0 Le festival des couleurs

Dans l'histoire de l'algèbre, quelque chose m'étonne. C'est le contraste entre l'universalité des problèmes, de l'Égypte à la Grèce, de Pékin à Bagdad, de la Mésopotamie à l'Europe, et la diversité des méthodes. On a l'impression que les devinettes numériques se sont répandues, ou bien ont été réinventées pratiquement sous la même forme, tandis que les méthodes de résolution ne se sont pas ou peu diffusées.

Autrement dit, les mêmes problèmes ont été résolus de tous temps et dans tous les pays, mais pas de la même manière. Il a fallu très longtemps pour qu'à partir de ces problèmes, émergent les notions d'équations et d'inconnues. Voici un des exemples les plus anciens. Il est issu du Papyrus Rhind, écrit vers 1650 avant notre ère, qui compile des problèmes encore plus anciens.

histoires d'algèbre

Le festival des couleurs

algèbre en Inde

hist-math.fr Bernard Ycart

1 Problème 24

« Une quantité et son septième ajoutés ensemble deviennent 19. Quelle est la quantité ? »

Réfléchissez à la succession des automatismes que ce problème déclenche pour nous. Une quantité, c'est l'inconnue : sans nous demander pourquoi, nous l'appelons x puis nous traduisons le problème en une équation : x plus un septième de x égale 19. Cette manière de faire qui nous paraît si naturelle, ne s'est imposée en Europe qu'au dix-huitième siècle, soit trente-six siècles après le Papyrus Rhind.

Problème 24

Ahmès, Papyrus Rhind (ca 1650 av. J.-C.)

Une quantité et son septième ajoutés ensemble deviennent 19. Quelle est la quantité ?

$$x + \frac{x}{7} = 19\,.$$

2 Problème 24

Une fois l'équation écrite, nous la résolvons. Pour cela, nous avons tout un tas d'outils à notre disposition : regrouper des termes, mettre en facteur, réduire au même dénominateur, changer de membre en changeant de signe, multiplier par l'inverse, et j'en passe.

Pendant de nombreux siècles, aucun de ces outils n'existait. Pour autant, les problèmes étaient bien là, et on ne se laissait pas arrêter pour autant. Ils étaient résolus, et la bonne réponse était trouvée. Comment ? Par exemple, par les méthodes de fausse position, dont je vous parle ailleurs. Elles ont été beaucoup plus universelles que nos x et nos y. Ce n'est qu'un exemple. La notion même de ce qu'est une équation était différente. Nos équations du second degré étaient résolues en Mésopotamie, en Grèce et chez les Arabes comme des découpages d'aires, il n'était pas question de $ax^2 + bx + c$ ni de $b^2 - 4ac$.

Je ne cherche pas, sous prétexte d'histoire, à vous faire revenir en arrière. Notre algèbre symbolique est évidemment plus puissante et plus simple que les méthodes anciennes. Pour autant, il est bon de prendre conscience du fait que cette algèbre n'est pas, comme on le croit parfois, l'aboutissement d'un progrès unidirectionnel, qui des Mésopotamiens aux Grecs, puis aux Arabes, aurait conduit jusqu'à nous.

La preuve, c'est que les Indiens ont développé il y a longtemps, une réflexion algébrique beaucoup plus proche de la nôtre que de celle des Grecs avant eux, et des Arabes qui leur ont succédé. En particulier, c'est en Inde que sont apparues les inconnues multiples. Ces inconnues n'étaient pas des x et des y mais des couleurs. Pourquoi des couleurs ? Eh bien il se trouve qu'en Inde, le concept de couleur est beaucoup plus général que le nôtre. Déjà, il est profondément ancré dans la mythologie.

Voici la légende de Krishna.

Problème 24

Ahmès, Papyrus Rhind (ca 1650 av. J.-C.)

$$\begin{aligned} x + \frac{x}{7} &= 19 \\ x\left(1 + \frac{1}{7}\right) &= 19 \\ x\left(\frac{8}{7}\right) &= 19 \\ x &= 19\left(\frac{7}{8}\right) = \frac{133}{8}\,. \end{aligned}$$

3 La légende de Krishna

Krishna n'est pas le seul dieu à peau bleu dans la religion hindoue, mais sa peau à lui est devenue bleue par la faute de la méchante démone Putana (euh non, ce n'est pas de l'espagnol). Figurez-vous qu'elle l'a allaité avec son lait empoisonné.

