0 Voyage autour du monde

Ah, le théorème fondamental de l'algèbre ! Une grande affaire du siècle des Lumières. Sacré morceau d'histoire tout de même ! Avec un ou deux personnages peu ordinaires, vous allez voir.

histoires d'algèbre

Voyage autour du monde

le théorème fondamental de l'algèbre

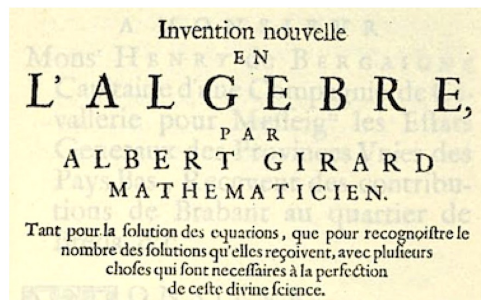
hist-math.fr Bernard Ycart

1 Invention nouvelle en l'algèbre (1629)

Les rares parmi vous qui écoutent ces histoires dans l'ordre chronologique, se souviennent que le premier énoncé se trouve dans ce livre : l'Invention nouvelle en l'algèbre, tant pour la solution des équations, que pour reconnaître le nombre des solutions qu'elles reçoivent, avec plusieurs choses qui sont nécessaires à la perfection de cette divine science. Par Albert Girard, Samielois, c'est-à-dire natif de Saint-Mihiel en Lorraine.

Invention nouvelle en l'algèbre (1629)

Albert Girard (1595–1632)



Invention nouvelle EN L'ALGEBRE, PAR ALBERT GIRARD MATHEMATICIEN.

Tant pour la solution des equations, que pour recognoistre le nombre des solutions qu'elles reçoivent, avec plusieurs choses qui sont necessaires à la perfection de ceste divine science.

2 Théorème fondamental de l'algèbre

« Toutes les équations d'algèbre reçoivent autant de solutions que la dénomination de la plus haute quantité le démontre, excepté les incomplètes.

[...] Ainsi on peut donner trois noms aux solutions, vu qu'il y en a qui sont plus que rien ; d'autres moins que rien ; et d'autres enveloppées, comme celles qui ont des $\sqrt{\ }-$, comme des $\sqrt{\ }-3$ ou autres nombres semblables. »

En clair, si on compte les racines avec leur multiplicité, une équation polynomiale de degré n a n racines, qu'elles soient réelles positives, négatives, ou même complexes.

Huit ans plus tard, c'est au tour de Descartes.

Théorème fondamental de l'algèbre

Girard, Invention nouvelle en l'algèbre (1629)

Toutes les équations d'algèbre reçoivent autant de solutions que la denomination de la plus haute quantité le demonstre, excepté les incomplettes.

[...] Ainsi qu'on peut donner trois noms aux solutions, veu qu'il y en a qui sont plus que rien ; d'autres moins que rien ; & d'autres enveloppées, comme celles qui ont des $\sqrt{\ }-$, comme des $\sqrt{\ }-3$ ou autres nombres semblables.

3 Autant il peut y avoir de diverses racines

« Sachez donc qu'en chaque équation, autant que la quantité inconnue a de dimensions, autant il peut y avoir de diverses racines, c'est-à-dire de valeurs de cette quantité.

[...] Au reste, tant les vraies racines que les fausses ne sont pas toujours réelles ; mais quelquefois seulement imaginaires ; c'est-à-dire qu'on peut bien toujours en imaginer autant que j'ai dit en chaque équation ; mais qu'il n'y a quelquefois aucune quantité, qui corresponde à celles qu'on imagine. »

L'adjectif « imaginaire » est resté. Mais pendant longtemps, la notion qu'il désignait était aussi obscure que pour Descartes. Il faut attendre la fin du dix-septième siècle, et l'invention du calcul intégral, pour que les choses bougent. Vers 1700, la grande affaire de Leibniz et des frères Bernoulli est de recenser toutes les primitives qu'ils peuvent calculer. Et justement, un des deux frères Bernoulli, Jean, a une idée.

Autant il peut y avoir de diverses racines
Descartes, Géométrie (1637)

Scachez donc qu'en chaque Equation, autant que la quantité inconnuë a de dimensions, autant peut il y avoir de diuerses racines, c'est à dire de valeurs de cette quantité.

[...] Au reste, tant les vraies racines que les fausses ne sont pas toujours réelles ; mais quelquefois seulement imaginaires ; c'est-à-dire qu'on peut bien toujours en imaginer autant que j'ai dit en chaque équation ; mais qu'il n'y a quelquefois aucune quantité, qui corresponde à celles qu'on imagine.

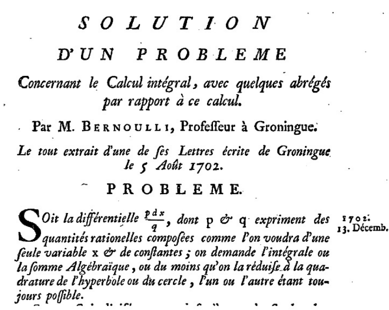
4 Solution d'un problème de calcul intégral (1702)

L'article est intitulé « Solution d'un problème concernant le calcul intégral ».

Ce problème est le suivant. « Soit la différentielle $p\,dx$ sur q, dont p et q expriment des quantités rationnelles composées comme on voudra d'une seule variable x et de constantes ». En clair pour nous : deux polynômes.

