0 Les pères de l'algèbre

Tout de même, c'est un sacré exploit ! Rendez-vous compte : on déchiffre des textes écrits avec des signes dont le sens s'était perdu pendant deux mille ans, dans une langue elle aussi disparue depuis longtemps, et par-dessus le marché, on se rend compte que ces textes expliquent des mathématiques que nous pouvons comprendre !

Cet exploit a été réalisé dans la première moitié du vingtième siècle. Vous allez voir.

1 BM 13901 (ca 1800 av. J.-C.)

Je vous présente BM 13901. BM pour British Museum, parce qu'elle y est conservée, et c'est à peu près tout ce qu'on sait sur sa provenance. Elle mesure douze centimètres de large sur vingt de haut. Comme vous le voyez une assez grande partie est endommagée.

2 BM 13901 (ca 1800 av. J.-C.)

Voici les deux tranches, qui sont elles aussi écrites.

On a réussi à tirer de tout ça, vingt quatre problèmes mathématiques avec leurs solutions. Il sont classés par ordre de difficulté croissante. De 1 à 7, ce sont des équations du second degré à une inconnue. De 8 à 14, des systèmes de deux équations dont la première est du type $x^2 + y^2 = a$, la seconde est du premier degré en x et y. Les problèmes suivants, toujours quadratiques, ont trois ou quatre inconnues.

3 BM 13901 (ca 1800 av. J.-C.)

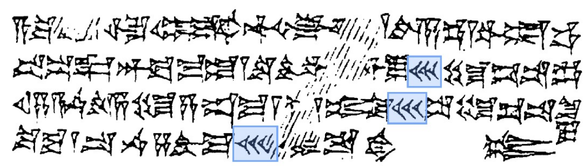
Comment diable a-t-on réussi à comprendre tout cela ? Ce n'est pas facile. Voici un détail de la tablette. Il faut commencer par reconnaître dans ces coins, imprimés dans l'argile, des groupes de traits qui chacun forment un caractère.

BM 13901 (ca 1800 av. J.-C.)
British Museum

4 Problème 1

Voici comment se présente le tout premier problème écrit sur cette tablette BM 13901. Sans être spécialiste, difficile d'y reconnaître des caractères. C'est à peine si on distingue certains chiffres. Les encadrés bleus marquent les occurrences du nombre 30, écrit en sexagésimal.

Problème 1
BM 13901 (ca 1800 av. J.-C.)



5 Otto Neugebauer (1899–1990)

Parmi ceux qui ont réussi à déchiffrer, puis à comprendre les problèmes mathématiques mésopotamiens, la grande figure est l'Autrichien Otto Neugebauer. C'était un mathématicien de formation, qui avait appris à déchiffrer l'écriture cunéiforme.

Otto Neugebauer (1899–1990)

6 François Thureau-Dangin (1872–1944)

Son rival français, François Thureau-Dangin, était de la génération précédente. Il avait fait toute sa carrière dans l'assyriologie, avant de se mettre sur le tard à la traduction des textes mathématiques. Voici sa traduction du premier problème de BM 13901.

François Thureau-Dangin (1872–1944)

7 Problème 1, traduction Thureau-Dangin

Tous les nombres sont donnés en sexagésimal, ce qui est une première difficulté. Car non seulement il faut traduire de la base 60 à la base 10, mais encore il faut décider d'un ordre de grandeur. Par exemple dans la première ligne, 45 pourrait désigner 45 fois 60 comme 45 divisé par 60, c'est-à-dire trois quarts. C'est cette dernière possibilité qui est la bonne, ce que le traducteur indique par un prime.

Comme c'est déjà assez compliqué à comprendre, je vous propose d'oublier la base 60 et de vous donner directement la traduction dans notre système de nombres. La voici.

J'ai additionné la surface et le côté de mon carré : trois quarts. Tu poseras 1, l'unité. Tu fractionneras en deux 1 : un demi. Tu croiseras un demi et un demi : un quart. Tu ajouteras trois quarts et un quart, soit 1. C'est le carré de 1. Tu soustrairas de un le un demi que tu as croisé : donc un demi est le côté du carré.