Évidemment, Krishna devenu grand a tué Putana, c'était bien la moindre des choses. Mais rien n'y a fait, sa peau est restée bleue.

La légende de Krishna

4 Krishna et Radha

Krishna et Radha

Dans sa jeunesse, Krishna se désespérait de savoir si sa bien-aimée Radha et les gardiennes de vaches Gopis, l'aimeraient malgré sa peau bleue. Alors sa mère, fatiguée de voir son fils se lamenter ainsi, lui conseilla d'approcher Radha et de jouer à lui colorer le visage. C'est ce qu'il fit ! Depuis ce jour, la coloration du visage de Radha est commémorée lors de Holi.

5 Holi

Holi
Festival des couleurs

Holi, c'est le festival des couleurs. Une fête de printemps célébrée dans toute l'Inde, où on joue à se jeter des poudres de couleur à la figure.

6 Holi

Holi
Festival des couleurs

C'est vous dire s'ils y tiennent les Indiens à leurs couleurs. D'autant que le concept de couleur chez eux est encore beaucoup plus profond.

7 Varṇa

Varṇa
couleurs et castes

Le même mot, Varna, désigne non seulement les couleurs que l'on se jette à la figure, mais aussi, sans doute en liaison avec les couleurs de peau, les castes qui divisent la société indienne depuis très longtemps.

Utiliser ce même concept pour désigner des quantités que l'on doit dénombrer séparément parce qu'elles sont de nature différente, a dû sembler naturel aux premiers mathématiciens indiens.

8 Brahmagupta (ca. 598–665)

La première trace qui nous en soit parvenue date de Brahmagupta, au septième siècle de notre ère. Mais Brahmagupta présente cela comme une méthode ancienne. Elle date probablement au moins d'Aryabhata à la fin du cinquième siècle, et peut-être d'avant.

Brahmagupta (ca. 598–665)

9 Brahmagupta (ca. 598–665)

Comme la plupart des mathématiciens indiens, Brahmagupta était avant tout un astronome. Il était même le directeur de l'observatoire d'Ujjain, une ville du centre de l'Inde. Celui que vous voyez est de construction relativement récente, l'observatoire de Brahmagupta a disparu depuis longtemps.

Son œuvre principale, s'appelle le Brahmasphutasiddhanta, ce qui veut dire la doctrine de Brahma correctement établie. Elle contient deux chapitres de méthodologie mathématique. L'algèbre apparaît dans le chapitre 18. Voici les deux premiers versets.

Brahmagupta (ca. 598–665)
Observatoire d'Ujjain (1725)

10 Brāhmasphuṭasiddhānta (628)

« Rares sont les questions qui peuvent se résoudre sans le pulvérisateur, je proposerai donc son étude accompagnée de problèmes. »

Le pulvérisateur, ou « kuttaka » c'est l'outil de base de l'arithmétique et de l'algèbre en Inde, depuis Aryabhata : c'est l'algorithme de résolution d'une équation linéaire en nombres entiers, à deux inconnues. Vous pouvez le voir comme une variante de l'algorithme d'Euclide, pour déterminer des identités de Bézout.

« Par le pulvérisateur, le zéro, les quantités négatives et positives, la quantité inconnue, l'élimination du terme médian, les couleurs et leurs produits, par le carré affecté, s'ils sont bien compris, un homme devient professeur parmi les savants. »

Vous avez là un résumé presque complet de ce qu'était l'algèbre au temps de Brahmagupta, et pendant au moins cinq siècles après lui. Par rapport à nos propres méthodes, c'est un peu dans le désordre, mais tout a un sens : le zéro, les quantités négatives et positives servent à simplifier les équations, en faisant passer les termes d'un côté à l'autre. L'élimination du terme médian et le carré affecté, servent à résoudre les équations du second degré en faisant apparaître dans un membre le développement du carré d'un binôme. Enfin la quantité inconnue, les couleurs et leurs produits résument les différentes manières de combiner entre elles les inconnues.