L'idée de Bernoulli est ce que nous appelons la décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples. Il sait que la primitive de un sur $x - a$ est ce qu'il appelle une intégrale logarithmique. Si a est réel, tout va bien. Si a est complexe, Bernoulli ne s'embarrasse pas pour si peu et traite l'intégrale de la même manière. Il termine par une pirouette :

Solution d'un problème de calcul intégral (1702)
Jean Bernoulli (1667–1748)



SOLUTION

D'UN PROBLEME

Concernant le Calcul intégral, avec quelques abrégés par rapport à ce calcul.

Par M. BERNOULLI, Professeur à Groningue.

Le tout extrait d'une de ses Lettres écrite de Groningue le 5 Août 1702.

PROBLEME.

Soit la différentielle $\frac{p\,dx}{q}$, dont p & q expriment des quantités rationnelles composées comme l'on voudra d'une seule variable x & de constantes ; on demande l'intégrale ou la somme Algébraïque, ou du moins qu'on la réduise à la quadrature de l'hyperbole ou du cercle, l'un ou l'autre étant toujours possible. 1702. 13. Décemb.

5 Solution d'un problème de calcul intégral (1702)

« On voit que les logarithmes imaginaires se doivent prendre pour des secteurs circulaires réels : parce que la compensation qui se fait de ces grandeurs imaginaires ajoutées ensemble, les détruit de manière que la somme en devient toute réelle. »

Quand Bernoulli écrit cela, la notion de logarithme imaginaire est loin d'être clarifiée. Euler s'en chargera 30 ans plus tard. Pourtant l'intuition n'est pas mauvaise : les racines imaginaires d'un polynôme vont par paires de conjugués, et leur somme comme leur produit sont réels. Mais comment des logarithmes complexes ajoutés ensemble se détruisent-ils « de manière que la somme en devient toute réelle » ? En 1702, c'est encore très nébuleux. Écoutons Leibniz, la même année. Il traite à peu près du même sujet que Jean Bernoulli, les primitives de fractions rationnelles.

Solution d'un problème de calcul intégral (1702)
Jean Bernoulli (1667–1748)

On voit que les Logarithmes imaginaires se doivent prendre pour des secteurs circulaires réels : parce que la compensation qui se fait de ces grandeurs imaginaires ajoutées ensemble, les détruit de maniére que la somme en devient toute réelle.

6 Specimen novum analyseos (1702)

Specimen novum analyseos (1702)
Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716)

« Ainsi on trouve l'élégante et admirable issue dans ce miracle de l'analyse, monstre du monde des idées, presque amphibie entre l'être et le non-être, que nous appelons racine imaginaire. »

Ainsi on trouve l'élégante et admirable issue dans ce miracle de l'analyse, monstre du monde des idées, presque amphibie entre l'être et le non-être, que nous appelons racine imaginaire.

Leibniz est tellement peu familier avec ce monstre du monde des idées, qu'il commet une énorme bourde, vers la fin du même article.

7 Specimen novum analyseos (1702)

Il observe que x^2+a^2 racine de moins un, multiplié par x^2-a^2 racine de moins un, ça fait x^4+a^4. Certes, dit-il, x^2+a^2 racine de moins un est le produit de $x+a$ racine de racine de moins un, par $x-a$ racine de racine de moins un. Pareil pour l'autre facteur.

Pourtant conclut-il, jamais on ne pourra combiner deux quelconques de ces quatre facteurs pour donner une quantité réelle. De sorte que x^4+a^4 ne sera jamais le produit de deux trinômes du second degré, et donc la primitive de un sur x^4+a^4 ne se calcule pas par la méthode de décomposition en éléments simples.

Specimen novum analyseos (1702)
Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716)

pias arctius contracturum quam par sit. Esto $1:(xx+aa\sqrt{-1})$ ducendum in $1:(xx-aa\sqrt{-1})$ prodibit $1:(x^4+a^4)$ cujus denominator utique est formula realis, sed resolvendo hanc formulam non pervenitur ad divisores planos reales. Nam $xx-aa\sqrt{-1}$ resolvi potest in $x+a\sqrt{-1}$ & $x-a\sqrt{-1}$, & $xx+aa\sqrt{-1}$ in $x+a\sqrt{(-\sqrt{-1})}$ & $x-a\sqrt{(-\sqrt{-1})}$. Itaque formula x^4+a^4 prodit ducendo invicem $x+a\sqrt{-1}$, $x-a\sqrt{-1}$, $x+a\sqrt{(-\sqrt{-1})}$, $x-a\sqrt{(-1\sqrt{-1})}$ sed quamcunque instituamus duarum ex his radicibus quatuor combinationem, nunquam consequemur ut duæ invicem ductæ dent quantitatem realem, seu divisorem realem pla-

8 Specimen novum analyseos (1702)

Allons bon ! Certes, x^4+a^4 est bien le produit de $x^2+a^2\mathrm{i}$ par $x^2-a^2\mathrm{i}$. Mais il suffit d'une manipulation élémentaire pour voir que c'est aussi le produit de deux trinômes réels, $x^2+\sqrt{2}ax+a^2$ et $x^2-\sqrt{2}ax+a^2$.

Tout le monde peut se tromper, même Leibniz. Mais tout de même : comment expliquer qu'un des plus grands génies de tous les temps ait pu passer à côté d'un calcul aussi élémentaire ? Leibniz bouillonnait d'idées en permanence, pressé par ses correspondants et par les multiples inventions qu'il menait de front. C'est vrai. Mais il faut aussi conclure que la notion de nombre complexe n'était certainement pas aussi claire de son temps qu'elle l'est de nos jours.

