous mon cher, qui avez l'art de rendre sublimes les choses les plus communes, par l'embarras de vos calculs effrayants ; vous enfin qui, par les chemins les plus épineux et les plus escarpés, savez arriver aux solutions des problèmes les plus simples. »

En fait, c'est exactement le contraire : Euler avait l'art de trouver les chemins les plus simples pour arriver aux solutions des problèmes les plus épineux. Mais ça, Voltaire était bien incapable de l'apprécier.

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

La plus belle formule du monde



### références

- J. Dhombres (1987) À l'occasion du bicentenaire de la mort d'Euler (1707-1783), *Revue d'histoire des sciences*, 40(3-4), 383-386
- W. Dunham (ed.) (2007) *The genius of Euler : reflexions on his life and work*, Washington : MAA
- M. Panza (1995) De la nature épargnante aux forces généreuses : le principe de moindre action entre mathématiques et métaphysique. Maupertuis et Euler, 1740-1751, *Revue d'histoire des sciences*, 48(4), 435-520
- M. Panza (2007) Euler's introductio in analysin infinitorum and the program of algebraic analysis : quantities, functions and numerical partitions, in R. Backer (ed.) *Euler reconsidered. Tercentenary essays*, 119-166, Heber City, UR : The Kendrick Press
- J. J. Samuël, A. Moatti (2012) Euler en défense de Maupertuis à propos du principe de moindre action, *Bibnum Physique Mathématique*, 797, 1-13