Brāhmasphuṭasiddhānta (628)
Brahmagupta (ca. 598–665)

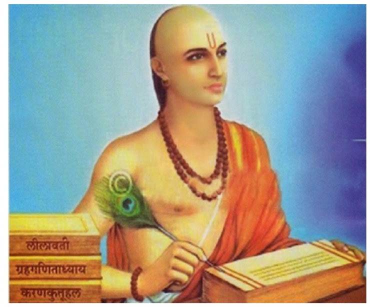
1 – Rares sont les questions qui peuvent se résoudre sans le pulvérisateur, je proposerai donc son étude accompagnée de problèmes.

2 – Par le pulvérisateur, le zéro, les quantités négatives et positives, la quantité inconnue, l'élimination du terme médian, les couleurs et leurs produits, par le carré affecté, s'ils sont bien compris, un homme devient professeur parmi les savants.

11 Bhāskarāchārya (1114–1185)

Laissons s'écouler cinq siècles pour arriver au temps de Bhaskaracharya. Mais si vous savez bien ! l'auteur de Lilavati, la belle dont les yeux sont inconstants comme ceux de la jeune gazelle. Lilavati est un traité d'arithmétique. Bhaskara a aussi écrit un traité d'algèbre, Bija-Ganita. Ganita signifie « science du calcul ». L'arithmétique est la « pati-ganita », l'algèbre la « bija-ganita ». Quelle différence fait-il ? Il suffit de le lui demander.

Bhāskarāchārya (1114–1185)



12 Bīja-Gaṇita

« Le *pāṭī* (arithmétique) est proportion et le *bīja* (algèbre), pure pensée ; qu'y a-t-il d'inconnu pour qui est intelligent ? Ceci est donc dit pour les lents d'esprit. »

Et vlan ! il ne nous l'envoie pas dire.

« Le *bīja* n'est pas réduit à la nature des couleurs, il n'y a pas plusieurs *bīja* séparés les uns des autres, le *bīja* est une unité, pensée, parce que la création mentale n'est pas de petite envergure. »

Bija désigne la graine ou l'origine. Bija-Ganita c'est donc le calcul qui est à l'origine de tous les autres calculs, ou le calcul sur les causes premières.

Voici le premier verset de la section quatre, dans le premier chapitre.

Bīja-Gaṇita
Bhāskarāchārya (1114–1185)

Le *pāṭī* (arithmétique) est proportion et le *bīja* (algèbre), pure pensée ; qu'y a-t-il d'inconnu pour qui est intelligent ? Ceci est donc dit pour les lents [d'esprit].

[. . .]

Le *bīja* n'est pas [réduit] à la nature des couleurs (inconnues), il n'y a pas plusieurs *bīja* séparés les uns des autres, le *bīja* est une unité, pensée, parce que la création mentale n'est pas de petite envergure.

13 Bīja-Gaṇita, Chapitre I, Section IV

« « Autant que » et les couleurs noir, bleu, jaune et rouge, ainsi que d'autres au-delà de celles-là, ont été choisies par de vénérables professeurs comme noms des quantités inconnues, afin de les utiliser pour le calcul. »

Il se trouve que la première inconnue n'est pas une couleur. C'est « yāvat-tāvat », qui se traduit par « autant que » dont l'abréviation est « yā ». Les autres couleurs sont aussi abrégées par leur première syllabe.

Bīja-Gaṇita, Chapitre I, Section IV
Bhāskarāchārya (1114–1185)

« Autant que » et les couleurs noir, bleu, jaune et rouge, ainsi que d'autres au-delà de celles-là, ont été choisies par de vénérables professeurs comme noms des quantités inconnues, afin de les utiliser pour le calcul.

14 Inconnues et couleurs

Inconnues et couleurs
Bhāskarāchārya, Bīja-Gaṇita (ca. 1150)

Voici donc les premières inconnues, « ya », « ka », « ni », etc., au lieu de nos x, y, z. Pour les distinguer des coefficients, les termes constants ont leur propre symbole, rupa, qui veut dire « unité ».

Reste à noter les puissances.