Specimen novum analyseos (1702)
Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716)

$$
\begin{aligned}
x^4+a^4 &= (x^2+a^2\mathrm{i})(x^2-a^2\mathrm{i}) \\
&= (x^2+a^2)^2-2a^2x^2 \\
&= (x^2+\sqrt{2}ax+a^2)(x^2-\sqrt{2}ax+a^2)\,.
\end{aligned}
$$

9 Lettre à Leonhard Euler (24 octobre 1742)

Lettre à Leonhard Euler (24 octobre 1742)
Nicolas Bernoulli (1687–1759)

Voici la même bourde dans une lettre que Nicolas Bernoulli, le neveu de Jean et Jacques, adresse à Euler le 24 octobre 1742. Le polynôme est légèrement plus compliqué, mais il admet toujours 4 racines imaginaires que Bernoulli détaille : un plus ou moins racine carrée, de deux plus ou moins racine carrée de moins trois. Et Bernoulli affirme qu'il n'admet aucun facteur réel.

multiplicatae productum reale praebeant. Ex. gr. hujus quantitatis $x^4-4x^3+2xx+4x+4$ nulli dantur factores reales duarum dimensionum, nec aequationis

$$x^4-4x^3+2xx+4x+4=0$$

quatuor radices $x=1+\sqrt{(2+\sqrt{-3})}$, $x=1-\sqrt{(2+\sqrt{-3})}$, $x=1+\sqrt{(2-\sqrt{-3})}$, $x=1-\sqrt{(2-\sqrt{-3})}$ ita sunt comparatae, ut binae earum in se multiplicatae productum reale constituant.

10 Lettre à Leonhard Euler (6 avril 1743)

Mais Nicolas Bernoulli est homme à reconnaître ses erreurs, et le 6 avril suivant, il adresse une autre lettre à Euler, où il dit : « je me suis trompé, quand dans ma lettre précédente j'ai affirmé que certaines quantités algébriques ne pouvaient pas se factoriser en trinômes réels ».

Et il explique pourquoi il s'est trompé : c'est parce qu'il a suivi une méthode de décomposition, celle de Descartes, sans penser qu'une autre décomposition pourrait donner des résultats différents.

Pourquoi donc est-ce que tout le monde s'acharne à faire de Nicolas Bernoulli le vilain petit canard de la famille ? Regardez ce que dit Euler sept ans après ces lettres.

Lettre à Leonhard Euler (6 avril 1743)
Nicolas Bernoulli (1687–1759)

expedite conficitur. At erravi, quando in posterioribus meis litteris negavi, omnem quantitatem algebraicam, et in specie hanc $x^4-4x^3+2xx+4x+4$ in factores trinomiales reales resolvi posse. Erroris ansa haec fuit: Sciebam Cartesium docuisse modum resolvendi aequationem biquadraticam

$$x^4+px^3+qxx+rx+s=0$$

in duas quadraticas $xx+yx+t=0$ et $xx-yx+u=0$

11 Sur les racines imaginaires des équations (1749)

« Un très savant géomètre me proposa autrefois cette équation, par laquelle il voulait prouver que la résolution en deux facteurs réels n'était pas toujours possible. Et en effet, il paraît d'abord fort difficile de combiner ces quatre facteurs simples imaginaires deux à deux, tellement que leurs produits deviennent réels. »

D'abord ce n'est pas l'équation que lui avait envoyée le très savant géomètre, ensuite Euler oublie de dire que Bernoulli avait reconnu son erreur.

Sur les racines imaginaires des équations (1749)
Leonhard Euler (1707–1783)

des cas, qui ne paroissent pas admettre une telle résolution. Un très savant Géometre me proposa autrefois cette équation:

$$x^4+2x^3+4x^2+2x+1=0$$

par laquelle il vouloit prouver, que la résolution en deux facteurs réels n'étoit pas toujours possible. Et en effet il paroit d'abord fort difficile de combiner ces quatre facteurs simples imaginaires tellement deux à deux ensemble, que leurs produits deviennent réels.

12 Sur les racines imaginaires des équations (1749)

Évidemment, pour aussi compliquée qu'elle soit, Euler trouve la solution. Dans cet article se trouve d'ailleurs une démonstration correcte pour le degré quatre : tout polynôme à coefficients réels de degré 4 qui n'a pas de racine réelle, s'écrit comme produit de deux trinômes réels du second degré.

Ce résultat restera le seul effectivement démontré avant la fin du siècle. Pour autant, les affirmations et les tentatives ont été nombreuses. Euler lui-même était beaucoup plus ambitieux.

Sur les racines imaginaires des équations (1749)
Leonhard Euler (1707–1783)

Voilà donc l'équation proposée :

$$x^4+2x^3+4x^2+2x+1=0$$

réduite à ces deux facteurs réels du second degré

$$xx+(1+u)x+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}(u+v)+\tfrac{1}{4}(vv+uu)=0$$
$$xx+(1-u)x+\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}(u+v)+\tfrac{1}{4}(vv+uu)=0$$

où est $v=\sqrt{(\sqrt{5}+2)}$; $u=\sqrt{(\sqrt{5}-2)}$ & $vv+uu=2\sqrt{5}$.