Problème 1, traduction Thureau-Dangin
BM 13901 (ca 1800 av. J.-C.)

BM 13901 [1])

1

eqlam[am] *ù mi-it-ḫar-ti ak-m[ur-m]a 45 - e 1 wa-ṣi- am* 1
ta-ša-ka-an ba-ma-at 1 te-ḫe-pe [30] ù 30 tu-uš-ta-kal
15 a-na 45 tu-ṣa-ab-ma 1 - e 1 imtaḫar 30 ša tu-uš-ta ki-lu
lib-ba 1 ta-na-sà-aḫ-ma 30 mi-it-ḫar-tum

„J'ai additionné la surface et le côté de mon carré: 45′.
Tu poseras 1, l'unité. Tu fractionneras en deux 1 : (30′). Tu croiseras [30′] et 30′ : 15′. Tu ajouteras 15′ à 45′ : 1. C'est le carré de 1. Tu soustrairas 30′, que tu as croisé, de 1 : 30′, le côté du carré."

8 Problème 1, interprétation Thureau-Dangin

Voici comment Thureau-Dangin comprend cet énoncé.

J'ai additionné la surface et le côté de mon carré pour trouver 45, c'est-à-dire trois quarts.

Thureau-Dangin dit : « Dans notre algèbre symbolique nous écririons $x^2 + x = 3/4$. » Puis il résume l'ensemble des opérations en une formule, où il mélange des nombres sexagésimaux et des fractions, ce qui n'aide pas à la comprendre.

Pour y voir plus clair, commençons par écrire une solution actuelle du problème.

Problème 1, interprétation Thureau-Dangin
BM 13901 (ca 1800 av. J.-C.)

La grande tablette BM 13901 nous livre les seuls exemples où nous trouvions, explicitement formulée par l'énoncé, une équation complète du deuxième degré. Le problème 1 est énoncé comme il suit: „J'ai additionné la surface et le côté de mon carré: 45′". Dans notre algèbre symbolique nous écririons:

$$x^2 + x = 45'$$

Les opérations au moyen desquelles le scribe résout cette équation peuvent s'exprimer par la formule suivante:

$$x = \sqrt{(1/2)^2 + 45'} - 1/2 = 30'$$

Cette formule implique que l'équation a été transformée en l'équation équivalente

$$x^2 + x + (1/2)^2 = (1/2)^2 + 45'$$

dont le premier membre est le carré de $x + 1/2$.

9 Problème 1, solution moderne

Nous faisons passer le « trois quarts » dans le premier membre, puis nous appliquons la formule. Le discriminant vaut 4 et l'équation a donc deux racines, qui sont $1/2$ et $-3/2$. Du temps des Mésopotamiens, il n'était pas question de dire que cette équation a deux racines. Le concept de nombre négatif n'existait pas. Quand il se trouvait qu'une équation avait deux racines positives, il fallait décider laquelle des deux était la bonne en fonction du contexte. Dans tous les cas, un problème posé avait forcément une réponse unique, strictement positive et rationnelle.

Problème 1, solution moderne
BM 13901 (ca 1800 av. J.-C.)

$$x^2 + x = \frac{3}{4}$$

$$x^2 + x - \frac{3}{4} = 0$$

$$\Delta = 1 + 4 \times \frac{3}{4} = 4$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{4}}{2}$$

$$x = \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad x = -\frac{3}{2}\,.$$

10 Problème 1, interprétation Thureau-Dangin

Les Mésopotamiens n'utilisaient pas notre discriminant. Voici, selon Thureau-Dangin, quel était leur raisonnement. Si on ajoute un quart aux deux membres de l'équation, le premier membre devient un carré parfait. Il suffit alors d'extraire la racine du second membre pour arriver au résultat.