○	x	yāvattāvat	yā
●	y	kālaka	kā
●	z	nīlaka	nī
●	t	pīta	pī
●	u	lōhitaka	lō
⋮			
	1	rūpa	rū

15 Produits et puissances

Produits et puissances
Bhāskarāchārya, Bīja-Gaṇita (ca. 1150)

Un produit se dit « bhavita » ce qui signifie futur, ou « à venir », ce qui est un peu l'idée de « produit » si on y réfléchit. Le carré se dit varga, qui signifie aussi corps d'armée. L'analogie géométrique est claire. Le cube est « ghana », qui veut aussi dire « solide ». Bien sûr, les inconnues et les opérations se combinent à volonté.

bhāvita	bhā	produit
varga	va	carré
ghana	gha	cube

16 Monômes

Monômes
Bhāskarāchārya, Bīja-Gaṇita (ca. 1150)

Par exemple « yā va » désigne la première inconnue au carré, « kā gha » désigne la seconde inconnue au cube. Pour effectuer le produit des deux, on ajoute « bhā » qui est l'abréviation de bhāvita.

Les coefficients devant les monômes peuvent être positifs ou négatifs, auquel cas, ils sont notés avec un point au-dessus. Il n'y a donc pas besoin de signe particulier pour l'addition, qui est une simple juxtaposition. Voici un des exercices donnés par Bhaskara. Vous allez voir que sa notation n'est pas beaucoup plus compliquée que la nôtre.

yā va	x^2
kā gha	y^3
yā va-va	x^4
kā va-gha	y^5
yā va . kā gha bhā	x^2y^3

17 produit de polynômes

produit de polynômes
Bhāskarāchārya, Bīja-Gaṇita (ca. 1150)

Il s'agit d'effectuer le produit de $-3x - 2y + z + 1$ par lui-même, doublé. Remarquez que Bhaskara donne le résultat dans l'ordre où nous le donnerions nous même.

À quoi sert cette écriture ? À écrire, simplifier, puis résoudre des équations bien sûr.

yā $\dot{3}$ kā $\dot{2}$ nī 1 rū 1

multiplié par :

yā $\dot{6}$ kā $\dot{4}$ nī 2 rū 2

résultat :

yā va 18 kā va 8 nī va 2 yā kā bhā 24 yā nī bhā $\dot{1}2$ kā nī bhā $\dot{8}$ rū 2

$$
\begin{aligned}
& (-3x - 2y + z + 1) \times (-6x - 4y + 2z + 2) \\
= \quad & 18x^2 + 8y^2 + 2z^2 + 24xy - 12xz - 8yz + 2
\end{aligned}
$$

18 équation du premier degré

« Quelqu'un possède trois cents unités d'une monnaie et six chevaux ; un autre dix chevaux du même prix mais une dette de cent unités ; les deux sont également riches. Quel est le prix d'un cheval ? »

Les deux membres de l'équation sont écrits l'un au-dessus de l'autre dans le texte. Ensuite la règle dit qu'il faut soustraire les coefficients de l'inconnue et ceux de l'unité. C'est exactement ce que nous ferions aussi.

équation du premier degré

Bhāskarāchārya, Bīja-Gaṇita (ca. 1150)

Quelqu'un possède trois cents unités d'une monnaie et six chevaux ; un autre dix chevaux du même prix mais une dette de cent unités ; les deux sont également riches. Quel est le prix d'un cheval ?

$$\begin{array}{llc} \text{yā } 6 & \text{rū } 300 & 6x + 300 = \\ \text{yā } 10 & \text{rū } 1\dot{0}0 & 10x - 100 \end{array}$$

19 équation du second degré

« La racine carrée de la moitié d'un essaim d'abeilles est allée vers un buisson de jasmin ; les huit neuvièmes de l'essaim ont fait de même. Une femelle volète autour d'un mâle restant qui bourdonne à l'intérieur d'un lotus dans lequel il s'est piégé, attiré qu'il était par sa fragrance nocturne. Dis-moi, délicieuse dame, le nombre des abeilles. »

Bhaskara pose l'inconnue égale à la racine carrée de la moitié de l'essaim complet. Il écrit l'équation de l'énoncé qui est $2x^2$, l'essaim complet, égal à x plus 16 neuvièmes de x^2, soit les huit neuvièmes de l'essaim, plus les deux abeilles esseulées. Il multiplie le tout par neuf pour se débarrasser du dénominateur. La résolution peut commencer.