13 Sur les racines imaginaires des équations (1749)

« Toute équation (sous-entendu polynomiale), ne pouvant être résolue en des facteurs simples réels, a toujours des facteurs réels du second degré. »

C'est bien le théorème fondamental de l'algèbre, et en plus sous la forme qui est utile pour l'intégration.

« Cependant personne, à ce que je sache, n'a encore démontré assez rigoureusement la vérité de ce sentiment : je tâcherai donc d'en donner une démonstration, qui ne soit assujettie à aucune exception. »

Sur les racines imaginaires des équations (1749)
Leonhard Euler (1707–1783)

de la forme $xx+px+q$: ils seront donc du second degré. On dit donc que toute équation, ne pouvant etre résoluë en des facteurs simples réels, a toujours des facteurs réels du second degré. Cependant personne, à ce que je sache, n'a encore demontré assés rigoureusement la verité de ce sentiment: je tacherai donc d'en donner une démonstration, qui ne soit assujettie à aucune exception.

14 Leonhard Euler (1707–1783)

Hmm hmm, aucune exception hein ? Le résultat, certainement, mais la démonstration c'est moins sûr. Comme d'habitude chez Euler, l'idée est aussi simple que brillante. Si tout polynôme réel de degré 2 puissance n s'écrit comme produit de deux polynômes de degré 2 puissance $n-1$, alors le tour est joué, par récurrence. Voilà pourquoi il commence par les polynômes de degré 4. Là où ça se gâte, c'est que les arguments qui fonctionnent bien pour le degré 4, ne sont plus du tout évidents pour les degrés supérieurs.

Quant à l'affirmation « personne que je sache n'a encore démontré assez rigoureusement la vérité de ce sentiment », il y a quelqu'un à qui elle n'a pas du tout fait plaisir.

Leonhard Euler (1707–1783)

15 Jean le Rond dit d'Alembert (1717–1783)

Ce quelqu'un, c'est d'Alembert. Parce que lui, il est bien persuadé de l'avoir démontrée assez rigoureusement, la vérité de ce sentiment.

Ce qui a dû mettre d'Alembert d'autant plus en rage, c'est de repenser à la lettre qu'Euler lui avait envoyée, le 26 décembre 1746, après avoir lu son mémoire.

Jean le Rond dit d'Alembert (1717–1783)

16 Lettre d'Euler à d'Alembert (26 décembre 1746)

« J'ai lu avec autant de fruit que de satisfaction votre dernière pièce dont vous avez honoré notre Academie. La manière, dont vous prouvez, que toute expression x^n+Ax^{n-1}+etc.$=0$, qui n'a point de racines réelles, en doit avoir une de cette forme $p \pm q\sqrt{-1}$: et que par conséquent elle doit avoir un facteur de cette forme $xx+\alpha x+\beta$ me satisfait pleinement ; mais comme elle procède par la resolution de la valeur de x dans une série infinie, je ne sais si tout le monde en sera convaincu. J'ai lu dernièrement dans une assemblée de notre Académie une pièce sur ce même sujet, où j'ai demontré d'une manière qui doit être à la portée de tout le monde, que toute expression $x^n+Ax^{n-1}+Bx^{n-2}$ etc. si n est une puissance du binaire, est résoluble en facteurs réels de cette forme $xx+\alpha x+\beta$. »

Lettre d'Euler à d'Alembert (26 décembre 1746)

J'ai lu avec autant de fruit que de satisfaction Votre dernière piece dont Vous aves honoré notre Academie. La maniere, dont Vous prouves, que toute expression x^n+Ax^{n-1}+etc.$=0$, qui n'a point de racines reelles, en doit avoir une de cette forme $p \pm q\sqrt{-1}$: et que par conséquent elle doit avoir un facteur de cette forme $xx+\alpha x+\beta$ me satisfait pleinement ; mais comme elle procede par la resolution de la valeur de x dans une serie infinie, je ne sai, si tout le monde en sera convaincu. J'ai lu dernierement dans une assemblée de Notre Academie une piece sur ce meme sujet, où j'ai demontré d'une maniére qui doit être à la portée de tout le monde, que toute expression $x^n+Ax^{n-1}+Bx^{n-2}$ etc. si n est une puissance du binaire, est resoluble en facteurs réels de cette forme $xx+\alpha x+\beta$.

17 Recherches sur le calcul intégral (1746)

L'article de d'Alembert, envoyé à l'Académie de Berlin fin 1746, s'appelle « recherches sur le calcul intégral », et d'Alembert commence par citer l'article de Jean Bernoulli de 1702. L'objectif est le même, l'intégration des fractions rationnelles, mais cette fois-ci, d'Alembert prétend démontrer le résultat principal. Voici comment il l'énonce :

« Soit un multinôme quelconque, tel qu'il n'y ait aucune quantité réelle qui étant substituée à la place de x, y fasse évanouir tous les termes. Je dis qu'il y aura toujours une quantité $p + q\sqrt{-1}$ à substituer à la place de x, et qui rendra ce multinôme égal à zéro. »

Aussitôt après, d'Alembert démontre que si un complexe est racine d'un polynôme réel, son conjugué l'est aussi. Il conclut donc comme Euler, que tout polynôme réel peut toujours se décomposer en facteurs réels de degré deux.