C'est magique, et plutôt impressionnant. Cela implique que, sans disposer de notre notation algébrique, qui n'apparaîtra que 30 siècles plus tard, les Mésopotamiens étaient capables de reconnaître des identités remarquables, comme le développement d'un carré. Il savaient résoudre des problèmes relativement sophistiqués, et en particulier n'importe quelle équation du second degré.

Le problème avec cette lecture, est que Thureau-Dangin, comme Neugebauer et tous leurs contemporains, plaquaient leur propre connaissance de l'algèbre sur ce qu'ils lisaient dans les tablettes. Ils supposaient que les Mésopotamiens raisonnaient comme eux sur des quantités abstraites, et faisaient donc la même algèbre qu'eux.

Ce n'est qu'à la toute fin du vingtième siècle que les spécialistes se sont posé la question du raisonnement des scribes de l'époque. Que cherchaient-ils vraiment à faire ? Et de quels outils de pensée disposaient-ils ? Vous allez le voir, la réponse était assez éloignée de celle de Thureau-Dangin.

En tête de ces spécialistes modernes, soucieux de ne pas plaquer artificiellement leurs propres schémas de pensée sur des écrits auxquels ils sont totalement étrangers, il y a quelqu'un dont je vous ai parlé plusieurs fois, Jens Høyrup. Voici sa traduction du même problème de BM 13901, comparée avec celle de Thureau-Dangin.

Problème 1, interprétation Thureau-Dangin
BM 13901 (ca 1800 av. J.-C.)

$$x^2 + x = \frac{3}{4}$$

$$x^2 + x + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = 1$$

$$x + \frac{1}{2} = 1$$

$$x = \frac{1}{2}\,.$$

11 Problème 1, traductions Thureau-Dangin et Høyrup

La traduction de Thureau-Dangin de 1936 est en noir. Celle de Høyrup de 1996 est en bleu. Ce qui frappe à la première lecture, c'est que la traduction bleue est moins compréhensible. C'est normal, elle est plus éloignée de nos schémas de pensée… et plus proche de ceux d'il y a 37 siècles. En analysant étymologiquement chaque mot, Høyrup a démontré que les termes employés, même pour les opérations de base que sont l'addition et la multiplication, n'ont pas nécessairement le sens que nous leur donnons. Regardez la première phrase. Le verbe n'est pas additionner, mais empiler.

On n'additionne pas la surface et le côté d'un carré, car ce sont des grandeurs de natures distinctes. Par contre, on peut empiler un carré et un rectangle, et considérer la surface totale, comme on le ferait de deux parcelles de terrain. Dans la seconde phrase, le mot forjet est un terme d'architecture, c'est un élément faisant saillie. De manière imagée, ici le terme 1 est ce qui fait saillie, à côté du carré initial.

La conclusion de cette analyse lexicale, est que le problème posé et sa solution sont des opérations géométriques concrètes sur des surfaces. Ce ne sont pas des manipulations abstraites, ni de nombres, ni de symboles.

Problème 1, traductions Thureau-Dangin et Høyrup
BM 13901 (ca 1800 av. J.-C.)

1. J'ai additionné la surface et le côté de mon carré : 45'
   La surface et ma confrontation j'ai empilées : 45'
2. Tu poseras 1, l'unité. Tu fractionneras en deux 1 : (30'). Tu croiseras [30'] et 30' : 15
   1, le forjet, tu poses. La demi-part de 1 tu brises, 30' et 30' fais tenir.
3. Tu ajouteras 15' à 45' : 1. C'est le carré de 1.
   15' à 45' tu ajoutes : auprès de 1, 1 est égal.
4. Tu soustrairas 30', que tu as croisé, de 1 : 30', le côté du carré. de l'intérieur de 1 tu arraches : 30' est la confrontation.