équation du second degré

Bhāskarāchārya, Bīja-Gaṇita (ca. 1150)

La racine carrée de la moitié d'un essaim d'abeilles est allée vers un buisson de jasmin ; les huit neuvièmes de l'essaim ont fait de même. Une femelle volète autour d'un mâle restant qui bourdonne à l'intérieur d'un lotus dans lequel il s'est piégé, attiré qu'il était par sa fragrance nocturne. Dis-moi, délicieuse dame, le nombre des abeilles.

essaim complet : yā va 2 ($2x^2$)

$$2x^2 = x + \frac{16}{9}x^2 + 2 \Longleftrightarrow 18x^2 = 16x^2 + 9x + 18$$

20 équation du second degré

Les deux membres sont l'un au-dessus de l'autre. Tous les termes sont écrits, même ceux dont le coefficient est nul. La méthode consiste d'abord à effectuer les soustractions nécessaires pour annuler des coefficients.

On obtient donc $2x^2 - 9x = 18$. Ensuite, on multiplie par huit, puis on ajoute 81 aux deux membres pour compléter le carré dans le premier membre.

On extrait ensuite la racine carrée des deux membres, ce qui donne $4x - 9 = 15$. L'inconnue était donc égale à 15 plus 9 divisé par 4 soit 6, et la taille de l'essaim était six au carré multiplié par deux, donc 72.

Bhaskara est parfaitement conscient du fait qu'un nombre positif a deux racines, une positive et une négative. Il ne manque pas de le signaler quand c'est nécessaire.

Voici maintenant un système d'équations.

équation du second degré

Bhāskarāchārya, Bīja-Gaṇita (ca. 1150)

$$\begin{array}{lllc} \text{yā va } 18 & \text{yā } 0 & \text{rū } 0 & \\ \text{yā va } 16 & \text{yā } 9 & \text{rū } 18 & 18x^2 = 16x^2 + 9x + 18 \end{array}$$

$$\begin{array}{lllc} \text{yā va } 2 & \text{yā } \dot{9} & \text{rū } 0 & \\ \text{yā va } 0 & \text{yā } 0 & \text{rū } 18 & 2x^2 - 9x = 18 \end{array}$$

$$\begin{array}{lllc} \text{yā va } 16 & \text{yā } \dot{7}2 & \text{rū } 81 & \\ \text{yā va } 0 & \text{yā } 0 & \text{rū } 225 & 16x^2 - 72x + 81 = 225 \end{array}$$

$$\begin{array}{llc} \text{yā } 4 & \text{rū } \dot{9} & \\ \text{yā } 0 & \text{rū } 15 & 4x - 9 = 15 \end{array}$$

21 Système d'équations

« Les chevaux de quatre personnes sont respectivement cinq, trois, six et huit ; les chameaux, deux, sept, quatre et un ; les mules, huit, deux, une et trois ; et les moutons, sept, un, deux et un. Tous sont également riches. Dis-moi individuellement, mon ami, les prix des chevaux et du reste. »

Vous voyez que l'écriture de Bhaskara, n'est pas très différente de la notre. Dans la mesure où la fortune commune des quatre hommes n'est pas précisée, c'est un système indéterminé, qui peut avoir une infinité de solutions. On les trouve en se ramenant, par élimination successives à une seule équation à deux inconnues, que l'on résout par le pulvérisateur.

Et maintenant, à vous de jouer. Voici trois énoncés de Bhaskara. Écrivez donc leur mise en équation à la manière indienne.

Système d'équations

Bhāskarāchārya, Bīja-Gaṇita (ca. 1150)

Les chevaux de quatre personnes sont respectivement cinq, trois, six et huit ; les chameaux, deux, sept, quatre et un ; les mules, huit, deux, une et trois ; et les moutons, sept, un, deux et un. Tous sont également riches. Dis-moi individuellement, mon ami, les prix des chevaux et du reste.

yā 5	kā 2	nī 8	pī 7	
yā 3	kā 7	nī 2	pī 1	
yā 6	kā 4	nī 1	pī 2	
yā 8	kā 1	nī 3	pī 1	

$$\begin{cases} 5x + 2y + 8z + 7t & = \\ 3x + 7y + 2z + t & = \\ 6x + 4y + z + 2t & = \\ 8x + y + 3z + t & \end{cases}$$

22 Boucle d'oreille

« Huit rubis, dix émeraudes, et cent perles, qui sont sur ta boucle d'oreille, ma bien-aimée, ont été achetées par moi à ton intention, et pour des sommes identiques ; la somme des prix des trois sortes de joyaux, était trois de moins que la moitié d'une centaine : donne moi le prix de chacun, accorte dame, si tu es versée dans ce genre de calcul. »