La démonstration de d'Alembert est complètement différente de celle d'Euler. Il construit une solution par approximations, comme somme d'une série. Malheureusement, la convergence de cette série n'est pas du tout évidente, et comme l'a prédit Euler, tout le monde n'en est pas convaincu.

Pour autant, d'Alembert ne lâche pas l'affaire. Il fait rédiger à nouveau sa démonstration par un jeune homme prometteur, dans un magistral traité de calcul intégral.

Recherches sur le calcul intégral (1746)
Jean le Rond d'Alembert (1717–1783)

VI. *Propos. II. Soit un multinome quelconque* $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} \dots + fx + g$, *tel qu'il n'y ait aucune quantité réelle qui etant substituée à la place de* x, *y fasse évanouir tous les termes, je dis qu'il y aura toujours une quantité* $p + q\sqrt{-1}$ *à substituer à la place de* x, *& qui rendra ce multinome egal à zero.*

18 Traité du calcul intégral (1754)

Il s'agit de Louis-Antoine de Bougainville. Écrit en 1752 à l'âge de 23 ans, le premier volume du traité de calcul intégral est publié en 1754. Un second volume est paru en 1756.

Le chapitre cinq du premier volume porte entièrement sur le théorème fondamental de l'algèbre, vu par d'Alembert. Le chapitre se termine par l'avertissement suivant.

Traité du calcul intégral (1754)
Louis-Antoine de Bougainville (1729–1811)

TRAITÉ
DU
CALCUL INTÉGRAL,
POUR SERVIR DE SUITE
A L'ANALYSE DES INFINIMENT-PETITS
DE M. LE MARQUIS DE L'HÔPITAL;
Par M. DE BOUGAINVILLE, le jeune.

19 Traité du calcul intégral (1754)

« La théorie précédente sur les imaginaires est tirée d'un mémoire de M. d'Alembert qui se trouve dans le second volume des mémoires de l'Académie de Berlin, année 1746. J'ai étendu ses démonstrations, et je leur ai donné la forme que j'ai cru la plus propre pour les mettre à la portée de tout le monde. »

Je confirme : la rédaction de Bougainville est beaucoup plus facile à lire que celle de d'Alembert.

« M. Euler dans les mémoires de l'académie de Berlin 1749 a traité la même matière des racines imaginaires des équations par une méthode différente, mais plus longue. Il y a joint une méthode pour changer les quantités imaginaires en $A + B$ racine de moins un qui est la même que celle de M. d'Alembert. »

Traité du calcul intégral (1754)
Louis-Antoine de Bougainville (1729–1811)

D'où est tirée la théorie précédente.

AVERTISSEMENT. La théorie précédente sur les imaginaires est tirée d'un Mémoire de M. d'Alembert qui se trouve dans le second volume des Mémoires de l'Académie de Berlin, année 1746. J'ai étendu ses démonstrations, & je leur ai donné la forme que j'ai cru la plus propre pour les mettre à la portée de tout le monde. M. Euler dans les Mémoires de l'Académie de Berlin 1749. a traité la même matiere des racines imaginaires des équations par une méthode différente, mais plus longue. Il y a joint une méthode pour changer les quantités imaginaires en $A + B\sqrt{-1}$ qui est la même que celle de M. d'Alembert.

20 Louis-Antoine de Bougainville (1729–1811)

Le carrière de Louis-Antoine de Bougainville a commencé par un coup de chance, qui lui a fait rencontrer Clairaut, lequel Clairaut à son tour lui a présenté d'Alembert. Pour débuter en mathématiques, il y a pire.

Louis-Antoine de Bougainville (1729–1811)

21 Capitulation de Montréal (8 septembre 1760)

Entre les parutions de ses deux volumes de calcul intégral, Bougainville avait été secrétaire d'ambassade à Londres. Sur recommandation de Clairaut, d'Alembert et de Gua, il avait même été élu membre de la Royal Society. Puis en 1756 il part pour le Canada où la guerre de sept ans oppose les Français aux Anglais. Comme Bougainville est bilingue, c'est lui qui négocie la capitulation des troupes françaises en 1760 à Montréal.

Capitulation de Montréal (8 septembre 1760)
Louis-Antoine de Bougainville (1729–1811)

22 La Boudeuse et l'Étoile à Tahiti (mai 1768)

Bougainville combat encore en Europe jusqu'à la fin de la guerre de sept ans, puis après un voyage aux îles Malouines, il part pour la première expédition française autour du monde.

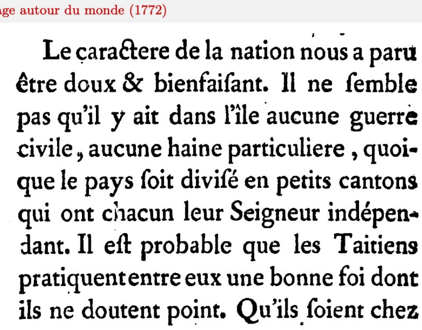
L'arrivée à Tahiti est un enchantement. Il y a la douceur du climat, l'abondance des ressources bien sûr. Il y a surtout la gentillesse des autochtones, qui alimentera le mythe rousseauiste du « bon sauvage ».