12 Problème 1, interprétation Høyrup

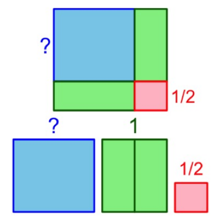
Voici quelle était la démarche dans ce problème. Les données sont le carré bleu, de côté inconnu et le rectangle vert, dont un des côtés est le même côté inconnu que celui du carré, l'autre vaut un. Si on empile les deux, on obtient une surface totale de trois quarts, dit l'énoncé.

Pour trouver le côté inconnu, il faut d'abord briser le rectangle dans le sens du côté qui vaut 1. On reporte ensuite les deux moitiés l'une horizontalement, l'autre verticalement, puis on complète avec un carré rouge de côté un demi. La figure recomposée, un peu comme dans le jeu de tangram, est le carré du haut. Son côté est l'inconnue plus un demi, sa surface est trois quarts plus un quart, donc 1. Le côté du carré recomposé est 1. Il ne reste plus qu'à trouver l'inconnue en arrachant de ce côté 1, le morceau un demi qu'on y avait ajouté.

Vous pouvez trouver que cela revient au même, et qu'il est beaucoup plus facile de faire apparaître $(x+1/2)^2$ au premier membre de l'équation. Oui bien sûr, avec notre habitude de la manipulation des x et des équations. Mais si vous aviez écrit cela devant un scribe à Babylone, il aurait ouvert des yeux ronds.

Problème 1, interprétation Høyrup

BM 13901 (ca 1800 av. J.-C.)



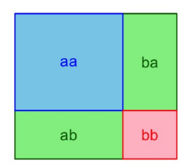
13 Identité remarquable, version géométrique

Je voudrais maintenant vous convaincre de la généralité du procédé. La notion d'identité remarquable n'aurait pas eu de sens en Mésopotamie. Il n'y avait pas de polynôme à manipuler. La méthode de résolution du problème 1 que nous avons vue était pourtant bien la version géométrique d'une identité remarquable : $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Elle était comprise comme un agencement de figures géométriques.

Il y avait encore une autre manière générale de résoudre les équations du second degré.

Identité remarquable, version géométrique

BM 13901 (ca 1800 av. J.-C.)



$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

14 Équations du second degré

Si vous ramenez le coefficient du terme en x^2 à 1 et si vous vous interdisez d'écrire des termes négatifs, une équation du second degré prend l'une des trois formes suivantes : $x^2+px = q$, $x^2 = px + q$, ou bien $px = x^2 + q$.

Mettez x en facteur et appelez y l'autre facteur, vous obtenez un système de deux équations à deux inconnues. L'une vous donne la somme ou la différence de x et y, l'autre vous donne leur produit. Ces systèmes sont très fréquents chez les Mésopotamiens, et de nombreux problèmes s'y ramènent. Or il y a un moyen géométrique très simple de résoudre un tel système.

Équations du second degré

somme et produit de deux inconnues

$$x^2+px=q \iff x(x+p)=q \iff \begin{cases} y-x &= p \\ xy &= q \end{cases}$$

$$x^2=px+q \iff x(x-p)=q \iff \begin{cases} x-y &= p \\ xy &= q \end{cases}$$

$$px=x^2+q \iff x(p-x)=q \iff \begin{cases} x+y &= p \\ xy &= q \end{cases}$$

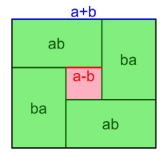
15 Identité remarquable, version géométrique

Si on connaît la somme et le produit de deux nombres, on calcule le carré de la somme, on retranche quatre fois le produit, il reste le carré de la différence, dont il faut ensuite extraire la racine carrée. Si c'est la différence qui est donnée, on calculera la somme en ajoutant au carré quatre fois le produit. Une fois qu'on a la somme et la différence des deux inconnues, il est facile d'en déduire les valeurs cherchées.

Les calculs de racines carrées, comme les calculs d'inverses, se faisaient à l'aide de tables, ce n'était donc pas aussi compliqué que ça en a l'air.