Boucle d'oreille

Bhāskarāchārya, Bīja-Gaṇita (ca. 1150)

23 Quatre joaillers

« Quatre joaillers, possédent respectivement huit rubis, dix saphirs, cent perles et cinq diamants. Chacun offre de son avoir une pièce à tous les autres, en témoignage d'égard et de reconnaissance pour leur rencontre. Ils se trouvent alors à la tête d'avoirs de valeurs égales. Dis-moi mon ami, quels étaient les prix respectifs de leurs joyaux. »

Quatre joaillers

Bhāskarāchārya, Bīja-Gaṇita (ca. 1150)

24 Une troupe de singes

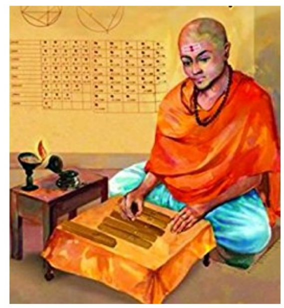
« La huitième partie d'une troupe de singes, au carré, sautait dans un bosquet, ravis de l'exercice. Douze singes restants, ont été vus sur la colline, s'amusant à bavarder entre eux. Combien étaient-ils en tout ? »

Une troupe de singes
Bhāskarāchārya, Bīja-Gaṇita (ca. 1150)

25 Mahāvīrāchārya

Vous vous doutez bien, que s'agissant des mathématiques indiennes, je n'allais pas laisser passer l'occasion de caser un ou deux de ces énoncés flamboyants du maître Mahavira, dont je raffole.

Mahāvīrāchārya
IXe siècle



26 Combat de coqs

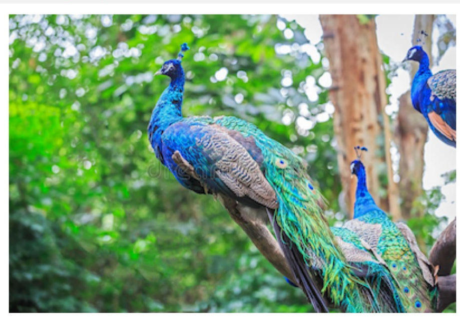
« Un sorcier, doté de pouvoirs d'incantations mystiques et de remèdes magiques, voyant se dérouler un combat de coqs, parla en privé à chacun des deux propriétaires. À l'un il dit : « Si ton oiseau gagne, alors tu me donnes ta mise, mais si tu ne gagnes pas, je t'en donnerai les deux tiers. Allant vers l'autre il promit de même les trois quarts. De chacun d'eux son gain aurait été de seulement 12 pièces. Dis-moi, Ô ornement des mathématiciens de première classe, quel était l'enjeu de chacun des propriétaires. »

Combat de coqs
Mahāvīra, Gaṇita-sāra-saṅgraha, ca. 850

27 Paons sur un manguier

« Le seizième d'une collection de paons multiplié par lui-même, était sur un manguier ; un neuvième du restant multiplié par lui-même, avec quatorze paons était dans un bosquet de tamalas. Combien étaient-ils en tout ? »

Paons sur un manguier
Mahāvīra, Gaṇita-sāra-saṅgraha, ca. 850



Vous avez le droit de remarquer que, si on voulait vraiment savoir combien il y avait de paons, il aurait été plus simple de les compter, plutôt que d'imaginer un énoncé aussi tordu. Après tout, il n'y en a que 48. Peut-être, mais cela aurait été moins algébrique d'une part, et surtout moins poétique. Vous n'êtes pas d'accord ? Oh, je suis déçu : moi qui vous prenais pour l'ornement des mathématiciens de première classe. . .

références

- Brahmagupta (1966) *Brāhma-Sphuṭa Siddhānta, Volume 1*, New Dehli : Indian Institute of Astronomical and Sanskrit Research
- B. Datta, A. N. Singh (1962) *History of Hindu mathematics, a source book*, Bombay : Asia Publishing House
- A. Heefer (2007) The tacit appropriation of Hindu algebra in Renaissance practical arithmetic, *Gaṇita Bhārāti*, 29(1-2), 1–60
- F. Patte (2006) L'algèbre en Inde au XIIe siècle, *Comptes rendus des séances de l'Académie des Inscriptions et Belles-Lettres*, 150(4), 1897–1915
- K. Plofker (2009) *Mathematics in India*, Princeton : Princeton University Press