La Boudeuse et l'Étoile à Tahiti (mai 1768)
Louis-Antoine de Bougainville (1729–1811)

23 Doux et bienfaisant

« Le caractère de la nation nous a paru être doux et bienfaisant. Il ne semble pas qu'il y ait dans l'île aucune guerre civile, aucune haine particulière, quoique le pays soit divisé en petits cantons qui ont chacun leur seigneur indépendant. Il est probable que les Tahitiens pratiquent entre eux une bonne foi dont ils ne doutent point. »

Doux et bienfaisant
Bougainville, Voyage autour du monde (1772)



Le caractere de la nation nous a paru être doux & bienfaisant. Il ne semble pas qu'il y ait dans l'île aucune guerre civile, aucune haine particuliere, quoique le pays soit divisé en petits cantons qui ont chacun leur Seigneur indépendant. Il est probable que les Taitiens pratiquent entre eux une bonne foi dont ils ne doutent point. Qu'ils soient chez

24 La Nouvelle Cythère (mai 1768)

Pour des marins frustrés par des mois de navigation, la liberté des mœurs est l'objet de bien des fantasmes. Bougainville raconte :

« La jalousie est ici un sentiment si étranger, que le mari est ordinairement le premier à presser sa femme de se livrer. Une fille n'éprouve à cet égard aucune gêne ; tout l'invite à suivre le penchant de son cœur ou la loi de ses sens, et les applaudissements publics honorent sa défaite. Il ne semble pas que le grand nombre d'amants passagers qu'elle peut avoir eu, l'empêche de trouver ensuite un mari. »

On ne s'étonne donc pas que Bougainville ait rebaptisé Tahiti « La nouvelle Cythère », symbole des plaisirs amoureux.

Par contre on peut s'étonner de son manque de clairvoyance sur un fait qu'il qualifie d'assez singulier.

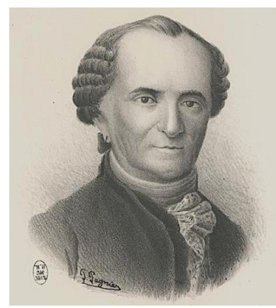
La Nouvelle Cythère (mai 1768)
Louis-Antoine de Bougainville (1729–1811)

25 Philibert Commerson (1727–1773)

Ce Philibert Commerson avait embarqué en tant que naturaliste, pour recueillir le plus possible d'espèces de plantes nouvelles et en constituer des herbiers. Il était accompagné d'un domestique, qui se faisait appeler Jean Baré, botaniste déjà exercé selon Bougainville, qui suivait son maître dans toutes ses herborisations, portant même dans ces marches pénibles les provisions de bouche, les armes, et les cahiers de plantes.

Oui mais voilà, sa structure, le son de sa voix, son menton sans barbe, son attention scrupuleuse à ne jamais changer de linge, ni faire ses nécessités devant qui que ce soit, et plusieurs autres indices avaient fait naître le soupçon : le domestique courageux et infatigable était une femme.

Philibert Commerson (1727–1773)



26 Jeanne Barret (1740–1807)

Une femme à bord d'un navire du Roi, c'était rigoureusement interdit. Comme l'affaire était grave, malgré les soupçons chacun préférait se taire ; et Bougainville a fermé les yeux. Jusqu'à ce qu'un jour à Tahiti (c'est toujours lui qui raconte) :

« Commerson descendit pour herboriser ; à peine Barret qui le suivait avec les cahiers sous son bras, eut mis pied à terre, que les Tahitiens l'entourent, crient que c'est une femme et veulent lui faire les honneurs de l'île. Le Chevalier de Bournand, qui était de garde à terre, fut obligé de venir à son secours, et de l'escorter jusqu'au bateau. »

Jeanne Barret (1740–1807)

27 Elle avoit trompé son maître

« Quand je fus à bord de l'Étoile, Barret, les yeux baignés de larmes, m'avoua qu'elle était fille : elle me dit qu'à Rochefort elle avait trompé son maître en se présentant à lui sous des habits d'homme au moment même de son embarquement. »

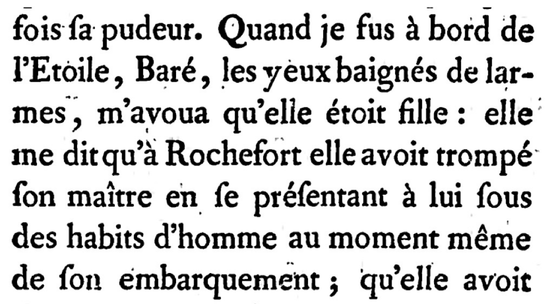
Oh le pauvre Commerson dupé par une aventurière ! Ben voyons ! Et il nous explique comment il se fait qu'elle était déjà sa domestique longtemps avant l'embarquement ? Il nous dit pourquoi avant d'embarquer il avait fait un testament en sa faveur ?

Bougainville, magnanime, s'est contenté de débarquer Commerson et sa maîtresse à l'île Maurice, pour éviter le scandale du retour en France.

En 1773, Commerson meurt à l'île Maurice ; Jeanne Barret a veillé sur lui jusqu'à la fin. Ensuite, elle ouvre un bar à marins, se marie avec un militaire, et finit par revenir en France, bouclant ainsi le premier tour du monde féminin de l'histoire. Loin du blâme général, ce qui domine dans les récits des contemporains, c'est plutôt le respect et l'admiration. Voici ce qu'en dit Jérôme Lalande, l'astronome académicien, dans son éloge de Commerson.