Identité remarquable, version géométrique

BM 13901 (ca 1800 av. J.-C.)



$$(a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab$$

16 Nisaba

À part l'analyse lexicale, il y a aussi des raisons culturelles qui prouvent que les Babyloniens pensaient en termes géométriques de parcelles de terrain à rassembler ou à partager, plutôt qu'en nombres ou en symboles.

Ces problèmes sont nés dans une société où la production de céréales était vitale ; pour manger, et aussi pour boire : l'accès à l'eau potable n'était pas forcément garanti et l'usage de la bière était quotidien. La société devait être organisée non seulement pour produire, mais aussi pour redistribuer de manière équitable. C'est probablement de là que sont nées à la fois l'écriture et la numération.

Vous voyez ici une représentation de la déesse Nisaba, qui était initialement l'équivalent de Cérès pour les Romains, c'est-à-dire la déesse de l'agriculture et des moissons. Compte tenu de l'importance de l'écriture et de l'arpentage dans la redistribution, Nisaba s'est vue doter du patronage de l'écriture et des calculs géométriques. Vous voyez à son bras gauche une corde d'arpentage qui fait partie de ses attributs divins. Nisaba était révérée en particulier dans les écoles de scribes, qui étaient souvent accompagnées de temples réservés à son culte.

Voici un hymne à Nisaba, que les apprentis scribes recopiaient et apprenaient par cœur.

Nisaba

déesse des récoltes, de l'écriture et des nombres

17 Hymne à Nisaba

« Mon illustre sœur Nisaba, doit recevoir le roseau d'une perche
La corde de lapis-lazuli doit pendre de son bras
Elle doit proclamer les pouvoirs divins
Elle doit fixer les bornes et marquer les délimitations
Elle doit être le scribe de la terre.
Ce que mangent et boivent les dieux est entre ses mains. »

La perche était une unité de mesure d'environ six mètres, adaptée à la mesure des terrains. Les attributs de Nisaba sont donc une règle droite d'environ six mètres, et une corde : les outils de base de l'arpenteur. Avec cela, elle doit fixer les bornes et marquer les délimitations des terrains. C'est cela la fonction principale d'un scribe, et Nisaba est le scribe par excellence. Ce que mangent et boivent les dieux est entre ses mains, tout comme ce que mangent et boivent les hommes est entre les mains des scribes.

Hymne à Nisaba

Enki et l'ordre du monde

Mon illustre sœur Nisaba, doit recevoir le roseau d'une perche

La corde de lapis-lazuli doit pendre de son bras

Elle doit proclamer les pouvoirs divins

Elle doit fixer les bornes et marquer les délimitations

Elle doit être le scribe de la terre.

Ce que mangent et boivent les Dieux est entre ses mains.

18 La règle et l'anneau

L'importance des attributs de Nisaba, la règle et la corde, est telle pour la mythologie babylonienne, que c'est peut-être l'origine du symbole divin, que l'on retrouve sur de nombreuses représentations religieuses. Sur celle-ci, une déesse porte le symbole dans chaque main.

Si on interprète l'anneau comme une corde roulée, la déesse tient ensemble les deux outils de mensuration par excellence. Ces outils de mensuration symbolisent ce que les dieux transmettent aux hommes, à savoir la faculté de mesurer les terrains et de répartir les récoltes, donc d'assurer la justice, en clair la base de la civilisation.

La règle et l'anneau

19 Shamash, Dieu du Soleil

Voici Shamash. C'est le dieu le plus puissant, celui du Soleil, qui est représenté au milieu. Shamash a en main le symbole de la règle et de l'anneau.

Shamash, Dieu du Soleil

20 Stèle d'Hammurabi (ca. 1800–1750 av. J.-C.)

Il l'a toujours ici. C'est la stèle sur laquelle est gravé le code d'Hammurabi. En haut figure une représentation de Shamash assis, avec Hammurabi debout devant lui. La règle et l'anneau dans la main du dieu symbolisent le don par le dieu de la faculté de mesurer, donc d'assurer la justice, précisément ce que fait Hammurabi en faisant graver son code.

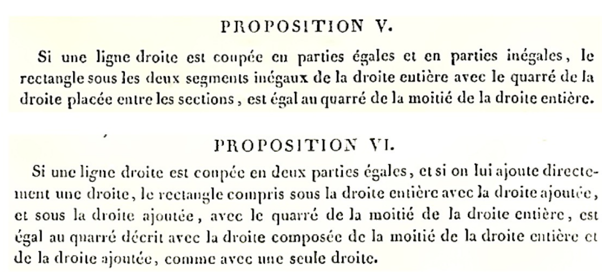
Stèle d'Hammurabi (ca. 1800–1750 av. J.-C.)
Musée du Louvre

21 Éléments, Livre II, Propositions V et VI

Une autre preuve que la résolution des équations du second degré, et même l'algèbre en général ont longtemps été de nature géométrique, se trouve dans les Éléments d'Euclide.

Les propositions cinq et six du livre deux traitent respectivement des équations du type $x^2 - px = q$ et $x^2 + px = q$. Comme d'habitude chez Euclide, il faut pas mal réfléchir pour comprendre que c'est bien cela qu'il fait, mais les figures qui accompagnent ces propositions, ne laissent aucun doute. Quinze siècles après les Mésopotamiens, Euclide résolvait encore les équations du second degré comme eux, en recombinant des rectangles et des carrés.

Éléments, Livre II, Propositions V et VI
Euclide (ca. 325–265 av. J.-C.)



PROPOSITION V.

Si une ligne droite est coupée en parties égales et en parties inégales, le rectangle sous les deux segments inégaux de la droite entière avec le quarré de la droite placée entre les sections, est égal au quarré de la moitié de la droite entière.

PROPOSITION VI.

Si une ligne droite est coupée en deux parties égales, et si on lui ajoute directement une droite, le rectangle compris sous la droite entière avec la droite ajoutée, et sous la droite ajoutée, avec le quarré de la moitié de la droite entière, est égal au quarré décrit avec la droite composée de la moitié de la droite entière et de la droite ajoutée, comme avec une seule droite.

22 Arithmétiques

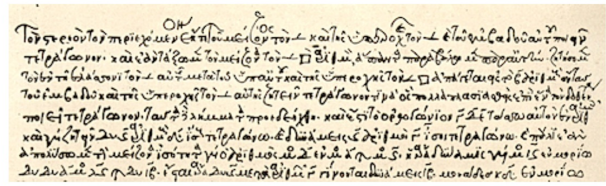
Mais alors qui donc a inventé l'algèbre ? Certes, les Babyloniens résolvaient des équations et des systèmes compliqués bien avant tout le monde. Mais ils exprimaient leurs problèmes en mots et en nombres, et n'avaient aucune notation algébrique.

Diophante, 20 siècles après les Mésopotamiens tout de même, résolvait des équations encore plus compliquées, allant jusqu'au degré six, avec jusqu'à 4 inconnues. Pour cette raison, Diophante est souvent cité comme le père de l'algèbre. D'ailleurs, il était considéré comme tel par les Arabes eux-mêmes.

Or, on trouve chez Diophante une notation qui ressemble bien à une notation algébrique. Vous en voyez quelques exemples sur cet extrait d'un manuscrit des Arithmétiques.

Cela signifie-t-il que Diophante avait franchi le pas de l'algèbre symbolique, avant Viète ?

Arithmétiques
Diophante (ca 250-334)



23 Notation algébrique des Arithmétiques ?

Vous savez que les Grecs notaient leurs chiffres avec des lettres. Pour les distinguer des lettres ordinaires, ils ajoutaient un prime ou les surlignaient, comme ici. Diophante manipule sans arrêt une notion d'inconnue, qu'il appelle le « nombre qui n'a pas de nom », ou « le nombre » tout court, arithmos. Il a une notation pour cette inconnue, et une autre notation pour chacune de ses puissances, jusqu'à la sixième. Il n'a pas de notation pour le signe plus, la juxtaposition vaut addition, mais il a bien une notation pour le signe moins, une sorte de psi avec son chapeau renversé. Avec cela, il peut parfaitement noter des polynômes à une variable.