Elle avoit trompé son maître

Bougainville, Voyage autour du monde (1772)



fois ſa pudeur. Quand je fus à bord de l'Etoile, Baré, les yeux baignés de larmes, m'avoua qu'elle étoit fille : elle me dit qu'à Rochefort elle avoit trompé ſon maître en ſe préſentant à lui ſous des habits d'homme au moment même de ſon embarquement ; qu'elle avoit

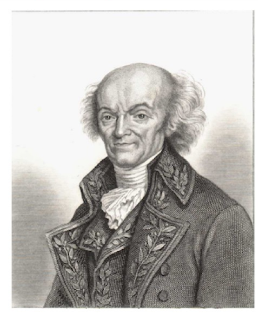
28 Éloge de M. Commerson (1775)

« On a fait un reproche à M. Commerson d'avoir souffert qu'une fille le suivît, déguisée en homme, pour faire le tour du monde avec lui ; mais le courage infatigable avec lequel elle le suivait et le servait dans ses pénibles expéditions, prouve qu'il ne pouvait se choisir un meilleur domestique, et la discrétion singulière avec laquelle elle resta inconnue pendant plus d'une année sur le vaisseau, prouve qu'elle n'avait ni les défauts que l'on reproche à son sexe, ni les agréments qui pouvaient rendre suspect ce déguisement. »

Mouais, peut-être. Toujours est-il que Commerson devait une fière chandelle à Bougainville pour avoir fermé les yeux.

Éloge de M. Commerson (1775)

Joseph Jérôme Lefrançois de Lalande (1732–1807)



29 Bougainvillier

Alors le moins qu'il pouvait faire, c'était de baptiser en l'honneur de Bougainville une de ces magnifiques plantes qu'il avait découvertes, le bougainvillier.

Bien bien. Nous voici rendus un peu loin du théorème fondamental de l'algèbre, vous ne trouvez pas ? Bon, vous vous souvenez ? D'Alembert propose une démonstration analytique, Euler une démonstration algébrique, mais aucune des deux ne tient la route.

Après eux, Lagrange tente de réparer la démonstration d'Euler. En 1795, Laplace donne un cours à l'éphémère École normale de l'an III (je vous raconte ça ailleurs). Il balaye la question en deux pages. Voici les premières phrases.

Bougainvillier

Louis-Antoine de Bougainville (1729–1811)

30 Leçons données à l'École Normale (1795)

« De là résulte une démonstration fort simple de ce théorème général que nous avons énoncé précédemment et qui consiste en ce que toute équation d'un degré pair est résoluble en facteurs réels du deuxième degré.

Soient $a, b, c, \ldots$ les diverses racines de cette équation et supposons que $2^i s$ soit son degré, s exprimant un nombre impair ; etc. »

Vous voyez l'erreur ? Attendez : il s'agit de démontrer qu'une équation a des racines d'un certain type, et on commence par supposer qu'elle a des racines ! Mais de quel droit et de quel type ? Cette erreur-là, qui n'a dérangé ni Euler, ni d'Alembert, ni Lagrange, ni Laplace, un jeune homme de 20 ans ne l'accepte pas.

Leçons données à l'École Normale (1795)

Pierre-Simon Laplace (1749–1827)

De là résulte une démonstration fort simple de ce théorème général que nous avons énoncé précédemment et qui consiste en ce que toute équation d'un degré pair est résoluble en facteurs réels du deuxième degré.

Soient $a, b, c, \ldots$ les diverses racines de cette équation et supposons que $2^i s$ soit son degré, s exprimant un nombre impair. L'équation dont

31 Demonstratio nova (1799)

Le jeune homme, c'est Gauss, et voici la première page de sa thèse.

« Une nouvelle démonstration du théorème que toute fonction algébrique rationnelle entière à une variable peut être résolue en facteurs réels du premier ou du second degré. »

Traduisez : tout polynôme à coefficients réels se factorise en polynômes de degré un ou deux.

La thèse est courte : 40 pages. Sur ces 40 pages, Gauss en consacre plus de la moitié à une analyse des démonstrations de d'Alembert, Euler et Lagrange, en détaillant les raisons pour lesquelles aucune de ces démonstrations n'est acceptable. Mais avant, il expose l'erreur fondamentale consistant à ne pas définir ce que l'on entend par « racine d'une équation ».

Au passage, admirez la maîtrise et l'absence de complexe de Gauss, qui explique posément, à vingt ans, que tous ses prédécesseurs ont dit n'importe quoi.

Demonstratio nova (1799)

Carl Friedrich Gauss (1777–1855)

DEMONSTRATIO NOVA
THEOREMATIS
OMNEM FVNCTIONEM ALGEBRAICAM
RATIONALEM INTEGRAM
VNIVS VARIABILIS
IN FACTORES REALES PRIMI VEL SECVNDI GRADVS
RESOLVI POSSE
QVAM
PRO
OBTINENDIS SVMMIS IN PHILOSOPHIA HONORIBVS
INCLITO PHILOSOPHORVM ORDINI
ACADEMIAE IVLIAE CAROLINAE
EXHIBVIT
CAROLVS FRIDERICVS GAVSS.