Ici dans l'ordre, vous lisez l'inconnue au cube, fois un, plus l'inconnue fois huit. Ensuite vient le signe moins, qui affecte tout ce qui se trouve après, donc l'inconnue au carré fois 5, plus la monade, c'est-à-dire la constante un, fois un. Cela donne $X^3 - 5X^2 + 8X - 1$.

Attendez voir : si Diophante au troisième siècle avait une écriture symbolique pour les polynômes, pourquoi a-t-il fallu attendre le dix-septième pour que l'algèbre symbolique apparaisse et le dix-huitième pour qu'elle s'impose vraiment ?

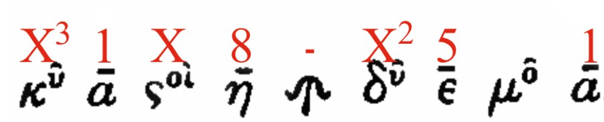
Prendre l'écriture de Diophante pour un alphabet de symboles littéraux, ce serait projeter nos propres catégories de pensée sur un temps où elles n'existaient pas. Exactement la même erreur que celle consistant à lire nos identités remarquables algébriques, dans les manipulations géométriques des Mésopotamiens.

L'écriture de Diophante n'était pas une algèbre symbolique, c'était une sorte de sténo. Ce qu'il écrivait pour l'inconnue, son carré, son cube n'étaient que des manières abrégées d'écrire les mots qui les désignaient. Regardez le premier signe : kappa avec un petit u en exposant, ce sont les deux premières lettres de kubos. Pour le carré, delta et u sont les deux premières lettres de dunamis, qui veut dire puissance, pour puissance deux. Quant au signe pour l'inconnue, c'est une déformation du début du mot arithmos, le nombre.

Donc Diophante avait une écriture condensée des équations, certes, mais pas une manipulation abstraite de symboles algébriques. Finalement, Diophante n'est peut-être pas plus le père de l'algèbre, que ne l'étaient les scribes adorateurs de la déesse Nisaba.

Notation algébrique des Arithmétiques ?

Diophante (ca 250-334)



$$X^3 - 5X^2 + 8X - 1 \, .$$

24 références

Ben non, cette fois-ci je n'ai même pas cherché de chute plus ou moins spirituelle à cette histoire. Je voudrais simplement vous lire la conclusion de Jens Høyrup, que je trouve magnifique.

« Ce que nous pouvons apprendre de la nouvelle interprétation est que *les mathématiques peuvent se penser de plusieurs façons*, et qu'il faut toujours écouter l'autre (l'époque qu'étudie l'historien – l'autre culture – ou le partenaire de l'enseignant, l'élève) avant de nous fixer sur ce qu'il doit avoir pensé et ce qu'il doit penser. Si les mathématiques peuvent se penser de plusieurs façons, alors il n'y a aucune garantie que la nôtre soit vraiment *la* bonne. Mais en écoutant, nous pourrions arriver à comprendre mieux notre propre pratique et mode de pensée, et à mieux estimer si notre voie est l'une des voies fructueuses – peut-être aussi à comprendre *quels* sont les fruits promis. »

références

- K. Chemla, ed. (2012) *The history of mathematical proof in ancient traditions*, Cambridge : University Press
- J. Høyrup (2010) *L'algèbre au temps de Babylone*, Paris : Seuil
- IREM (2016) *Les Mathématiques en Mésopotamie & variations sur les aires*, 2 brochures, Grenoble : Université Grenoble-Alpes
- D. E. Knuth (1972) Ancient Babylonian algorithms, *Communications of the ACM*, 15(7), 671–677
- C. Proust (2006) *Mathématiques en Mésopotamie*, Paris : CultureMath
- E. Robson (2008) *Mathematics in ancient Iraq, a social history*, Princeton : University Press