32 Si non possibiles, impossibiles (1799)

« Certains auteurs, qui semblent percevoir la faiblesse de cette méthode, supposent comme un axiome qu'une équation a des racines, si non possibles, alors impossibles. Ce qu'ils entendent par quantités « possibles » ou « impossibles » n'est pas établi avec assez de clarté. Si possible signifie la même chose que réel et impossible la même chose qu'imaginaire, alors cet axiome ne peut pas être admis, mais demande nécessairement à être démontré. »

Si non possibiles, impossibiles (1799)

Gauss, Demonstratio nova (1799)

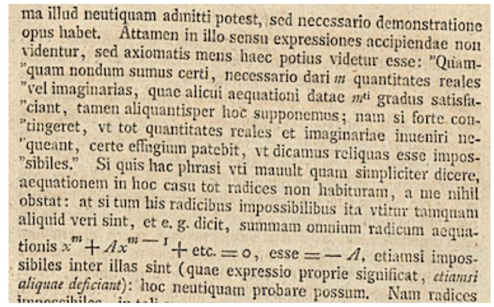
Quidam auctores, qui debilitatem huius methodi percepisse videntur, tamquam *axioma* assumunt, quamuis aequationem reuera habere radices, si non possibiles, impossibiles. Quid sub quantitatibus possibilibus et impossibilibus intelligi velint, haud satis distincte exposuisse videntur. Si quantitates possibiles idem denotare debent vt reales, impossibiles idem vt imaginariae: axioma

33 Hoc neutiquam probare possum

« Pourtant, il ne semble pas que ces expressions soient comprises ainsi, mais plutôt que le sens de l'axiome soit le suivant : « Bien que nous ne soyons pas encore certains que m quantités réelles ou imaginaires satisfassent une équation de degré m, alors l'alternative resterait ouverte que nous puissions dire que les autres sont impossibles ». Si quelqu'un souhaite utiliser cette phrase plutôt que de dire que l'équation en ce cas n'a pas autant de racines, je n'ai pas d'objection. Mais s'il utilise ces racines impossibles comme quelque chose de factuel, par exemple pour dire que la somme de toutes les racines de l'équation $x^m + Ax^{m-1} +$ et cetera est égale à $-A$ même si certaines d'entre elles peuvent être impossibles (ce qui signifie réellement : même si certaines sont manquantes), alors je ne peux aucunement approuver (neutiquam probare). »

Hoc neutiquam probare possum

Gauss, Demonstratio nova (1799)


ma illud neutiquam admitti potest, sed necessario demonstratione opus habet. Attamen in illo sensu expressiones accipiendae non videntur, sed axiomatis mens haec potius videtur esse: "Quamquam nondum sumus certi, necessario dari m quantitates reales "vel imaginarias, quae alicui aequationi datae m^{ti} gradus satisfaciant, tamen aliquantisper hoc supponemus; nam si forte contingeret, vt tot quantitates reales et imaginariae inueniri nequeant, certe effugium patebit, vt dicamus reliquas esse impossibiles." Si quis hac phrasi vti mauult quam simpliciter dicere, aequationem in hoc casu tot radices non habituram, a me nihil obstat: at si tum his radicibus impossibilibus ita vtitur tamquam aliquid veri sint, et e. g. dicit, summam omnium radicum aequationis $x^m + Ax^{m-1} +$ etc. $= 0$, esse $= -A$, etiamsi impossibiles inter illas sint (quae expressio proprie significat, *etiamsi aliquae deficiant*): hoc neutiquam probare possum. Nam radices

34 Jean-Robert Argand (1768–1822)

Alors fin de l'histoire ? Une fois de plus Gauss a été le premier, et le meilleur ? Eh bien non, pas tout à fait.

Lui-même n'était pas complètement satisfait de sa propre démonstration ; alors il en donne deux autres en 1816 ; puis il y revient en 1849, à plus de soixante-dix ans, cinquante ans après sa thèse, pour compléter sa première démonstration. Entre temps l'inévitable Cauchy avait bien sûr apporté sa pierre à l'édifice.

Dans cette histoire, je vous ai cité Euler, d'Alembert, Lagrange, Laplace, Cauchy et Gauss. Alors qui a gagné ? Lequel de ceux-là a fourni le premier, une démonstration acceptable ? La réponse est : aucun ! L'illustre inconnu dont vous voyez le portrait a coiffé tout le monde au poteau. Mais je vous raconterai son histoire une autre fois.

Jean-Robert Argand (1768–1822)

35 références

Pour rêver un peu, repartons quelques instants pour Tahiti, bercés par le récit de Bougainville.

« Cette habitude de vivre continuellement dans le plaisir, donne aux Tahitiens un penchant marqué pour cette douce plaisanterie, fille du repos et de la joie.

Il semble que la moindre réflexion leur soit un travail insupportable, et qu'ils fuient encore plus les fatigues de l'esprit que celles du corps. »

Mmm, le paradis sur Terre !

références

- C. Alvarez, J. Dhombres (2011) *Une histoire de l'imaginaire mathématique. Vers le théorème fondamental de l'algèbre et sa démonstration par Laplace en 1795*, Paris : Hermann
- C. Balthus (2004) D'Alembert's proof of the fundamental theorem of algebra, *Historia Mathematica*, 31, 414–428
- P. Crépel (2018) *Jean le Rond D'Alembert (1717–1783)*, culturemath.ens.fr
- C. Gilain (1991) Sur l'histoire du théorème fondamental de l'algèbre : théorie des équations et calcul intégral, *Archive for History of Exact Sciences*, 42(2), 91–136
- S. S. Petrova (1974) Sur l'histoire des démonstrations analytiques du théorème fondamental de l'algèbre, *Historia Mathematica*, 1, 255–261
- R. Taton (1984) D'Alembert, Euler et l'Académie de Berlin, *Dix-huitième Siècle*, 16, 55–68